УДК 539.3

Ю. Я. Лозинський, Ю. В. Токовий

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ ТА ЗУСИЛЛЯМИ НА ПОЗДОВЖНІХ СТОРОНАХ ПРУЖНОЇ СМУГИ

Розвинуто підхід до розв'язування плоскої задачі теорії пружності та термопружності для однорідної ізотропної смуги із заданими на її поздовжніх сторонах компонентами вектора переміщень. На основі інтегрування рівнянь суцільності Коші з використанням явного розв'язку відповідної задачі в напруженнях встановлено взаємно-однозначні відповідності між переміщеннями на межі та зовнішніми зусиллями. Так вихідну задачу зведено до відповідної задачі з крайовими умовами у термінах зовнішніх зусиль.

Вступ. Плоска задача для однорідної ізотропної смуги за заданих на її поздовжніх сторонах нормальних та дотичних зовнішніх зусиль − одна з найбільш вивчених у теорії пружності та термопружності [7−9, 11, 12]. При цьому розглядали як безмежно довгі смуги, так і видовжені прямокутники. Розв'язки таких задач, в основному, знаходили з використанням розвинень у ряди або інтегрального перетворення Фур'є вздовж довших сторін смуги. Для довгого прямокутника крайові умови на коротших сторонах або ігнорували, або задовольняли в інтегральному сенсі.

Формулювання та розв'язування задач теорії пружності та термопружності в напруженнях роблять актуальним визначення переміщень, у тому числі на межі досліджуваної області, через деформації або напруження (зовнішні зусилля). Встановивши такі співвідношення, можна уникнути фізично некоректних результатів для деяких типів навантажень [2, 10] та отримати необхідні інтегральні умови суцільності для компонентів тензора деформації. Крім того, через взаємно-однозначні відповідності між зовнішніми зусиллями та переміщеннями на межі області вдасться у єдиний спосіб розв'язувати задачі із різними типами крайових умов.

Нижче з використанням методики [2, 4, 5, 10] шляхом інтегрування співвідношень Коші для визначення компонентів вектора переміщень через деформації знайдено інтегро-диференціальне рівняння суцільності − для плоскої задачі теорії пружності та термопружності для смуги. Показано, що це рівняння можна звести до класичного диференціального рівняння суцільності за виконання необхідної умови погодження переміщень та деформацій на поздовжніх сторонах смуги. З допомогою отриманих виразів переміщень через деформації та явного розв'язку задачі теорії пружності та термопружності з крайовими умовами у термінах зовнішніх зусиль [3] встановлено взаємно-однозначні співвідношення між зовнішніми зусиллями та переміщеннями на межі смуги. Таким чином, розв'язки першої, другої та змішаної крайових задач зведено до задачі в напруженнях.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу теорії пружності та термопружності для однорідної ізотропної смуги $D = \{(x,y) \in (-\infty,\infty) \times [-1,1]\}$, яка в умовах плоскої деформації за відсутності масових сил описується [6,12] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

та рівнянням суцільності

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

за наявності на сторонах $y = \pm 1$ крайових умов у термінах зовнішніх зусиль

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 158–163.

$$\sigma_y(x,1) = -p_1(x), \quad \sigma_y(x,-1) = -p_2(x),$$

$$\sigma_{xy}(x,1) = q_1(x), \quad \sigma_{xy}(x,-1) = q_2(x), \tag{3}$$

або переміщень

$$u(x,1) = u_1(x), \quad u(x,-1) = u_2(x),$$

$$v(x,1) = v_1(x), \quad v(x,-1) = v_2(x). \tag{4}$$

Тут $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ та e_x, e_y, e_{xy} – компоненти тензорів напружень та деформації; u, v – компоненти вектора переміщень; (x, y) – безрозмірні декартові координати. При цьому компоненти тензорів напружень та деформації пов'язані між собою фізичними співвідношеннями

$$Ee_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha ET, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha ET,$$

$$Ee_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha ET, \quad Ge_{xy} = \sigma_{xy}, \tag{5}$$

а компоненти деформації виражені через переміщення співвідношеннями Коші

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{6}$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного видовження; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $G = E/(2-2\nu)$ – модуль зсуву; $T = T(x, y)$ – задане стаціонарне температурне поле.

Ставимо задачу знайти компоненти тензора напружень та вектора переміщень у смузі D внаслідок дії температурного поля T за крайових умов (3) або (4) та умови згасання напружено-деформованого стану при $x \to \pm\infty$.

Розв'язок задачі теорії пружності та термопружності з крайовими умовами у термінах зовнішніх зусиль. Для знаходження розв'язку задачі (1)–(3), (5) запропоновано [3] підхід, який полягає у зведенні вихідної системи рівнянь до ключового рівняння на визначальні напруження, за які вибрано $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$. У результаті з використанням інтегрального перетворення Фур'є [1] визначальні напруження знайдено у вигляді

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(y) = {} & \frac{2}{\gamma}(2s\,\mathrm{sh}s(1-y) - \mathrm{sh}2s\,\mathrm{sh}s(1+y))\,\overline{p}_1 + \\
& + \frac{2}{\gamma}(2s\,\mathrm{sh}s(1+y) - \mathrm{sh}2s\,\mathrm{sh}s(1-y))\,\overline{p}_2 - \\
& - \frac{2i}{\gamma}(2s\,\mathrm{ch}\,s(1-y) - \mathrm{sh}\,2s\,\mathrm{ch}\,s(1+y))\,\overline{q}_1 + \\
& + \frac{2i}{\gamma}(2s\,\mathrm{ch}s(1+y) - \mathrm{sh}2s\,\mathrm{ch}s(1-y))\,\overline{q}_2 - \\
& - \frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\overline{T}(y) + \frac{2s}{\gamma}\int_{-1}^{1}\overline{T}(\eta)\,(2s\,\mathrm{ch}s(y-\eta) - \mathrm{sh}2s\,\mathrm{ch}s(y+\eta))\,\mathrm{d}\eta\right),
\end{aligned} \tag{7}$$

де рискою зверху позначено образ у просторі зображень інтегрального перетворення Фур'є; $\gamma = \mathrm{sh}^2 2s - 4s^2$; s – параметр інтегрального перетворення; $i^2 = -1$. При цьому існують такі інтегральні умови:

$$\int_{-1}^{1}\overline{\sigma}(y)\mathrm{sh}sy\,\mathrm{d}y = \frac{i}{s}(\overline{q}_1 + \overline{q}_2)\,\mathrm{sh}s + \frac{1}{s}(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)\,\mathrm{ch}s,$$

$$\int_{-1}^{1} \bar{\sigma}(y)\operatorname{ch}sy\,dy = \frac{i}{s}(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)\operatorname{ch}s + \frac{1}{s}(\bar{p}_2 + \bar{p}_1)\operatorname{sh}s. \tag{8}$$

Усі компоненти тензора напружень виражені через визначальні формулами

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{1}{\operatorname{sh}2s}\Bigg(\bar{p}_1\operatorname{sh}s(1+y) + \bar{p}_2\operatorname{sh}s(1-y) +$$

$$+\frac{s}{2}\int_{-1}^{1}\bar{\sigma}(\xi)\left(\operatorname{ch}s(y+\xi) - \operatorname{ch}2s\operatorname{ch}s(y-\xi) + \operatorname{sh}2s\operatorname{sh}s|y-\xi|\right)d\xi\Bigg), \tag{9}$$

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_y, \tag{10}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{i}{s}\frac{d\bar{\sigma}_y}{dy}. \tag{11}$$

Зауважимо, що з використанням умов рівноваги (8) вираз (9) набуде простішого вигляду:

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{\bar{p}_1}{2}\operatorname{ch}s(1-y) - \frac{\bar{p}_2}{2}\operatorname{ch}s(1+y) +$$

$$+\frac{i\bar{q}_1}{2}\operatorname{sh}s(1-y) - \frac{i\bar{q}_2}{2}\operatorname{sh}s(1+y) - \frac{s}{2}\int_{-1}^{1}\bar{\sigma}(\xi)\operatorname{sh}s|y-\xi|\,d\xi. \tag{12}$$

Підставивши вираз (7) у (12), знаходимо розв'язок задачі (1)–(3), (5) для нормальних напружень σ_y:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\bar{p}_1}{2\gamma}\big((4s^2(1+y) - \operatorname{sh}^2 2s)\operatorname{ch}s(1-y) + 2sy\operatorname{sh}2s\operatorname{ch}s(1+y) -$$

$$-(\operatorname{sh}2s + 2s\operatorname{ch}2s)\operatorname{sh}s(1+y) + (\operatorname{sh}2s\operatorname{ch}2s + 2s))\operatorname{sh}s(1-y)) +$$

$$+\frac{\bar{p}_2}{2\gamma}\big((4s^2(1-y) - \operatorname{sh}^2 2s)\operatorname{ch}s(1+y) - 2sy\operatorname{sh}2s\operatorname{ch}s(1-y) -$$

$$-(\operatorname{sh}2s + 2s\operatorname{ch}2s)\operatorname{sh}s(1-y) + (\operatorname{sh}2s\operatorname{ch}2s + 2s)\operatorname{sh}s(1+y)) +$$

$$+\frac{i\bar{q}_1}{\gamma}\big(s(1-y)\operatorname{sh}2s\operatorname{sh}s(1+y) - 2s^2(1+y)\operatorname{sh}s(1-y)\big) -$$

$$-\frac{i\bar{q}_2}{\gamma}\big(s(1+y)\operatorname{sh}2s\operatorname{sh}s(1-y) - 2s^2(1-y)\operatorname{sh}s(1+y)\big) +$$

$$+\frac{\alpha Es}{1-\nu}\int_{-1}^{1}\bar{T}(\xi)\Bigg(\frac{1}{2}\operatorname{sh}s|y-\xi| + \frac{\operatorname{ch}^2 s\operatorname{sh}sy - sy\operatorname{ch}sy}{\operatorname{sh}2s - 2s}\operatorname{sh}s\xi -$$

$$-\frac{\operatorname{sh}^2 s\operatorname{ch}sy + sy\operatorname{sh}sy}{\operatorname{sh}2s + 2s}\operatorname{ch}s\xi\Bigg)d\xi. \tag{13}$$

Таким чином, розв'язок задачі (1)–(3), (5) знайдено у вигляді (7), (10), (11) та (13).

Розв'язок задачі теорії пружності та термопружності з крайовими умовами у термінах переміщень. Для побудови розв'язку задачі (1), (2), (4)–(6) використаємо відому методику [2, 4, 5]. Проінтегруємо перше та друге рівняння (6) за змінними x та y відповідно з урахуванням умов (4) та згасання функцій при $x \to \pm\infty$. У результаті отримаємо вирази компонентів вектора переміщень через деформації:

$$2u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e_x(\xi, y)\operatorname{sgn}(x-\xi)d\xi,$$

$$2v(x,y) = v_1(x) + v_2(x) + \int_{-1}^{1} e_y(\xi,\eta)\,\mathrm{sgn}(y-\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{14}$$

Поклавши у першій з рівностей (14) $x \to \pm\infty$, а у другій – $y = \pm 1$, дістанемо такі інтегральні умови для нормальних деформацій:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_x(x,y)\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-1}^{1} e_y(x,y)\mathrm{d}y = v_1(x) - v_2(x). \tag{15}$$

Вочевидь, вирази для переміщень (14) повинні задовольняти третє рівняння (6), яке набуває вигляду

$$2e_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial e_x(\xi,y)}{\partial y}\,\mathrm{sgn}(x-\xi)\mathrm{d}\xi + \\ + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v_1(x) + v_2(x)) + \int_{-1}^{1} \frac{\partial e_y(x,\eta)}{\partial x}\,\mathrm{sgn}(y-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{16}$$

і є рівнянням суцільності для деформацій з урахуванням наявності на межі смуги поперечних переміщень. Шляхом диференціювання за змінними x та y його легко звести до класичного рівняння суцільності в деформаціях (2). Однак, щоб рівняння (2) відповідало рівнянню (16), потрібно задовольнити умову погодження

$$2\left(e_{xy}(x,1) + e_{xy}(x,-1)\right) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v_1(x) + v_2(x)) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial e_x(\xi,1)}{\partial y} + \frac{\partial e_x(\xi,-1)}{\partial y}\right)\mathrm{sgn}(x-\xi)\mathrm{d}\xi,$$

яку отримують почерговим інтегруванням рівняння (2) за змінними x та y з урахуванням крайових умов (4) та порівнянням з (16). Цю ж умову одержуємо, поклавши $y = \pm 1$ у рівнянні (16), що вказує на необхідність задоволення цього рівняння на межі області.

Встановимо співвідношення між заданими переміщеннями u_1, u_2, v_1, v_2 на сторонах $y = \pm 1$ смуги D та зовнішніми зусиллями p_1, p_2, q_1, q_2, які вважаємо невідомими. Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є до першого рівняння (14) та рівняння (16) та поклавши в них $y = \pm 1$ з урахуванням умов (4) та (15), отримаємо рівності

$$\bar{e}_x(1) = is\bar{u}_1, \qquad \bar{e}_{xy}(1) = -\frac{i}{s}\frac{\mathrm{d}\bar{e}_x(1)}{\mathrm{d}y} + is\bar{v}_1, \\ \bar{e}_x(-1) = is\bar{u}_2, \qquad \bar{e}_{xy}(-1) = -\frac{i}{s}\frac{\mathrm{d}\bar{e}_x(-1)}{\mathrm{d}y} + is\bar{v}_2. \tag{17}$$

З використанням фізичних співвідношень (5) та крайових умов (3) з невідомими p_1, p_2, q_1, q_2 нескладно знайти вирази для наявних у (17) компонентів тензора деформації на сторонах $y = \pm 1$ смуги:

$$\bar{e}_x(\pm 1) = \frac{1-\nu}{2G}\bar{\sigma}(\pm 1) + \frac{1}{2G}\left(\frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2} \pm \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{2}\right) + \alpha(1+\nu)\bar{T}(\pm 1), \\ \frac{\mathrm{d}\bar{e}_x(\pm 1)}{\mathrm{d}y} = \frac{1-\nu}{2G}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}(\pm 1)}{\mathrm{d}y} + \frac{is}{2G}\left(\frac{\bar{q}_1 + \bar{q}_2}{2} \pm \frac{\bar{q}_1 - \bar{q}_2}{2}\right) + \alpha(1+\nu)\frac{\mathrm{d}\bar{T}(\pm 1)}{\mathrm{d}y}, \\ \bar{e}_{xy}(\pm 1) = \frac{1}{G}\left(\frac{\bar{q}_1 + \bar{q}_2}{2} \pm \frac{\bar{q}_1 - \bar{q}_2}{2}\right). \tag{18}$$

Як бачимо з рівностей (18), усі наявні в (17) деформації на межі $y = \pm 1$ виражені через зовнішні зусилля, задане температурне поле та визначальні напруження $\bar{\sigma}$. Таким чином, підставивши вираз (7) у співвідношення (17), знаходимо:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\bar{p}_1 + a_{12}\bar{p}_2 + a_{13}\bar{q}_1 + a_{14}\bar{q}_2 = 2isG\bar{u}_1 + \Theta_1(1), \\
&a_{12}\bar{p}_1 + a_{11}\bar{p}_2 - a_{14}\bar{q}_1 - a_{13}\bar{q}_2 = 2isG\bar{u}_2 + \Theta_1(-1), \\
&b_{11}\bar{p}_1 + b_{12}\bar{p}_2 + b_{13}\bar{q}_1 + b_{14}\bar{q}_2 = 2s^2G\bar{v}_1 + \Theta_2(1), \\
&-b_{12}\bar{p}_1 - b_{11}\bar{p}_2 + b_{14}\bar{q}_1 + b_{13}\bar{q}_2 = 2s^2G\bar{v}_2 + \Theta_2(-1),
\end{aligned} \tag{19}$$

де

$$\gamma a_{11} = (2\nu - 1)\mathrm{sh}^2 2s - 4s^2; \qquad \gamma a_{12} = 4s(1-\nu)\mathrm{sh}2s;$$

$$\gamma a_{13} = (1-\nu)i(\mathrm{sh}4s - 4s); \qquad \gamma a_{14} = -2i(1-\nu)(\mathrm{sh}2s - 2s\,\mathrm{ch}2s);$$

$$\gamma b_{11} = -s(1-\nu)(\mathrm{sh}4s + 4s); \qquad \gamma b_{12} = 2s(1-\nu)(\mathrm{sh}2s + 2s\,\mathrm{ch}2s);$$

$$\gamma b_{13} = is\left((1-2\nu)\mathrm{sh}^2 2s + 4s^2\right); \quad \gamma b_{14} = 4is^2(1-\nu)\mathrm{sh}2s;$$

$$\Theta_1(y) = \frac{2s\alpha E}{\gamma}\int_{-1}^{1}\bar{T}(\xi)(2s\,\mathrm{ch}s(y-\xi) - \mathrm{sh}2s\,\mathrm{ch}s(y+\xi))d\xi;$$

$$\Theta_2(y) = \frac{2s^2\alpha E}{\gamma}\int_{-1}^{1}\bar{T}(\xi)(2s\,\mathrm{sh}s(y-\xi) - \mathrm{sh}2s\,\mathrm{sh}s(y+\xi))d\xi.$$

За співвідношеннями (19) можна однозначно визначити невідомі зусилля $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ через переміщення $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ на сторонах $y = \pm 1$ смуги D. Так розв'язок задачі (1), (2), (4)–(6) зведено до розв'язування задачі в напруженнях (1)–(3), (5).

Висновки. Розвинуто методику розв'язування плоскої задачі теорії пружності та термопружності для однорідної ізотропної смуги за заданих на межах переміщень або зовнішніх зусиль. Встановлено взаємно-однозначні відповідності (19), які дають можливість визначати невідомі зусилля за відомими переміщеннями границь $y = \pm 1$, і навпаки. Цей факт дає змогу в єдиний спосіб розв'язувати першу, другу та мішану крайові задачі механіки деформівного твердого тіла у вказаній області.

1. *Брычков Ю. А., Прудников А. Л.* Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
2. *Вигак В. М.* Корректные решения плоских задач теории упругости для полуплоскости // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 3. – С. 55–62.
3. *Вігак В. М.* Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності і термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
4. *Вігак В. М., Пушак Я. С.* Інтегрування рівнянь суцільності для двовимірних неосесиметричних задач механіки в кругових областях // Вісник НУ «Львівська політехніка». Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 42–51.
5. *Вігак В., Ричагівський А.* Рівняння та інтегральні умови суцільності для плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла // Машинознавство. – 2000. – № 9. – С. 8–11.
6. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
7. *Папкович П. Ф. Теория упругости.* – М.; Л.: ОборонГИЗ, 1939. – 643 с.
8. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
9. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

10. *Ричагівсъкий А. В., Попович В. С.* Співвідношення між зусиллями й переміщеннями на границі півплощини для плоскої задачі пружності й термопружності // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 165–172.
11. *Снеддон И. Н., Беррон Д. С.* Классическая теория упругости. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.
12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И УСИЛИЯМИ НА ПРОДОЛЬНЫХ СТОРОНАХ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Развит подход к решению плоской задачи теории упругости и термоупругости для однородной изотропной полосы с заданными на ее продольных сторонах компонентами вектора перемещений. На основании интегрирования уравнений сплошности Коши с использованием явного решения соответствующей задачи в напряжениях установлены взаимно-однозначные соответствия между перемещениями на границе и внешними усилиями. Таким образом, исходная задача сведена к соответствующей задаче с краевыми условиями в терминах внешних усилий.

DISPLACEMENTS-TRACTIONS RELATIONS ON THE LONGER SIDES OF AN ELASTIC STRIP

An approach to solving the plane problem of elasticity and thermoelasticity for a homogeneous isotropic strip under boundary conditions for the displacement-vector components on its longer sides is developed. By making use of the Cauchy's compatibility (continuity) equations along with an explicit solution of the corresponding problem in terms of stresses, the one-to-one relations between the tractions and displacements on the boundary are established. In such manner, the original problem is reduced to the corresponding problem with boundary conditions in terms of external tractions.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. рС. Підстигача НАН України, Львів

Одержано
19.10.11