УДК 517.946

В. С. Ільків[1)], Н. І. Страп[2)], І. І. Волянська[2)]

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ $z\,\partial/\partial z$ У КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Вивчено диференціальне рівняння з оператором узагальненого диференціювання $B = z\partial / \partial z$, *який діє на функції комплексної змінної* z *в області* $S \subset \pounds \setminus \{0\}$. *Встановлено умови однозначної розв'язності нелокальної задачі*

$$\sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = \varphi_m, \qquad m = 0,1, \mathbf{K}, n-1,$$

де $a_{s_0,s_1} \in \pounds$, $\mu \in \pounds \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$.

Подібна задача для декількох операторів узагальненого диференціювання (за відповідними просторовими змінними $z_1, z_2, \mathbf{K}, z_p$*) є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають під час побудови розв'язку. Показано, що за однієї просторової змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими додатними сталими. Введено шкали функціональних просторів та встановлено, що оператор нелокальних умов задачі є бієктивним відображенням для відповідних пар просторів.*

Вступ. Одним із важливих напрямків розвитку сучасної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними є дослідження крайових задач та встановлення умов коректної їх розв'язності. В останні роки інтенсивно вивчають задачі з нелокальними крайовими умовами, які пов'язують значення шуканих розв'язків та їх похідних у різних (двох або більше) граничних чи внутрішніх точках розглядуваної області, які, взагалі, є некоректні.

Некоректність крайової задачі для диференціального рівняння із частинними похідними часто зумовлена належністю нуля до спектра деякого оператора, породженого цією крайовою задачею. Багато дослідників [2, 6, 8] коректність задач з нелокальними умовами для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь забезпечують накладанням додаткових обмежень (для відділення спектра від нуля) на рівняння, крайові умови та області, в яких вивчають задачі.

Загалом такі задачі є некоректні за Адамаром (нуль належить до спектра), а їх розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають під час побудови загального розв'язку.

Досліджено [1, 9] умовно коректні задачі з нелокальними крайовими умовами за часом та умовами періодичності (а також деякими іншими умовами) за просторовими змінними для рівнянь з частинними похідними на основі метричного підходу до оцінювання знизу малих знаменників. У цих працях зазвичай нема обмежень на кількість p просторових змінних $x_1, \mathbf{K}, x_p$. Тому малі знаменники в задачах залежні від декількох цілочислових змінних $k_1, \mathbf{K}, k_p$. У багатьох випадках функції від одного аргументу мають відому асимптотику на безмежності і вивчені детальніше, ніж функції від кількох аргументів. Тому випадок однієї просторової змінної є принциповим і вимагає окремого розгляду.

Зупинимось на нелокальній задачі для просторової змінної, яка набуває комплексні значення. Раніше некоректні задачі з нелокальними умова-

ISSN 1810-3022. **Прикл. проблеми мех. і мат.** – 2012. – **Вип.** 10. – **С.** 15–26.

ми для рівнянь з частинними похідними в комплексній області не вивчали. Задачу Коші у комплексній області досліджував Ю. А. Дубінський [4, 5].

Розглянемо нелокальну двоточкову крайову задачу для рівняння з частинними похідними, в якому замість оператора диференціювання $\frac{\partial}{\partial z}$ використовуємо оператор узагальненого диференціювання $B = z\frac{\partial}{\partial z}$, що діє на функції скалярної комплексної змінної z. Встановимо умови існування та єдиності розв'язку задачі. Покажемо, що малих знаменників може бути лише скінченна кількість, тому проблема їх оцінювання не виникає, як за багатьох просторових змінних.

Формулювання задачі. Введемо такі позначення: S – область з множини $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, D – циліндрична область $[0;T]\times S$, де $T > 0$.

Нехай W – лінійний простір скінченних сум (основних функцій) вигляду $P(z) = \sum_k P_k z^k$, де $z \in S$, P_k – комплексні коефіцієнти, а k пробігає скінченну множину цілих чисел. Кожну скінченну суму $P(z)$ можна однозначно подати сумою трьох доданків, зокрема $P(z) = P_0 + P_1(z) + P_2\left(\frac{1}{z}\right)$, де P_1 та P_2 – многочлени з нульовими вільними членами і $P_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k$, $P_2(w) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{-k} w^k$.

Простір W' спряжений з простором W; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів $W \to \mathbb{C}$), які є формальними рядами (рядами Лорана) $Q(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k z^k$, що діють на основну функцію $P \in W$ за таким правилом: $\langle Q, P\rangle = \sum_k Q_k \bar{P}_k$, де $\bar{P}_k$ – комплексно спряжене число до числа P_k.

Введемо ще шкали просторів $\{H_q(S)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{H_q^n(D)\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $H_q(S)$ – гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k$, який отриманий поповненням W за нормою

$$\|\psi\|_q = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} |\psi_k|^2\right)^{1/2}, \qquad \tilde{k} = \left(1+k^2\right)^{1/2},$$

а $H_q^n(D)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір функцій $u = u(t,z)$ таких, що похідні $\frac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}$, які для $r = 0,1,\ldots,n$ визначає формула $\frac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) z^k$, для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $H_{q-r}(S)$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $H_q^n(D)$ обчислюємо за формулою

$$\|u\|_{H_q^n(D)}^2 = \sum_{r=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|_{H_{q-r}(S)}^2 .$$

Зауважимо, що $B^s\psi \in H_{q-s}(S)$ для всіх $s \in \mathbb{N}$, якщо $\psi \in H_q(S)$, де B – оператор узагальненого диференціювання: $B\psi = z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$; степені оператора B визначено формулами $B^0\psi = \psi$, $B^s\psi = B\left(B^{s-1}\psi\right)$ при $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тому, зокрема, маємо $B^s\left(z^k\right) = k^s z^k$.

В області D розглянемо задачу з нелокальними умовами

$$Lu = \sum_{s_0+s_1 \le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0\,, \tag{1}$$

$$M_m u = \mu \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=T} = \varphi_m\,, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1\,, \tag{2}$$

де $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$; $u = u(t,z)$ – шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ – задані функції змінної z.

Якщо виконується умова $u \in H_q^n(D)$ для ряду Лорана $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) z^k$, то правильною є формула $Bu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k u_k(t) z^k \in H_{q-1}^n(D)$, а також формули $Lu \in H_{q-n}^0(D)$ і $M_m u \in H_{q-m}(S)$ для $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Для функції $u \in H_q^n(D)$ рівняння (1) є рівнянням у просторі $H_{q-n}^0(D)$, а умови (2) – це умови у просторах $H_q(S)$, $H_{q-1}(S)$, ... , $H_{q-n-1}(S)$ відповідно.

Означення. Під *розв'язком* задачі (1), (2) розуміємо функцію $u = u(t,z)$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2) та належить до простору $H_q^n(D)$.

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб функції φ_m належали до просторів $H_{q-m}(S)$ при $m = 0, 1, \ldots, n-1$ відповідно. Це твердження є наслідком з означення розв'язку задачі та властивостей просторів $H_q(S)$ і $H_q^n(D)$.

Побудова розв'язку. Розв'язок $u = u(t,z)$ задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) z^k\,, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$ – невідомі функції, які треба визначити.

Запишемо оператор L з рівняння (1) у вигляді суми $L = \sum_{j=0}^{n} b_j(B) \dfrac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}$, де оператори $b_j(B) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1} B^{s_1}$, $j = 1, \ldots, n$, є многочленами не вище j-го степеня від оператора B, $b_0(B)$ – одиничний оператор.

Функція $u_k = u_k(t)$ з формули (3) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ є класичним розв'язком такої задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\sum_{j=0}^{n} b_j(k) u_k^{(n-j)} = 0\,, \tag{4}$$

$$\mu\, u_k^{(m)}\Big|_{t=0} - u_k^{(m)}\Big|_{t=T} = \varphi_{mk}\,, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1\,, \tag{5}$$

де коефіцієнти $b_j(k) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1} k^{s_1}$ – многочлени степеня не вище j, φ_{mk} – коефіцієнти Фур'є функції φ_m, тобто коефіцієнти ряду $\varphi_m(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{mk} z^k$.

Єдиність розв'язку $u_k(t)$ задачі (4), (5) у просторі $C^n[0,T]$ для кожного $k\in\mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H_q^n(D)$. Тому, якщо хоча б для одного k існує нетривіальний розв'язок $\tilde{u}_k(t)$ задачі (4), (5) для нульових чисел $\varphi_{0k}, \varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{n-1,k}$, то задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок $\tilde{u} = u(t,z)$ для нульових функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, який визначає формула $\tilde{u}(t,z) = \tilde{u}_k(t) z^k$, і розв'язок задачі (1), (2) не може бути єдиним для жодного набору функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Для побудови розв'язку задачі (4), (5) у рівнянні (4) пронормуємо коефіцієнти $b_j(k)$ для $j = 1,\ldots,n$, і подамо їх у вигляді добутку $b_j(k) = \tilde{k}^j \tilde{b}_j(k)$. Функції $\tilde{b}_j(k)$ рівномірно обмежені за k. Вони лінійно залежать від $a_{n-j,0}, a_{n-j,1}, \ldots, a_{n-j,j}$, як і коефіцієнти $b_j(k)$ рівняння (4).

Очевидно, справджується нерівність

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \le \sum_{s_1=0}^{j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j} \le \max_{s_1=0,1,\ldots,j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \sum_{s_1=0}^{j} \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j}\,.$$

Якщо коефіцієнти $a_{s_0,s_1}\in\mathbb{C}$ рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то отримаємо оцінки

$$\left|\tilde{b}_j(0)\right| = \left|a_{n-j,0}\right| \le A\,,$$

$$\left|\tilde{b}_j(\pm 1)\right| \le (j+1)\, 2^{-\frac{j}{2}} A \le \frac{3}{2} A\,,$$

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| < \frac{A}{\tilde{k}^j} \frac{|k|^{j+1}}{|k|-1} < \frac{A|k|}{|k|-1}\,, \text{ при } k\notin\{-1,0,1\}\,,$$

тобто $\left|\tilde{b}_j(k)\right| < 2A$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$ і $j = 1,\ldots,n$.

Звідси випливає, що для всіх (з урахуванням кратності) коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ многочлена $P_k(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda - \lambda_j(k)\right) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k)\lambda^{n-j}$ виконуються нерівності

$$\left|\lambda_j(k)\right| \le 1 + \max\left\{\left|\tilde{b}_1(k)\right|, \ldots, \left|\tilde{b}_n(k)\right|\right\} < 1 + 2A\,. \tag{6}$$

Очевидно, що числа $\gamma_j = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями характеристичного рівняння $\gamma^n + b_1(k)\gamma^{n-1} + \ldots + b_n(k) = 0$ для диференціального рівняння (4).

Позначимо через K множину тих чисел $k\in\mathbb{Z}$, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратні корені.

Для різних коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$, тобто коли $k\in\mathbb{Z}\setminus K$, загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl} e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}, \tag{7}$$

де C_{kl} – довільні комплексні сталі.

Якщо u_k є розв'язком задачі (4), (5), то числа $\tilde{C}_{kl} = (\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T})C_{kl}$, де $l = 1, \ldots, n$, є компонентами розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{m-1}(k)\tilde{C}_{kl} = \frac{\varphi_{m-1,k}}{\tilde{k}^{m-1}}, \qquad m = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

з матрицею Вандермонда $\left(\lambda_l^{m-1}\right)_{m,l=1}^{n}$ і, навпаки, якщо $\operatorname{col}\left(\tilde{C}_{k1}, \ldots, \tilde{C}_{kn}\right)$ – розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (7), де $C_{kl} = \tilde{C}_{kl} / (\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T})$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо рівності

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}}{\Delta} \tilde{k}^{-j} \varphi_{jk},$$

де $\Delta = \prod_{1 \le r < q \le n} \left(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\right)$ – визначник Вандермонда, а Δ_{jl} – його відповідні алгебричні доповнення, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 1, \ldots, n$.

Для того, щоб задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок (у просторі $C^n[0,T]$) для $k \in \mathbb{Z} \setminus K$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\mu \ne e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для всіх $l = 1, \ldots, n$. З цієї умови випливають нерівності $\ln\mu \ne \tilde{k}\lambda_l(k)T + i2\pi m$ або $\lambda_l(k) \ne \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$ для довільних $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}$ та $l = 1, \ldots, n$.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для деяких k та l, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(k)$ визначає формула $\lambda_l(k) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$. Тому виконується рівність $\dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n \tilde{k}^n} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k) \dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^{n-j}\tilde{k}^{n-j}} = 0$ чи еквівалентна їй

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(k) T^j (\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0. \tag{9}$$

За кратних коренів загальний розв'язок рівняння (4) також матиме вигляд (7), але залежно від кратності кореня $\lambda_j(k)$ замість коефіцієнтів C_{kl} будуть многочленні коефіцієнти $\tilde{C}_{kl}(t)$. Тому умова (9) необхідна і достатня умова єдиності розв'язку задачі (4), (5) і за кратних коренів.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $H_q^n(D)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (9) *не мало розв'язків у цілих числах* m *і* k.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай задача (1), (2) у просторі $H_q^n(D)$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходять однозначно, тобто задача (4), (5) у просторі $C^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок. Отже, $\Delta \cdot \prod_{l=1}^{n} \left(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\right) \ne 0$

при $k \in \mathbb{Z} \setminus K$, тобто $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ при $l = 1, \ldots, n$. Таким чином, рівняння (9) не має розв'язків у цілих числах m *і* k. Аналогічні нерівності отримуємо, якщо $k \in K$.

Достатність. Застосуємо метод від супротивного. Нехай рівняння (9) має розв'язок k^*, m^*. Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{k}^* T}$, а задача (4), (5) для нульових чисел $\varphi_{0k}, \varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{n-1,k}$ має розв'язок $e^{\tilde{k}^*\lambda_l(k^*)T} = e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$.

Звідси випливає, що розв'язок u задачі (1), (2) у просторі $H_q^n(D)$ не єдиний, оскільки функції $u + Cz^{k^*}e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$, де C – довільна комплексна стала, є також розв'язками цієї задачі.

Теорему доведено.

В умовах теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує, а при $k \in \mathbb{Z} \setminus K$ має такий вигляд:

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}}{\prod\limits_{1\le r<q\le n}\left(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\right)} \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}. \tag{10}$$

Оцінювання розв'язку. З формули (10) випливає:

$$\left|u_k^{(r)}(t)\right| \le \frac{1}{|\Delta|}\max_{j,l}\left|\Delta_{jl}\right| \sum_{l=1}^{n} \frac{\left|\lambda_l^r(k)e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}\right|}{\left|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\right|} \sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}\right|, \qquad r = 0, 1, \ldots, n.$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата і перетворимо отриману нерівність до вигляду

$$\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \le n^3\frac{(1+2A)^{2r}}{|\Delta|^2}\max_{j,l}\left|\Delta_{jl}\right|^2 \max_l\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right|^2 \sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}\right|^2. \tag{11}$$

Оскільки $\Delta_{jl}(k)$ – визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то з (6) маємо:

$$\left|\Delta_{jl}(k)\right| < (n-1)!(1+2A)^{(n-1)n/2}. \tag{12}$$

Для подальшої оцінки $|u_k(t)|$ розглянемо вираз Δ^2, який є дискримінантом $D(k)$ полінома $P_k(\lambda)$ і для якого правильні такі два зображення [3, 7]:

$$\Delta^2 = D(k) = \prod_{1\le r<q\le n}\left(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\right)^2 = \tilde{k}^{-n(n-1)}\prod_{1\le r<q\le n}\left(\tilde{k}\lambda_q(k) - \tilde{k}\lambda_r(k)\right)^2,$$

$$D(k) = \pm\begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k) \\ n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2\tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & (n-2)\tilde{b}_2(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) \end{vmatrix},$$

де знак перед визначником знаходять за формулою $(-1)^{(n-1)n/2}$.

Дискримінант $D(k)$ подамо у вигляді

$$D(k)=D_0\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)}+\frac{D_1}{\tilde{k}}\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)-1}+\frac{D_2}{\tilde{k}^2}\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)-2}+\ldots+\frac{D_{n(n-1)}}{\tilde{k}^{n(n-1)}}=$$

$$=\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)}\left(D_0+\frac{D_1}{k}+\frac{D_2}{k^2}+\ldots+\frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)}}\right),$$

де D_0, D_1, D_2, ... , $D_{n(n-1)}$ – комплексні числа, які є многочленами від a_{s_0,s_1}, причому D_0 – дискримінант многочлена $\lambda^n+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{n-j,j}\lambda^{n-j}$ (многочлен будують за головною частиною рівняння (1)):

$$D_0=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix}1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & a_{0,n}\\ n & (n-1)a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,1} & (n-2)a_{n-2,2} & \ldots & a_{1,n-1}\end{vmatrix},$$

$D_{n(n-1)}$ – дискримінант многочлена $\lambda^n+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{n-j,0}\lambda^{n-j}$ (многочлен будують за тією частиною рівняння (1), яка не містить похідних за змінною z):

$$D_{n(n-1)}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix}1 & a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & a_{0,0} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,0} & a_{n-2,0} & a_{n-3,0} & \ldots & a_{0,0}\\ n & (n-1)a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,0} & a_{1,0} & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,0} & (n-2)a_{n-2,0} & \ldots & a_{1,0}\end{vmatrix}.$$

Нехай $D_0\neq 0$, тоді

$$D(k)=\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)}\frac{D_0}{2}\left(2+\frac{2D_1}{D_0k}+\frac{2D_2}{D_0k^2}+\ldots+\frac{2D_{n(n-1)}}{D_0k^{n(n-1)}}\right)=$$

$$=\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)}\frac{D_0}{2}\left(2+\frac{2}{kD_0}\left(D_1+\frac{D_2}{k}+\ldots+\frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)-1}}\right)\right).$$

З останньої формули випливає нерівність $|D(k)|\geq\frac{|D_0|}{2}\left(\frac{|k|}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)}$, якщо $|k|\geq\tilde{D}$, де число $\tilde{D}=\frac{2}{|D_0|}\left(|D_1|+|D_2|+\ldots+\left|D_{n(n-1)}\right|\right)$.

Врахувавши нерівність $|k|/\tilde{k}\leq 1/\sqrt{2}$, оцінимо модуль визначника $D(k)$ знизу:

$$|D(k)|\geq\frac{|D_0|}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n(n-1)}=\left(\sqrt{2}\right)^{-n(n-1)-2}|D_0|. \tag{13}$$

Отримана оцінка є точною за змінною k, оскільки оцінка зверху, яка випливає із зображення визначника $D(k)$, така: $|D(k)| \le \frac{3}{2}|D_0|$.

Для оцінки зверху дробу $\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$ використовуємо формули

$$\lim_{|k|\to\infty} \tilde{k}\left|\operatorname{Re}\lambda_j(k)\right| \to \infty \tag{14}$$

та

$$\left|e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}\right| = e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_l(k)t} \le \max\left\{1, e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_l(k)T}\right\}.$$

Друга формула очевидна, доведемо першу.

З того, що числа $-\bar{\lambda}_1(k), \ldots, -\bar{\lambda}_n(k)$ є коренями многочлена

$$P_{1k}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda + \bar{\lambda}_j(k)\right) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \bar{\tilde{b}}_j(k)\lambda^{n-j}$$

і рівності $2\operatorname{Re}\lambda_j(k) = \lambda_j(k) + \bar{\lambda}_j(k) = \lambda_j(k) - \left(-\bar{\lambda}_j(k)\right)$, отримаємо множники вигляду $2\operatorname{Re}\lambda_j(k)$ результанта $R(k) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{l=1}^{n}\left(\lambda_j(k) - \left(-\bar{\lambda}_l(k)\right)\right)$ многочленів P_k та P_{1k}, який дорівнюватиме визначнику [3, 7]

$$R(k) = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k) \\ 1 & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{\tilde{b}}_{n-2}(k) & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & \bar{\tilde{b}}_2(k) & -\bar{\tilde{b}}_3(k) & \ldots & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) \end{vmatrix}.$$

Для довільного $j = 1, \ldots, n$ оцінимо модуль цього результанта:

$$|R(k)| \le 2^{n^2}(1+2A)^{n^2-1}\left|\operatorname{Re}\lambda_j\right|.$$

Оскільки $\tilde{k}^{n^2}R(k) = R_0k^{n^2} + R_1k^{n^2-1} + \ldots + R_{n^2}$, де

$$R_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & a_{0,n} \\ 1 & -\bar{a}_{n-1,1} & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{a}_{2,n-2} & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{a}_{n-1,1} & \bar{a}_{n-2,2} & -\bar{a}_{n-3,3} & \ldots & (-1)^n\bar{a}_{0,n} \end{vmatrix},$$

то, якщо $R_0 \ne 0$, маємо:

$$|R(k)| = \left(\frac{|k|}{\tilde{k}}\right)^{n^2}\frac{|R_0|}{2}\left|2 - \frac{2}{kR_0}\left(R_1 + \frac{R_2}{k} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{k^{n^2-1}}\right)\right|.$$

Якщо вектор $k \in \mathbb{Z}$ задовольняє умову $|k| \ge \tilde{R}$, де

$$\tilde{R} = \frac{2}{|R_0|}\left(|R_1| + |R_2| + \ldots + \left|R_{n^2}\right|\right),$$

то справджується нерівність $|R(k)| \ge \dfrac{|R_0|}{2}\left(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\right)^{n^2} \ge \left(\sqrt{2}\right)^{n^2-2}|R_0|$.

Отже, маємо доведення формули (14), зокрема при $|k| \to \infty$

$$\tilde{k}\left|\operatorname{Re}\lambda_j(k)\right| = \tilde{k}\cdot 2^{-n^2}(1+2A)^{1-n^2}|R(k)| \ge \tilde{k}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{-3n^2-2}(1+2A)^{1-n^2}|R_0| \to \infty .$$

Якщо $\operatorname{Re}\lambda_j(k) > 0$, то справджується рівномірна на $[0,T]$ оцінка

$$\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| \le \frac{e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_l(k)T}}{\left|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\right|} = \frac{e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_l(k)T}}{e^{\tilde{k}\operatorname{Re}\lambda_l(k)T}\left|\dfrac{\mu}{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} - 1\right|} = \frac{1}{\left|\mu e^{-\tilde{k}\lambda_l(k)T} - 1\right|} \le 2$$

при $\tilde{k} \ge M_1$ і $|k| > \tilde{R}$, де $M_1 = \dfrac{\ln(2|\mu|)}{T|R_0|}\left(\sqrt{2}\right)^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}$.

Якщо ж $\operatorname{Re}\lambda_j(k) < 0$, то

$$\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| = \frac{1}{\left|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\right|} \le \frac{2}{|\mu|}$$

при $\tilde{k} \ge M_2$ і $|k| > \tilde{R}$,

де $M_2 = \dfrac{\ln(2/|\mu|)}{T|R_0|}\left(\sqrt{2}\right)^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}$.

Отже, при $|k| > \tilde{R}$ і

$$\tilde{k} \ge \max(M_1, M_2) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}}{T|R_0|}\left(2 + \left|\ln|\mu|\right|\right)$$

справджується нерівність

$$\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| \le 2\max\left(1, \frac{1}{|\mu|}\right). \tag{15}$$

Враховуючи нерівності (11)–(15), для всіх $t \in [0,T]$ отримаємо, що

$$\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \le C\sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}\right|^{2(r-j)}\left|\varphi_{jk}\right|^2, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus K_1, \tag{16}$$

де $C = C(A, n, \mu) > 0$, K_1 – множина цілих чисел (скінченна), для яких $|k| \le \max\left(\tilde{D}, \tilde{R}\right)$, або $\tilde{k} \le \max(M_1, M_2)$.

Умови існування розв'язку. На основі формул (3) і (10) маємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in K_1} u_k(t) z^k + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K_1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}}{\Delta}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}z^k. \tag{17}$$

Враховуючи формулу (17) та нерівність (16), оцінимо зверху квадрат норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\|u\|^2_{H^n_q(D)} \le \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \sum_{k \in K_1} \left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \left(1+|k|^2\right)^{(q-r)} +$$

$$+ C\sum_{r=0}^{n} \sum_{k \in Z \setminus K_1} \left(1+|k|^2\right)^{(q-r)} \sum_{j=0}^{n-1} |k|^{2(r-j)} \left|\varphi_{jk}\right|^2 \le C_1 \sum_{j=0}^{n-1} \left\|\varphi_j\right\|^2_{H_{q-j}(S)}, \qquad (18)$$

де додатна стала C_1 залежить від коефіцієнтів рівняння a_{s_0,s_1} і параметра μ, а також чисел A та n.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\varphi_j \in H_{q-j}(S)$ *для* $j = 0, 1, \mathbf{K}, n-1$ *та* $R_0 D_0 \ne 0$ *і для всіх* $k \in K_1$ *рівняння* (9) *не має розв'язків у цілих числах. Тоді існує лише один розв'язок* (17) *задачі* (1), (2), *який належить простору* $H^n_q(D)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* $\varphi_0, \varphi_1, \mathbf{K}, \varphi_{n-1}$.

Д о в е д е н н я. За умови $R_0 D_0 \ne 0$ справджується оцінка (16) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in$ ¢ $\setminus K_1$. З умови нерозв'язності рівняння (9) випливає існування u_k для всіх $k \in K_1$. Оскільки K_1 – скінченна множина, то з нерівності (18) випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Із теореми 2 існування розв'язку випливає важливий наслідок про властивості задачі (1), (2).

Наслідок. *За умов теореми* 2 *оператор* $\left(M_0, M_1, \mathbf{K}, M_{n-1}\right)$ *нелокальних умов* (2) *є бієктивним відображенням* u $\mathbf{a}$ $\left(\varphi_0, \varphi_1, \mathbf{K}, \varphi_{n-1}\right)$ *з простору розв'язків рівняння (1), які належать* $H^n_q(D)$, *на простір вектор-функцій* $H_q(S) \times H_{q-1}(S) \times \mathbf{K} \times H_{q+1-n}(S)$.

Зауважимо, що умови теореми 2 виконуються для майже всіх у сенсі міри Лебеґа коефіцієнтів a_{s_0,s_1} диференціального рівняння (1), тобто для множини повної міри.

За багатьох просторових змінних $z_1, z_2, \mathbf{K}, z_p$ властивість бієктивності виконується для множини коефіцієнтів неповної міри, а обернений оператор задачі (1), (2) діє у ширший, ніж $H^n_q(D)$, простір.

Аналогічні результати можна отримати під час дослідження задачі з умовами (2) для денеоднорідного рівняння $Lu = f$, а також задачі (1), (2) за умови $R_0 D_0 = 0$ чи умови неоднозначної розв'язності.

Висновки. Досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з узагальненим оператором диференціювання $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$. Встановлено умови розв'язності цієї задачі у просторі $H^n_q(D)$. Доведено теореми існування та єдиності її розв'язку для функцій $\varphi_0, \varphi_1, \mathbf{K}, \varphi_{n-1}$ зі шкали просторів $\left\{H_q(S)\right\}_{q \in ¡}$.

Показано, що за однієї просторової змінної z задача (1), (2) є коректною за Адамаром, на відміну від задачі з багатьма просторовими змінними. Встановлено, що проблема малих знаменників не виникає, оскільки відповідні вирази оцінюються знизу додатними сталими. Встановлено бієктивність оператора нелокальних умов задачі.

1. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 7 – С. 795–802.
2. *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Матем. заметки. 1990. – 48, № 1. – С. 20–25.
3. *Ван-дер-Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Мир, 1976. – 648 с.
4. *Дубинский Ю. А.* Задача Коши в комплексной области. – М.: Изд-во МЭИ, 1996. – 180 с.
5. *Дубинский Ю. А.* Задача Коши и псевдодифференциальные операторы в комплексной области // Успехи мат. наук. – 1990. – 45(272), № 2. – С. 115–142.
6. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич І. В.* Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для однорідного рівняння із частинними похідними нескінченного порядку за просторовими змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4 – С. 17–26.
7. *Калинина Е. А., Утешев А. Ю.* Теория исключения. Уч. пос. – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.
8. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 246 с.
9. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ $z\,\partial/\partial z$ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТІ

Изучено дифференциальное уравнение с обобщенным оператором дифференцирования $B = z\partial\ /\ \partial z$*, действующим на функции комплексного переменного* z *в области* $S \subset$ £ $\setminus \{0\}$. *Получены условия однозначной разрешимости нелокальной задачи*

$$\sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0\,,$$

$$\mu \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=T} = \varphi_m\,, \qquad m = 0, 1, \mathbf{K}\ , n-1\,,$$

где $a_{s_0,s_1} \in$ £, $\mu \in$ £ $\setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$.

Рассматриваемая задача для многих пространственных переменных $z_1,\ z_2, \mathbf{K},\ z_p$ *является некорректной в смысле Адамара, а ее разрешимость зависит от малых знаменателей, которые возникают при построении решения. Показано, что в случае одной пространственной переменной соответствующие знаменатели не являются малыми и оцениваются снизу некоторыми постоянными. Установлено, что оператор нелокальных краевых условий задачи является биективным отображением.*

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION WITH DIFFERENTIAL OPERATOR $z\,\partial/\partial z$ IN THE COMPLEX DOMAIN

In the article the differential equation with the generalized differential operator $B = z\partial\ /\ \partial z$ *which operates on the functions of complex variable* z *in the domain* $S \subset$ £ $\setminus \{0\}$ *is studied. The conditions of the unique solvability of the nonlocal problem*

$$\sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0\,,$$

$$\mu \left. \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right|_{t=0} - \left. \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right|_{t=T} = \varphi_m , \qquad m = 0, 1, \mathbf{K} \;, n-1,$$

where $a_{s_0, s_1} \in$ **£** , $\mu \in$ **£** $\setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$, *are establish.*

In the case of multiple spatial variables z_1, $z_2, \mathbf{K}$, z_p *such problem is incorrect in the Hadamard sense and the solvability of this problem depends on the small denominators which arising in the construction of the solution. In the article it is shown, that in case of single spatial variable the corresponding denominators are not small and they are estimated from below by some constants. We proved, that operator of nonlocal condition mapping bijective.*

[1] Нац. ун-т "Львів. політехніка", Львів

[2] Дрогобицький держ. пед. ун-т
імені Івана Франка, Дрогобич

Одержано
22.05.12