УДК 539.3

В. К. Опанасович[1], Н. М. Басса[2]

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ З ТЕПЛОІЗОЛЬОВАНИМИ ДУГОВИМИ ТРІЩИНАМИ УЗДОВЖ КОЛА З УРАХУВАННЯМ ПОВНОГО ГЛАДКОГО КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

Досліджено термопружний стан ізотропної пластини з розміщеними уздовж дуг кола теплоізольованими тріщинами, береги яких гладко контактують по всій довжині під дією рівномірно розподілених зусиль та сталого теплового потоку на нескінченності. Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язування задач теплопровідності та термопружності зведено до задач лінійного спряження, з розв'язку яких знайдено похідну від стрибка температури між берегами тріщин та комплексні потенціали в аналітичному вигляді. З'ясовано умови існування розв'язку задачі у такому формулюванні за зміни теплового і силового навантажень на нескінченності.

Міцність та довговічність сучасних інженерних конструкцій, які працюють в умовах силових і температурних навантажень, залежать від тріщиноподібних дефектів, які можуть виникнути ще на етапі їх виготовлення чи під час експлуатації. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з тріщинами з урахуванням контактної взаємодії їх берегів привертають увагу багатьох учених. Це зумовлено потребою інженерної практики у тонкостінних елементах конструкцій, деталях машин з підвищеною надійністю та довговічністю, оскільки взаємодія берегів тріщини впливає на перерозподіл поля напружень і деформацій в околі дефекту, що дає можливість точніше оцінити міцність конструкції [2, 9, 11].

Напружено-деформований стан тіла з криволінійними тріщинами із гладкою зміною геометрії здебільш можна оцінити на основі розв'язку, отриманого для тріщин, розміщених уздовж дуги еквівалентного кола. Це дає можливість застосовувати порівняно прості перетворення, на основі яких отримаємо аналітичні або числові розв'язки.

Явні розв'язки крайових задач теплопровідності та термопружності для ізотропного тіла з тріщинами, які розміщені уздовж дуг одного кола, без урахування контакту їх берегів побудовано раніше [10]. Термопружний стан пластини з розміщеними уздовж дуги одного кола двома теплоізольованими тріщинами, береги яких зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини, досліджено в праці [3]. Розв'язок цієї задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно.

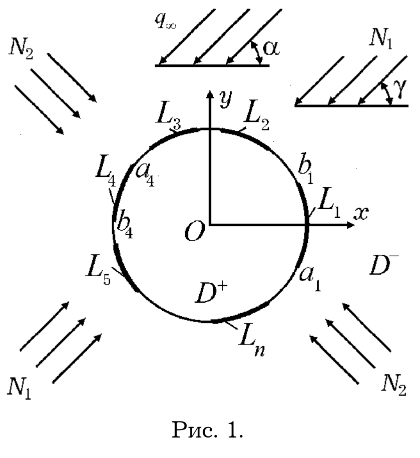

Рис. 1.

Нижче розроблено підхід до дослідження термопружного стану пластини з теплоізольованими тріщинами, що розміщені уздовж дуг кола, за умови, що береги тріщин гладко контактують уздовж усієї своєї довжини (зазнають повного контакту) під дією рівномірно розподілених зусиль та сталого теплового потоку на нескінченності. За його допомогою розв'язок задач теплопровідності та термопружності знайдено аналітично.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину з теплоізольованими поверхнями, що містить n теплоізольованих тріщин уздовж дуг кола радіуса R (рис. 1). Вважаємо, що береги тріщин зазнають повного гладкого контакту під дією на нескінченності рівномірно розподілених зусиль N_1 і N_2 (для стиску $N_1 > 0$), причому зусилля N_1 утворює кут γ з віссю Ox, і сталого теплового потоку інтенсивності q_∞, який утворює кут α з віссю Ox. Виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі кола, вздовж якого розміщені тріщини. Поряд з декартовою системою координат Oxy розглянемо полярну з полюсом у точці O та полярною віссю Ox. Сукупність дуг $L_j = (a_j, b_j)$, уздовж яких розміщені тріщини, позначимо через $L = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$, область у середині кола – через D^+, зовні – через D^-.

Згідно з формулюванням задачі матимемо такі крайові умови:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- = 0\,,\ \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- = 0 \ \text{ на } L\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{rr}^{\ +} = \sigma_{rr}^{\ -} = \sigma_{rr}\,,\ \sigma_{r\vartheta}^{\ +} = \sigma_{r\vartheta}^{\ -} = 0\,,\ u_r^+ - u_r^- = 0 \text{ на } L\,, \tag{2}$$

де T – температура пластини; σ_{rr}, $\sigma_{r\vartheta}$ і u_r, u_ϑ – компоненти тензора напружень та проекції вектора переміщення в полярній системі координат; значками "+","−" позначено граничні значення відповідних величин за прямування точки до лінії L_j із області D^+ і D^- відповідно.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Температуру тіла $T(x,y)$ у безмежній області з тріщинами, коли задано сталий тепловий потік на нескінченності, можемо описати так:

$$T(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\,(F(z))\,,\ F(z) = \bar{a}_0 z + C + \Psi_0(z)\,,\ z = x + iy = re^{i\vartheta}\,, \tag{3}$$

де $F(z)$ – комплексний потенціал температурного поля; $a_0 = (2\lambda)^{-1} q_\infty e^{i\alpha}$; λ – коефіцієнт теплопровідності; C – невідома комплексна стала.

Згідно з [8] для функції $\Psi_0(z)$ існують розвинення

$$\Psi_0(z) = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots\,, & z \to 0, \\ b_*/z + \ldots\,, & |z| \to \infty, \end{cases} \tag{4}$$

де b_*, α_k $\left(k = \overline{0,\infty}\right)$ – невідомі комплексні сталі.

Введемо функцію

$$V(z) = z\Psi_0'(z)/R\,. \tag{5}$$

Тоді з (3) отримаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \bar{a}_0 \frac{z}{r} + a_0 \frac{\bar{z}}{r} + \frac{R}{r}\left(V(z) + \overline{V(z)}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \bar{a}_0 iz - a_0 i\bar{z} + iR\left(V(z) - \overline{V(z)}\right). \tag{6}$$

На підставі першої залежності (6) крайові умови (1) подамо так:

$$\left(V(t)\ \mathbf{m}\ \bar{V}\left(\frac{R^2}{t}\right)\right)^+ \mathbf{m} \left(V(t)\ \mathbf{m}\ \bar{V}\left(\frac{R^2}{t}\right)\right)^- = \begin{cases} 0, & t \in L, \\ f(t), & t \in L, \end{cases} \tag{7}$$

де $f(z) = -2\left(\bar{a}_0 \dfrac{z}{R} + a_0 \dfrac{R}{z}\right)$.

Розв'язавши задачі лінійного спряження (7), отримаємо:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi i X_n(z)} \int_L \frac{f(t_0) X_n^+(t_0)\, dt_0}{t_0 - z} + \frac{P_n(z)}{2X_n(z)}, \tag{8}$$

де $X_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{1/2} (z - b_j)^{1/2}$; $P_n(z) = \sum_{j=1}^{n} d_j z^{j-1}$, d_j – невідомі коефіцієнти.

Для функцій $X_n(z)$ та $X_n^{-1}(z)$ існують розвинення

$$X_n(z) = \begin{cases} \eta_0 + \eta_1 z + \eta_2 z^2 + \mathbf{K}, & z \to 0, \\ z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \gamma_2 z^{n-2} + \mathbf{K} + \gamma_n + \dfrac{\gamma_{-1}}{z} + \dfrac{\gamma_{-2}}{z^2} + \mathbf{K}, & |z| \to \infty, \end{cases} \tag{9}$$

$$\frac{1}{X_n(z)} = \begin{cases} \eta_0' + \eta_1' z + \eta_2' z^2 + \mathbf{K}, & z \to 0, \\ \dfrac{1}{z^n} + \dfrac{\gamma_1'}{z^{n+1}} + \dfrac{\gamma_2'}{z^{n+2}} + \mathbf{K}, & |z| \to \infty, \end{cases} \tag{10}$$

де $\eta_0 = -\prod_{j=1}^{n} (a_j b_j)^{\frac{1}{2}}$; $\eta_0' = \frac{1}{\eta_0}$; $\eta_1 = -\frac{1}{2}\eta_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j + b_j}{a_j b_j}$; $\eta_1' = \frac{1}{2}\eta_0' \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j + b_j}{a_j b_j}$; $\gamma_1' = -\gamma_1$;

$\gamma_1 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)$; $\gamma_2 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} (a_j^2 + b_j^2) + \frac{1}{2}\gamma_1'^2$; $\gamma_2' = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} (a_j^2 + b_j^2) + \frac{1}{2}\gamma_1'^2$.

Обчисливши інтеграл типу Коші [4] та врахувавши відповідні розвинення функції $V(z)$ (5), з (8) знайдемо:

$$V(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{R}\left(-\bar{a}_0 - a_0 \frac{R^2}{z^2} + \frac{V_0(z)}{X_n(z)} \right), \tag{11}$$

де $V_0(z) = \sum_{j=-2}^{n} G_j z^j$; $G_{-2} = a_0 R^2 \eta_0$; $G_{-1} = a_0 R^2 \eta_1$; $G_j = R d_{j+2} + \bar{a}_0 \gamma_{n-j} + a_0 R^2 \gamma_{n-2-j}$,

$j = \overline{0, n-2}$; $G_n = \bar{a}_0$; $G_{n-1} = \bar{a}_0 \gamma_1$; $d_1 = -\bar{a}_0 R^{-1} \gamma_{-1} - a_0 R(\gamma_{n-1} - \eta_1)$; $b_* = -d_n R/2$.

На основі (6) можемо записати залежність

$$r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{i}\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 2\bar{a}_0 z + 2R\, V(z). \tag{12}$$

Врахувавши (12) та першу крайову умову (1), отримаємо:

$$V^+(t) - V^-(t) = \frac{t}{R}\gamma'(t), \quad t \in L, \tag{13}$$

де $\gamma(t) = (T^+ - T^-)/2$.

Підставимо (11) у (13), знайдемо похідну від стрибка температури на берегах тріщин:

$$\gamma'(t) = \frac{V_0(t)}{X_n^+(t)}. \tag{14}$$

Якщо врахувати умову неперервності температури у вершинах тріщин

$$\int_{L_j} \gamma'(t)\, dt = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

то, підставивши (14) у (15), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $d_2, d_3, \mathbf{K}, d_n$:

$$\sum_{k=-2}^{n} G_k a_{kj} = 0\,,\ a_{kj} = \int_{L_j} \frac{t^k dt}{X_n^+(t)}\,,\ j = \overline{1, n-1}\,. \tag{16}$$

Беручи до уваги (5) і (11), знайдемо вираз для функції $\Psi_0(z)$:

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}\left(-\bar{a}_0 z + \frac{a_0 R^2}{z} + \int \frac{V_0(z)\,dz}{X_n(z)}\right). \tag{17}$$

Тоді комплексний потенціал температурного поля $F(z)$ запишемо у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\bar{a}_0 z + \frac{a_0 R^2}{z} + \int \frac{V_0(z)\,dz}{X_n(z)}\right) + C\,. \tag{18}$$

Побудова розв'язку задачі термопружності. Введемо до розгляду комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі $\Phi(z)$ та $\Psi(z)$ [4]. Тоді для визначення термопружного стану пластини скористаємось співвідношеннями [8]

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)\,,\ z = re^{i\vartheta}\,, \tag{19}$$

$$\sigma_{rr} + i\,\sigma_{r\vartheta} = \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2}\,\Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left(\overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)}\right), \tag{20}$$

$$2\mu\left((u_r + iu_\vartheta) + \frac{\partial^2(u_r + iu_\vartheta)}{\partial\vartheta^2}\right) = r\left(\kappa\Phi(z) + \frac{R^2}{r^2}\,\Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left[\overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)}\right]\right) -$$

$$- rz\left(\kappa\Phi'(z) + \frac{R^4}{r^4}\,\Omega'\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \frac{\bar{z}^2}{z}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\overline{\Phi''(z)}\right) + r\beta\left(F(z) - zF'(z)\right), \tag{21}$$

де $\Omega(z) = -\bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\,\bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\,\bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right)$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву, E – модуль Юнґа, ν – коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$; $\beta = 2\alpha_t E/(1+\nu)$, α_t – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ в околі безмежно віддаленої точки та нуля існують розвинення [8]

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Gamma + \dfrac{\bar{b}_\infty}{z} + 0\left(\dfrac{1}{z^2}\right), & |z| \to \infty, \\ A_1 + \mathbf{K}, & z \to 0, \end{cases} \quad \Omega(z) = \begin{cases} -\bar{A}_1 + 0\left(\dfrac{1}{z^2}\right), & |z| \to \infty, \\ \dfrac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + \dfrac{\bar{b}_\infty}{z} + 0(1), & z \to 0, \end{cases} \tag{22}$$

де $\bar{b}_\infty = -2\beta_0 b_*$, $\beta_0 = \frac{\beta}{2(1+\kappa)}$; $\Gamma = -\frac{1}{4}(N_1 + N_2)$; $\Gamma' = \frac{1}{2}(\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2)\,e^{-2i\gamma}$.

Першу та другу контактні крайові умови (2) подамо у вигляді

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^+ - (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^- = 0 \ \text{ на } \ L\,, \tag{23}$$

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^+ + (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^- = 2\sigma_{rr} \ \text{ на } \ L\,. \tag{24}$$

Беручи до уваги (20), з крайової умови (23) отримаємо:

$$(\Phi(t) + \Omega(t))^+ - (\Phi(t) + \Omega(t))^- = 0,\ \ t \in L\,. \tag{25}$$

На основі розв'язку задачі лінійного спряження (25) знайдемо:

$$\Omega(z) = -\Phi(z) + \Gamma - \bar{A}_1 + \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} - \frac{2\beta_0 b_*}{z}. \tag{26}$$

Врахуємо (26), (20) і (21), тоді на основі (24) і останньої крайової умови (2) матимемо:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \sigma_{rr} + \Gamma - \bar{A}_1 + R^2 \bar{\Gamma}' t^{-2} - 2\beta_0 b_* t^{-1}, \quad t \in L, \tag{27}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\Phi^+(t) - \Phi^-(t) + 2\beta_0 \left(F^+(t) - F^-(t)\right) - t\left(\Phi'^+(t) - \Phi'^-(t)\right)\right\} = 0, \quad t \in L. \tag{28}$$

Введемо функцію

$$D(z) = \Phi(z) - \bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + 2\beta_0 \left(F(z) - \bar{F}\left(\frac{R^2}{z}\right)\right) - z\Phi'(z) + \frac{R^2}{z}\bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right). \tag{29}$$

Як видно з (28), функція (29) задовольняє задачу лінійного спряження $D^+(t) - D^-(t) = 0$, $t \in L$, розв'язавши яку, знайдемо:

$$D(z) = \Gamma - \bar{A}_1 + 2\beta_0 \left(\bar{a}_0 z + C - a_0 R^2 z^{-1} - \bar{C} - \bar{\alpha}_0\right). \tag{30}$$

На основі (29) і (30) можемо записати:

$$i\operatorname{Im}\left[\Phi^+(t) + \Phi^-(t) + 2\beta_0 \left(F^+(t) + F^-(t)\right) - t\left(\Phi'^+(t) + \Phi'^-(t)\right)\right] =$$

$$= \Gamma - \bar{A}_1 + 2\beta_0 \left(\bar{a}_0 t + C - a_0 R^2 t^{-1} - \bar{C} - \bar{\alpha}_0\right), \quad t \in L. \tag{31}$$

Врахувавши (27) та (18), із залежності (31) отримаємо диференціальне рівняння для визначення контактних напружень σ_{rr} між берегами тріщин:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \vartheta} = \frac{3}{2} i \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{t^2} - \frac{\Gamma' t^2}{R^2}\right) - 2\beta_0 i \left(\frac{b_*}{t} - \frac{\bar{b}_* t}{R^2} + \bar{a}_0 t - \frac{a_0 R^2}{t}\right) - B_1, \quad t \in L, \tag{32}$$

$$\operatorname{Re} A_1 = \Gamma - 2\beta_0 \alpha_0, \tag{33}$$

де B_1 – невідома стала.

Зінтегрувавши (32) за ϑ, знайдемо:

$$\sigma_{rr} = -\frac{3}{4}\left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{t^2} + \frac{\Gamma' t^2}{R^2}\right) + 2\beta_0 \left(\frac{b_*}{t} + \frac{\bar{b}_* t}{R^2} - \bar{a}_0 t - \frac{a_0 R^2}{t}\right) - B_1 \vartheta + C_1, \tag{34}$$

де C_1 – невідома дійсна стала.

Підставимо (34) у (27) та розв'яжемо отриману задачу лінійного спряження, в результаті функцію $\Phi(z)$ запишемо у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\tilde{f}(z) + \frac{\Phi_0(z)}{X_n(z)}, \tag{35}$$

де $\tilde{f}(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} - 3\frac{\Gamma' z^2}{R^2}\right) + 2\beta_0 \left(\left(\frac{\bar{b}_*}{R^2} - \bar{a}_0\right) z - \frac{a_0 R^2}{z}\right) + C_2$, $C_2 = C_1 + \Gamma - \bar{A}_1$;

$\Phi_0(z) = \sum_{j=-2}^{n+2} \tilde{G}_j z^j - B_1 q_n(z)$, $q_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{u\, X_n^{\,+}(t_0)\, dt_0}{t_0 - z}$, $\tilde{G}_{n+2} = \frac{3\Gamma'}{8R^2}$,

$\tilde{G}_{n+1} = \tilde{G}_{n+2}\gamma_1 + \beta_0 \left(\bar{a}_0 - \bar{b}_*/R^2\right)$, $\tilde{G}_n = \tilde{d}_n + \tilde{G}_{n+2}\gamma_2 + \left(\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2}\gamma_1\right)\gamma_1 - 1/2\, C_2$,

$\tilde{G}_{n-1} = \tilde{d}_{n-1} + \tilde{G}_{n+2}\gamma_3 + \left(\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2}\gamma_1\right)\gamma_2 - 1/2\, C_2\gamma_1 + \beta_0 a_0 R^2$, $\tilde{d}_{n-1} = -2\beta_0 b_* - \Gamma\gamma_1'$,

$\tilde{d}_n = \Gamma$, $\tilde{G}_j = \tilde{d}_j + \tilde{G}_{n+2}\gamma_{n+2-j} + \left(\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2}\gamma_1\right)\gamma_{n+1-j} - 1/2\, C_2\gamma_{n-j} + \beta_0 a_0 R^2 \gamma_{n-1-j} -$

$-1/8\,R^2\bar{\Gamma}'\gamma_{n-2-j}$, $j=\overline{2,n-2}$, $\tilde{G}_{-1}=\beta_0 a_0 R^2\eta_0-1/8\,R^2\bar{\Gamma}'\eta_1$, $\tilde{G}_{-2}=-1/8\,R^2\bar{\Gamma}'\eta_0$,

$$\tilde{G}_1=\tilde{d}_1+\tilde{G}_{n+2}\gamma_{-1}+\left(\tilde{G}_{n+1}-\tilde{G}_{n+2}\gamma_1\right)\gamma_n-1/2\,C_2\gamma_{n-1}+\beta_0 a_0 R^2\gamma_{n-2}-1/8\,R^2\bar{\Gamma}'\gamma_{n-3},$$

$$\tilde{G}_0=\tilde{d}_0+\tilde{G}_{n+2}\gamma_{-2}+\left(\tilde{G}_{n+1}-\tilde{G}_{n+2}\gamma_1\right)\gamma_{-1}-1/2\,C_2\gamma_n+\beta_0 a_0 R^2\gamma_{n-1}-1/8\,R^2\bar{\Gamma}'\gamma_{n-2}.$$

З умов однозначності переміщень за обходу контурів тріщин отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $\tilde{d}_0,\tilde{d}_1,\mathbf{K},\tilde{d}_{n-2}$:

$$\sum_{k=-2}^{n+2} H_k a_{kj}=F_j\,,\quad F_j=B_1\int_{L_j}\frac{q_n(t_0)\,dt_0}{X_n^+(t_0)},\quad j=\overline{1,n-1}\,, \tag{36}$$

де $H_{n+2}=\tilde{G}_{n+2}$; $H_{-2}=\tilde{G}_{-2}$; $H_k=\tilde{G}_k-\beta_0 G_{k-1}$, $k=\overline{-1,n+1}$.

З розвинення функції $\Phi(z)$ (35) у нулі та умови, що $\Phi(0)=A_1$, отримаємо систему двох рівнянь для визначення сталої C_1 та $\operatorname{Im}A_1$:

$$C_1=\operatorname{Re}A_1-\Gamma+\operatorname{Re}\left[\frac{2(\operatorname{Re}A_1-Q_0)+i\operatorname{Im}A_1(1+\gamma_n\eta_0')}{1-\gamma_n\eta_0'}\right], \tag{37}$$

$$\operatorname{Im}A_1=\operatorname{Im}\left[\frac{(C_1-\operatorname{Re}A_1+\Gamma)(1-\gamma_n\eta_0')-2(\operatorname{Re}A_1-Q_0)}{1+\gamma_n\eta_0'}\right], \tag{38}$$

де $Q_0=\left[\tilde{d}_0+\beta_0\left(\bar{a}_0-\bar{b}_* R^{-2}\right)\gamma_{-1}+3\gamma_{-2}\,\Gamma'/\left(8R^2\right)-B_1 q_n(0)\right]\eta_0'$ $-$

$$-R^2\bar{\Gamma}'(\eta_0'\gamma_{n-2}+\eta_1\eta_1'+\eta_0\eta_2')/8+\beta_0 a_0 R^2(\eta_0'\gamma_{n-1}+\eta_0\eta_1').$$

Підставимо (37) у (34), в результаті отримаємо вираз для визначення контактних напружень σ_{rr} між берегами тріщин, який не наводимо.

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) обчислимо за формулою

$$K_{2j}^{\pm}=\pm\frac{1}{\sqrt{R\sin\tilde{a}_j}}\,2\operatorname{Re}\left[\tilde{\Phi}_{0j}\left(z_j^{\pm}e^{i\tilde{b}_j}\right)e^{-\frac{i(\tilde{b}_j\pm\tilde{a}_j)}{2}}\right],\quad K_{1j}^{\pm}=0\,,\quad j=\overline{1,n}\,, \tag{39}$$

де $\tilde{\Phi}_{0j}(z)=\dfrac{\Phi_0(z)}{X_n(z)}\sqrt{(z-a_j)(z-b_j)}$, $z_j^{\pm}=\mathrm{R}e^{i(\tilde{b}_j\pm\tilde{a}_j)}$, $\tilde{a}_j=\dfrac{\phi_{2j}-\phi_{1j}}{2}$, $\tilde{b}_j=\dfrac{\phi_{2j}+\phi_{1j}}{2}$,

$a_j=R\,e^{i\phi_{1j}}$, $b_j=R\,e^{i\phi_{2j}}$, ϕ_{1j}, ϕ_{2j} – кути, які відповідають кінцям тріщин; знак "+" відповідає вершині b_j, а знак "–" – вершині a_j.

У часткових випадках задачі отримаємо результати праць [1–3, 5–7].

Числовий аналіз. Розглянемо частковий випадок задачі, коли пластина ослаблена однією теплоізольованою тріщиною з центральним кутом 2ϕ (рис. 2).

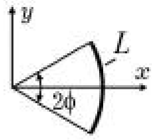

Рис. 2.

Вирази для визначення похідної від стрибка температури берегів тріщини (14), комплексного потенціалу температурного поля (18), КІН (39) та контактних напружень (34) набудуть вигляду

$$\gamma'(t)=\frac{1}{X_1^+(t)}\left(\bar{a}_0(z-R\cos\phi)+\frac{a_0R^2}{z}\left(\cos\phi-\frac{R}{z}\right)\right),\quad t\in L\,,$$

$$F(z)=\frac{1}{2}\left(\bar{a}_0 z+\frac{a_0R^2}{z}+\left(\bar{a}_0+\frac{a_0R}{z}\right)X_1(z)\right)-4R\operatorname{Re}a_0\sin^2\frac{\phi}{2}-iR\operatorname{Im}a_0\cos^2\frac{\phi}{2}+C\,,$$

$$K_2^{\pm} = \sqrt{R\sin\phi}\left\{\frac{\beta_0 R q_\infty}{\lambda}\sin\frac{\phi}{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\phi}{2}\sin^3\frac{\phi}{2}\pm\cos\alpha\left(1+\cos^4\frac{\phi}{2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{(N_1-N_2)}{4}\left[\sin 2\gamma\left(\cos\phi\cos\frac{\phi}{2}+\cos\frac{3\phi}{2}\right)\mp\cos 2\gamma\left(\sin\frac{3\phi}{2}+\cos\phi\sin\frac{\phi}{2}\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_{rr} = \beta_0 R\lambda^{-1} q_\infty \beta(\vartheta) - N_1(1+\lambda(\vartheta)) + N_2\lambda(\vartheta), \qquad (40)$$

де $X_1(z) = \sqrt{z^2 - 2Rz\cos\phi + R^2}$; $\beta(\vartheta) = 2\cos^2\frac{\phi}{2}(-\vartheta\sin\alpha + \cos(\vartheta-\alpha)) -$

$$-\frac{1}{2}\sin^2\phi\cos(\vartheta+\alpha) - \cos\alpha\left(1+3\sin^2\frac{\phi}{2}+\cos^6\frac{\phi}{2}\right);$$

$$\lambda(\vartheta) = \frac{1}{8}\left[6\cos 2(\vartheta-\gamma) + (1-3\cos\phi)\cos^2\frac{\phi}{2}\cos 2\gamma\right] - \frac{1}{2}. \qquad (41)$$

Аналіз умов повного гладкого контакту берегів тріщини по дузі кола, яка знаходиться лише під дією рівномірно розподілених зусиль на нескінченності, подано у праці [5]. Дослідимо вплив теплового потоку, а також сумісну дію теплового та силового навантажень на умови повного гладкого контакту берегів тріщини.

Розподіл зведених контактних напружень $\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr}\lambda/(\beta_0 R q_\infty)$ між берегами тріщини за різних значень кута нахилу теплового потоку α наведено на рис. 3 для кута розхилу тріщини $\phi = 30^\circ$, а на рис. 4 – для $\phi = 120^\circ$, коли силове навантаження відсутнє.

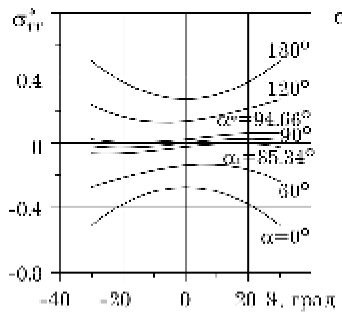

Рис. 3.

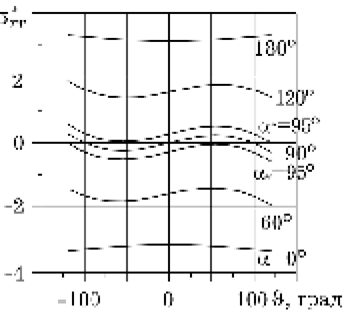

Рис. 4.

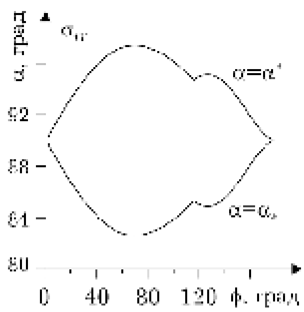

Рис. 5.

Зауважемо, що існують два граничні кути нахилу теплового потоку $\alpha_* < \pi/2$ та $\alpha^* > \pi/2$, за яких зведені контактні напруження між берегами тріщин матимуть один знак. Як видно з рис. 3 і 4, при $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$ контактні напруження між берегами тріщини змінюють знак, тобто потрібно розглянути задачу в іншому формулюванні, враховуючи відставання берегів тріщин. Як бачимо, зведені контактні напруження зі збільшенням кута розхилу тріщини зростають за абсолютним значенням. Слід відмітити, що при $\alpha = 0$ і 180° зведені контактні напруження симетричні відносно осі симетрії тріщини, а для кутів $\alpha < \alpha_*$ та при $\pi - \alpha > \alpha^*$ антисиметричні.

За граничного кута нахилу теплового потоку α_* для кожного кута розхилу тріщини ϕ зведені контактні напруження між берегами тріщини в деякій точці, яка характеризується центральним кутом ϑ, перетворюються в нуль. Як бачимо з рис. 3, для $\phi = 30^\circ$ – це кут $\vartheta = 17^\circ 38'$, для $\phi = 120^\circ$ –

$\vartheta = -120^{\circ}$. На основі числового аналізу можна зробити висновок про існування такого кута $\phi_0 = 115^{\circ}$, що якщо $\phi > \phi_0$, то при $\alpha > \alpha_*$ можна сподіватися відставання берегів тріщини в околі нижнього її кінця ($\vartheta = -\phi$), а якщо $\phi < \phi_0$ – ближче до центра тріщини.

На рис. 5 подано залежність граничних кутів нахилу теплового потоку α_* та α^* від кута розхилу тріщини ϕ. При $q_\infty > 0$, якщо $\alpha < \alpha_*$, то береги тріщини змикатимуться уздовж усієї довжини, якщо $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$, то частково контактуватимуть, а при $\alpha > \alpha^*$ уздовж усієї довжини відставатимуть. Вкажемо на існування залежності $\alpha^* = \pi - \alpha_*$, що узгоджується із фізикою досліджуваного явища. Як видно з рис. 5, при $\alpha < 82^{\circ}$ ($\alpha > 108^{\circ}$), якщо $q_\infty > 0$ ($q_\infty < 0$), то контакт уздовж усієї довжини тріщини можливий за будь-якого кута розхилу тріщини ϕ.

За сумісної дії на нескінченності теплового потоку і стискальних зусиль уздовж осі Ox ($\gamma = 0$, $N_1 = P$, $N_2 = 0$, $\beta_0 R q_\infty / \lambda P = 1$) на рис. 6 і 7 наведено розподіл зведених контактних напружень між берегами тріщини $\sigma^*_{rr} = \sigma_{rr}\lambda / (\beta_0 R q_\infty)$ за різних значень кута нахилу теплового потоку α для кута розхилу тріщини $\phi = 30^{\circ}$ та $\phi = 120^{\circ}$, а на рис. 8 – залежність граничних кутів нахилу теплового потоку α_* та α^* від кута розхилу тріщини ϕ.

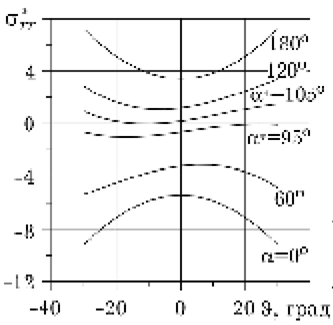

Рис. 6.

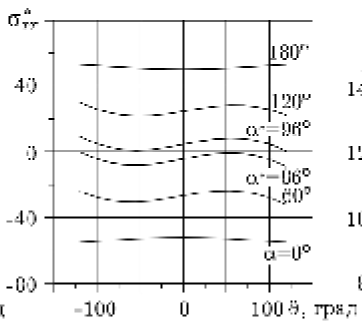

Рис. 7.

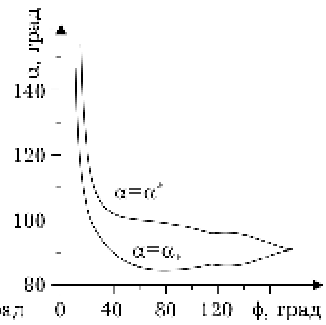

Рис. 8.

Порівнюючи числові результати, коли на нескінченності діє лише тепловий потік (рис. 3–5) і сумісно – тепловий потік та одновісний стиск (рис. 6–8), приходимо до висновку, що вплив стискальних зусиль призводить до збільшення зведених контактних напружень між берегами тріщини та граничних кутів нахилу теплового потоку, за яких береги тріщини повністю контактують.

Для встановлення залежності між кутом розкриття тріщини і термонапруженим станом на нескінченності, коли відбуватиметься повний контакт берегів тріщини, подамо контактні напруження σ_{rr} з (40) у вигляді

$$\sigma_{rr}(\vartheta) / N_1 = \psi\lambda(\vartheta) - \lambda(\vartheta) - 1 + \tilde{N}\beta(\vartheta), \quad |\vartheta| < \phi, \tag{42}$$

де $\psi = N_2 / N_1$; $\tilde{N} = \beta_0 R q_\infty / (\lambda N_1)$.

Користуючись (41), знайдемо максимальне та мінімальне значення $\lambda(\vartheta)$ і позначимо їх відповідно $\lambda_{\max}$ та $\lambda_{\min}$. Введемо позначення

$$\nu_{\max} = 1 + \left(1 - \tilde{N}\beta(\vartheta)\right) / \lambda_{\max}, \quad \nu_{\min} = 1 + \left(1 - \tilde{N}\beta(\vartheta)\right) / \lambda_{\min}.$$

Як видно з (42), за кожного значення кута ϑ контактні напруження лінійно залежать від $\tilde{\nu}$, тому, якщо $\tilde{\nu} < \nu_{max}$ або $\tilde{\nu} > \nu_{min}$, то контакт відбуватиметься по всій довжині тріщин.

На рис. 9, 10 наведено розподіл контактних напружень уздовж берегів тріщини під дією на нескінченності тільки рівномірно розподілених зусиль (штрихові криві) та за сумісної дії теплового потоку та рівномірно розподілених зусиль (суцільні криві) для сплаву АМг-6 з такими характеристиками: $E = 6.867 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\alpha_t = 25 \cdot 10^{-6}$ 1/°С, $\lambda = 26,38$ кВт/(м · °С), коли $\tilde{N} = 8,135$, $\phi = 30°$, $\gamma = 0$, $\alpha = 0$ за різних значень відношення заданих зусиль на нескінченності $\tilde{\nu} = N_2/N_1$.

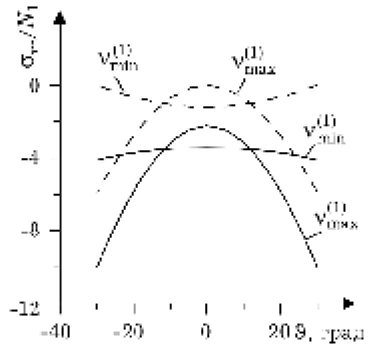

Рис. 9.

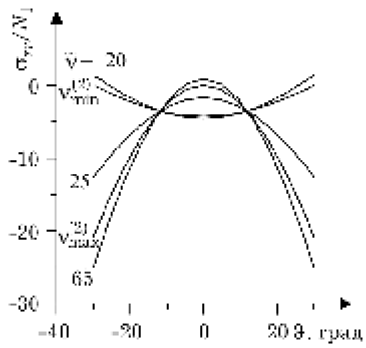

Рис. 10.

Визначено граничні значення $\tilde{\nu}$, за яких контактні напруження між берегами тріщини в деяких точках перетворюються в нуль. Коли на нескінченності задано тільки силове навантаження, позначимо їх через $\nu_{min}^{(1)}$ і $\nu_{max}^{(1)}$ ($\nu_{min}^{(1)} = -2,21$, $\nu_{max}^{(1)} = 16,72$), а за сумісної дії теплових і силових навантажень − $\nu_{min}^{(2)}$ і $\nu_{max}^{(2)}$ ($\nu_{min}^{(2)} = -15,42$, $\nu_{max}^{(2)} = 51,52$). Як бачимо з рис. 9, під дією тільки силового навантаження контактні напруження перетворюються в нуль на кінцях тріщини при $\tilde{\nu} = \nu_{min}^{(1)}$ і у центрі, якщо $\tilde{\nu} = \nu_{max}^{(1)}$ (штрихові криві). За сумісної дії теплового потоку та рівномірно розподілених зусиль на нескінченності контактні напруження σ_{rr}/N_1 одного знака (суцільні криві), отже, тепловий потік спричинив збільшення діапазону зміни граничних значень відношення зусиль на нескінченності, за якого береги тріщини зазнаватимуть повного гладкого контакту за однакових параметрів задачі.

З рис. 10 можна зробити висновок, що коли відношення головних зусиль на нескінченності $\tilde{\nu} > \nu_{max}^{(2)}$ ($\tilde{\nu} = 65$), то береги тріщини відстають у її центральній частині, а коли $\tilde{\nu} < \nu_{min}^{(2)}$ ($\tilde{\nu} = -20$) − в околі кінців тріщини, а якщо для відношення зусиль на нескінченності виконується нерівність $\nu_{min} \le \tilde{\nu} \le \nu_{max}$, то береги тріщини завжди контактуватимуть для заданого кута розхилу тріщини ϕ.

Отже, знаючи кут розхилу тріщини та відношення зусиль на нескінченності, коли задано тепловий потік, можна прогнозувати, чи контактуватимуть береги тріщини по всій довжині, чи лише по її частині. В останньому випадку потрібно змінити формулювання задачі, враховуючи відставання берегів тріщини.

Висновки. За допомогою теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів досліджено термонапружений стан ізотропної пластини з розміщеними уздовж дуг кола теплоізольованими тріщинами, береги яких зазнають повного гладкого контакту під дією сталого теплового потоку та рівномірно розподілених зусиль на нескінченності. Розв'язок задач теплопровідності та термопружності зведено до задач лінійного спряження, з розв'язку яких отримано диференціальне рівняння для визначення контактних напружень між берегами тріщин та знайдено явні вирази для похідної від стрибка температури берегів тріщин та комплексні потенціали плоскої задачі термопружності, що в комплексі описують термопружний стан тіла.

На основі побудованих розв'язків та числового аналізу визначено граничний кут нахилу і напрям теплового потоку, діапазон зміни відношення зусиль на нескінченності, за яких відбувається повний гладкий контакт берегів тріщин, та місця, де слід сподіватися відставання берегів тріщин зі зміною зовнішнього навантаження чи кута їх розхилу.

1. *Грилiцький Д. В., Луцишин Р. М* Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов. – Львів: Вищ. шк., 1975. – 116 с.
2. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
3. *Копоть Н.* Контактна задача для пластини з двома теплоізольованими тріщинами різних довжин уздовж дуги кола // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 99–107.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
5. *Опанасович В. К.* Аналіз умов повного контакту берегів тріщини по дузі кола // Пр. наук. товариства ім. Т. Г. Шевченка. – 1997. – **1**. – С. 483–491.
6. *Опанасович В.* Термопружна контактна задача для пластин з тріщиною по дузі кола // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 120–123.
7. *Опанасович В. К., Лучко Й. Й., Копоть Н. М.* Контактна задача для пластини з двома теплоізольованими тріщинами по дузі кола // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – Львів: Каменяр, 2002. – С. 142–147.
8. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ, 1972. – 198 с.
9. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
10. *Chao C. K. and Shen M. N.* Explicit solutions for curvilinear cracks in the thermoelastic medium // J. Thermal Stresses. – 1993. – **16**, № 3. – P. 215–231.
11. *Ritz E., Pollard D. D.* Closure of circular arc cracks under general loading: effects on stress intensity factors // Int. J. Fract. – 2011. – **167**. – P. 3–14.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ДУГОВЫМИ ТРЕЩИНАМИ ВДОЛЬ КРУГА С УЧЕТОМ ПОЛНОГО ГЛАДКОГО КОНТАКТА ИХ БЕРЕГОВ

Исследовано термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированными трещинами по дуге окружности, берега которых гладко контактируют вдоль всей длины под воздействием равномерно распределенных усилий и постоянного теплового потока на бесконечности. С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов решение задач теплопроводности и термоупругости сведено к задачам линейного сопряжения. Определены производная от скачка температуры между берегами трещин и *комплексные потенциалы в аналитическом виде, а также параметры задачи, при которых существует полный контакт берегов трещин, и места, где следует ожидать отставания их берегов, если условия контакта не выполняются.*

THERMOELASTIC STATE OF PLATE WITH HEAT INSULATED CRACKS ON CIRCLE ARCS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE COMPLETE SMOOTH CONTACT OF THE CRACK FACES

The thermoelastic state of isotropic plate with heat insulated cracks on the arcs of circle is investigated. It is assumed that the crack faces have smooth contact on all length of the crack under the influence of a uniformly distributed stresses and thermal flow at infinity. Using the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the temperature jump derivative between crack faces and the complex potentials is represented in an explicit form. The conditions of existence of complete smooth contact of crack faces is cleared up.

[1]Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів;
[2]Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 12.10.11