УДК 539.3

Н. М. Антоненко, І. Г. Величко

МОДЕЛЮВАННЯ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ З НАПОВНЮВАЧЕМ НА МЕЖІ БАГАТОШАРОВОГО ПАКЕТА ТА ПІВПЛОЩИНИ

Розглянуто задачу про плоску деформацію багатошарового пакета, зчепленого з півплощиною, за наявності тріщини нормального відриву з наповнювачем на їх спільній межі. Спосіб розв'язання ґрунтується на використанні перетворення Фур'є та методу функцій податливості. Отримано інтегро-диференціальне рівняння задачі та запропоновано спосіб його чисельного розв'язку. Проаналізовано вплив модулів зсуву шарів двошарового пакета та наповнювача на розподіл нормальних напружень у точках верхнього берега тріщини.

Вступ. Шаруваті конструкції широко застосовують в інженерній справі, будівництві та інших галузях народного господарства. Під дією зовнішніх навантажень на спільних межах шарів таких конструкцій можуть виникати тріщини, які зменшують довговічність конструкції та можуть призвести до її руйнування, тому актуальною є проблема моделювання міжфазних тріщин.

Ґрунтовний огляд останніх досягнень теорії тріщин, у тому числі й міжфазних, наведено в працях [5, 6]. Однак там не приділено уваги тріщинам з пружним наповнювачем.

Розв'язки таких задач отримали вітчизняні механіки [8–13], які замість тріщини розглядали вінклерову модель включення та досліджували лише необмежені тіла з включеннями. У праці [14] методом скінченних елементів наближено розв'язані задачі про міжфазні тріщини в шаруватих тілах. Найбільш близькою за формулюванням до задачі, якій присвячена ця стаття, є задача про вільну тріщину на межі пружного шару та пружної півплощини [1], для виводу інтегральних рівнянь якої використано функції Папковіча–Нейбера. Метод інтегральних перетворень, який застосовували раніше [2] до задачі про осесиметричну деформацію шару, що лежить на півпросторі з дископодібною щілиною з наповнювачем на їх спільній межі, в поєднанні з методом функцій податливості дає можливість досліджувати напружено-деформований стан багатошарових тіл з тріщинами.

Формулювання задачі. Розглянемо плоску деформацію пружного пакета із n зчеплених між собою пружних смуг. Смуги вважаємо невагомими однорідними і ізотропними. Кожну смугу характеризуємо модулем зсуву μ, коефіцієнтом Пуассона ν і товщиною h. Пакет зчеплений з півплощиною, за винятком скінченного відрізка довжиною $2a$, яким змодельовано тріщину з наповнювачем. Під дією зосередженого навантаження Q, прикладеного до точки верхньої межі пакета, яка знаходиться на серединному перпендикулярі до тріщини, відбувається її розкриття.

Смуги пронумеровано згори до низу, починаючи з одиниці. Півплощині присвоєно номер $n+1$. Усі величини, які стосуються k-ої смуги, позначимо нижнім індексом k. У кожній смузі введено декартову систему координат $O_k x_k z_k$ з початком на верхній межі смуги так, щоб осі z_k всіх систем координат збігалися і мали напрямок вглиб смуги. Усі осі x_k паралельні x_1 та збігаються із межами відповідних смуг (рис. 1).

Вважаємо, що на лінії тріщини стрибок нормальних переміщень пропорційний до нормальних напружень у точках верхнього берега тріщини (спосіб моделювання наповнювача).

Введемо безрозмірні параметри $\tilde{x}_k = \dfrac{x_k}{l}$, $\tilde{z}_k = \dfrac{z_k}{l}$, $\tilde{Q} = \dfrac{Q}{l\,E}$, $\tilde{h}_k = \dfrac{h_k}{l}$,

$\tilde{\mu}_k = \dfrac{\mu_k}{E}$, $\tilde{c} = \dfrac{c}{E}$ $\tilde{u} = \dfrac{u}{l}$, $\tilde{w} = \dfrac{w}{l}$, $\tilde{\tau}_{xzk} = \dfrac{\tau_{xzk}}{E}$, $\tilde{\sigma}_{xk} = \dfrac{\sigma_{xk}}{E}$, $\tilde{\sigma}_{zk} = \dfrac{\sigma_{zk}}{E}$, де l, E – характерні параметри. У подальшому тильди над функціями та змінними опускатимемо, вважаючи, що всі операції виконуються над безрозмірними параметрами.

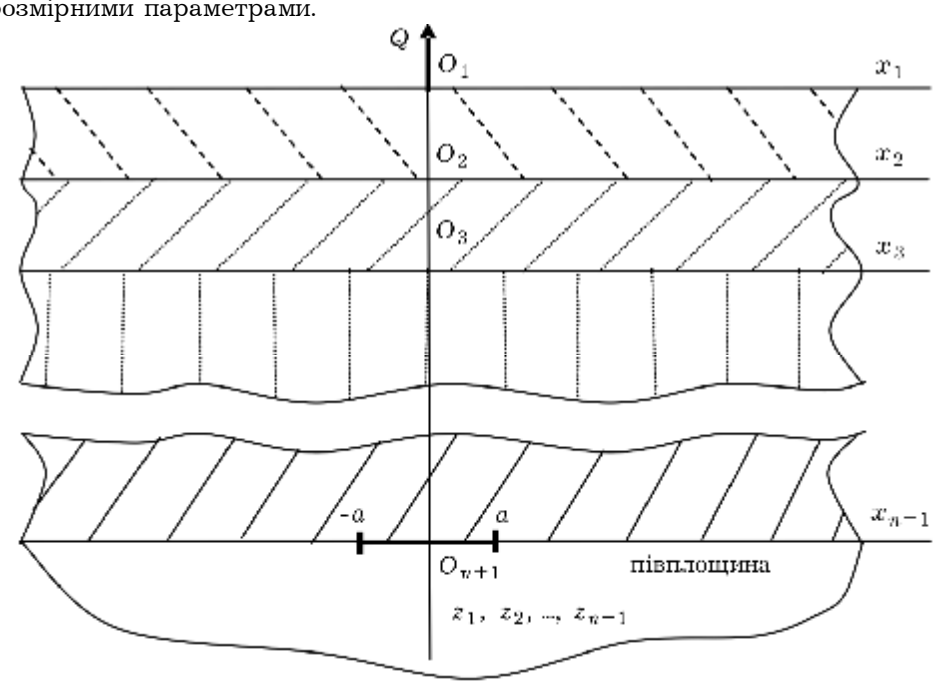

Рис. 1.

Крайові умови задачі:

$$\sigma_z(x,0) = Q\delta(x), \qquad \tau_{xz}(x,0) = 0, \tag{1}$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Умови спряження смуг мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_{zk+1}(x,0) = \sigma_{zk}(x,h_k), \\ \tau_{xzk+1}(x,0) = \tau_{xzk}(x,h_k), \\ w_{k+1}(x,0) = w_k(x,h_k), \\ u_{k+1}(x,0) = u_k(x,h_k),\ k = \overline{1,n-1}, \\ \sigma_{zn+1}(x,0) = \sigma_{zn}(x,h_n), \\ \tau_{xzn+1}(x,0) = \tau_{xzn}(x,h_n), \\ u_{n+1}(x,0) = u_n(x,h_n). \end{cases} \tag{2}$$

Вважаємо, що

$$w_{n+1}(x,0) = w_n(x,h_n) + \begin{cases} A(x), & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \tag{3}$$

$$A(x) = \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} f(x),\ |x| < a, \tag{4}$$

$$\sigma_{zn}(x,h_n) = c\,f(x),\ |x| < a. \tag{5}$$

Тут c – задана константа, яка характеризує матеріал наповнювача; $f(x)$ – невідома функція класу $C^2_{[-a,a]}$.

Необхідно визначити напруження у точках верхнього берега тріщини.

Побудова інтегрального рівняння задачі. Методом функцій податливості [3] можна знайти трансформанти напружень і переміщень у всіх точка багатошарового пакета за умови, що на його верхній межі відомі напруження, а на нижній – або напруження, або переміщення. Вдається отримати співвідношення між трансформантами напружень і переміщень у точках нижньої межі пакета. Із розв'язків задач Фламана і Черруті також можна записати співвідношення між напруженнями та переміщеннями точок верхньої межі півплощини. Ці два рівняння, доповнені умовами (в просторі трансформант) на спільній межі пакета та півплощини дають можливість записати інтегральне рівняння відносно стрибка нормальних переміщень. Нижче детально описано процес побудови інтегрального рівняння задачі.

Для розв'язання задачі використовуватимемо інтегральне перетворення Фур'є:

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi)\, e^{-i\xi x} d\xi. \tag{6}$$

У просторі трансформант співвідношення (2) та (3) мають вигляд

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{zk+1}(\xi,0) = \bar{\sigma}_{zk}(\xi,h_k), \\ -\dfrac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xzk+1}(\xi,0) = -\dfrac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xzk}(\xi,h_k), \\ \mu_{k+1} p\bar{w}_{k+1}(\xi,0) = \mu_{k+1} p\bar{w}_k(\xi,h_k), \\ \mu_{k+1}(-i\xi)\bar{u}_{k+1}(\xi,0) = \mu_{k+1}(-i\xi)\bar{u}_k(\xi,h_k), \; k = \overline{1,n-1}, \\ \bar{\sigma}_{z\,n+1}(\xi,0) = \bar{\sigma}_{z\,n}(\xi,h_n), \\ -\dfrac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xzn+1}(\xi,0) = -\dfrac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz\,n}(\xi,h_n), \\ \mu_{n+1} p\bar{w}_{n+1}(\xi,0) = \mu_{n+1} p\bar{w}_n(\xi,h_n) + \mu_{n+1} p\, M(\xi), \\ \mu_{n+1}(-i\xi)\bar{u}_{n+1}(\xi,0) = \mu_{n+1}(-i\xi)\bar{u}_n(\xi,h_n). \end{cases} \tag{7}$$

Тут $M(\xi) = \int_{-a}^{a} A(t)\, e^{i\xi t} dt$, $p = |\xi|$.

Показано [4], що трансформанти нормальних напружень та переміщень точок смуги можна зобразити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій смуги, які пов'язані з трансформантами напружень та переміщень точок верхньої межі смуги:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi,0), \; \beta = \mu\, p\, \bar{w}(\xi,0), \; \gamma = -i\xi\mu\; \bar{u}(\xi,0), \; \delta = -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi,0). \tag{8}$$

Використовуючи співвідношення для трансформант напружень та переміщень, отримані раніше [4], та формули (8), подамо співвідношення (7) у матричному вигляді:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = T_{11k}\bar{\alpha}_k + T_{12k}\bar{\beta}_k, \tag{9}$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = T_{21k}\bar{\alpha}_k + T_{22k}\bar{\beta}_k, \; k = \overline{1,n-1}. \tag{10}$$

$$\bar{\alpha}_{n+1} = T_{11n}\bar{\alpha}_n + T_{12n}\bar{\beta}_n, \tag{11}$$

$$\bar{\beta}_{n+1} = T_{21n}\bar{\alpha}_n + T_{22n}\bar{\beta}_n + N\bar{\psi}. \tag{12}$$

Тут $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $T_{11k} = \begin{pmatrix} C_k - \omega_k p_k S_k & -(1-\omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ -(1-\omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & C_k + \omega_k p_k S_k \end{pmatrix}$;

$$T_{12k} = \begin{pmatrix} 2\omega_k (S_k - p_k C_k) & -2\omega_k p_k S_k \\ 2\omega_k p_k S_k & 2\omega_k (\ S_k + +p_k C_k) \end{pmatrix};$$

$$T_{21k} = \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} (2-\omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k & -\omega_k p_k S_k \\ \omega_k p_k S_k & (2-\omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k \end{pmatrix};$$

$$T_{22k} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{pmatrix} -\omega_k p_k S_k + C_k & (1-\omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ (1-\omega_k) S_k + p_k \omega_k C_k & \omega_k p_k S_k + C_k \end{pmatrix};$$

$\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^t$; $\bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t$; $\bar{\psi} = (\mu_{n+1} pM(\xi) \quad 0)^t$; $\Delta_k = \dfrac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$; $S_k = sh\, p_k$; $C_k = ch\, p_k$, $p_k = ph_k$ $\left(k = \overline{1,n} \right)$.

Методом математичної індукції можна довести, що вектори $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\beta}_k$ та $\bar{\psi}$ при $k = \overline{1,n}$ лінійно залежні, тобто існує співвідношення

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\psi}, \ k = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Матриці A_k та B_k $\left(k = \overline{1,n+1}\right)$, які входять у формули (13), назвемо матрицями податливості. Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості нижньої смуги пакета та півплощини.

Обчислимо $\bar{\beta}_{n+1}$ двома способами. З одного боку, зв'язок між допоміжними функціями півплощини можна подати співвідношенням [3]

$$\bar{\beta}_{n+1} = A_{n+1} \bar{\alpha}_{n+1}. \tag{14}$$

Тут A_{n+1} – відома матриця податливості пружної півплощини:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\omega_{n+1}} & \dfrac{1-\omega_{n+1}}{2\omega_{n+1}} \\ \dfrac{1-\omega_{n+1}}{2\omega_{n+1}} & -\dfrac{1}{2\omega_{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Взявши до уваги співвідношення (11), (13), (14), подамо вектор $\bar{\beta}_{n+1}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{\alpha}_n$ та $\bar{\psi}$:

$$\bar{\beta}_{n+1} = A_{n+1} T_{11n} \bar{\alpha}_n + A_{n+1} T_{12n} \bar{\beta}_n =$$
$$= \left[A_{n+1} T_{11n} + A_{n+1} T_{12n} A_n \right] \bar{\alpha}_n + A_{n+1} T_{12n} B_n \bar{\psi}. \tag{15}$$

З іншого боку, із співвідношень (12) та (13) отримуємо:

$$\bar{\beta}_{n+1} = T_{21n} \bar{\alpha}_n + T_{22n} \bar{\beta}_n + N \bar{\psi} =$$
$$= \left[T_{21n} + T_{22n} A_n \right] \bar{\alpha}_n + \left[T_{22n} B_n + N \right] \bar{\psi}. \tag{16}$$

Оскільки формули (15) та (16) повинні збігатися для будь-яких векторів $\bar{\alpha}_n$ та $\bar{\psi}$, то мають виконуватися рівності

$$A_{n+1} T_{11n} + A_{n+1} T_{12n} A_n = T_{21n} + T_{22n} A_n, \tag{17}$$

$$A_{n+1} T_{12n} B_n = T_{22n} B_n + N. \tag{18}$$

Зі співвідношень (17) та (18) отримуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості нижньої смуги багатошарового пакета та матриці податливості півплощини:

$$A_n = \left[A_{n+1}T_{12n} - T_{22n}\right]^{-1}\left[T_{21n} - A_{n+1}T_{11n}\right], \tag{19}$$

$$B_n = \left[A_{n+1}T_{12n}B_n - T_{22n}\right]^{-1} N. \tag{20}$$

Міркуючи аналогічно, побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості k-ої та $k+1$-ої смуг:

$$A_k = \left[A_{k+1}T_{12k} - T_{22k}\right]^{-1}\left[T_{21k} - A_{k+1}T_{11k}\right], \tag{21}$$

$$B_k = \left[-A_{k+1}T_{12k} + T_{22k}\right]^{-1} B_{k+1}. \tag{22}$$

Співвідношення (9)–(11), (13) та (19)–(22) дають змогу подати вектор $\overline{\alpha}_{n+1}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\overline{\alpha}_1$ та $\overline{\psi}$:

$$\overline{\alpha}_{n+1} = C\overline{\alpha}_1 + D\overline{\psi}. \tag{23}$$

Компоненти матриць C та D залежать від пружних характеристик смуг багатошарового пакета, їх товщини та параметра p.

Співвідношення (23) дають можливість зобразити допоміжну функцію α_{n+1} у вигляді лінійної комбінації компонентів матриць C та D, допоміжних функцій α_1, δ_1 та функції $M(\xi)$:

$$\alpha_{n+1} = C_{11}(p)\,\alpha_1 + C_{12}(p)\,\delta_1 + \mu_{n+1}pD_{11}(p)\,M(\xi). \tag{24}$$

Із крайових умов задачі (1) за формулами (8) знаходимо допоміжні функції α_1 та δ_1 верхньої смуги:

$$\alpha_1 = Q,\ \delta_1 = 0.$$

Ураховуючи останні співвідношення, подамо вираз (24) у вигляді

$$\alpha_{n+1} = C_{11}(p)\,Q + \mu_{n+1}pD_{11}(p)\,M(\xi). \tag{25}$$

Для побудови інтегрального рівняння скористаємося зв'язком між оригіналом і трансформантою нормальних напружень у точках нижньої межі нижньої смуги багатошарового пакета:

$$\sigma_{zn}(x,h_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\sigma}_{zn}(\xi,h_n)\,e^{-i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_{n+1}(\xi)\,e^{-i\xi x}d\xi. \tag{26}$$

Підставивши співвідношення (25) у (26) із врахуванням того, що навантаження на поверхні пакета симетричне, отримаємо:

$$\sigma_{zn}(x,h_n) = F(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu_{n+1}pD_{11}(p)\,M(\xi)\,e^{-i\xi x}d\xi. \tag{27}$$

Тут $F(x) = \dfrac{Q}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}C_{11}(p)\cos p(t-x)\,dp$.

Підставимо в співвідношенні (27) замість функції $M(\xi)$ її інтегральне подання зі співвідношень (7) та змінимо порядок інтегрування. Матимемо:

$$\sigma_{zn}(x,h_n) = F(x) + \int_{-a}^{a}A(t)\,L(t-x)dt. \tag{28}$$

Тут $L(t-x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mu_{n+1}pD_{11}(p)\,e^{i\xi(t-x)}d\xi$.

Безпосереднім обчисленням можна показати, що існує границя

$$\varepsilon = \lim_{p\to\infty} \mu_{n+1} D_{11}(p) = \frac{d_1}{d_2}, \tag{29}$$

де $d_1 = 2\mu_n (d\omega_n + \omega_{n+1})$, $d = \dfrac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$,

$d_2 = 2d\omega_{n+1} + 2d\omega_n + d^2\omega_n\omega_{n+1} + \omega_n\omega_{n+1} - 2d^2\omega_n - 2\omega_{n+1} - 2d\,\omega_n\omega_{n+1} - 4d$.

З урахуванням (29) подамо функцію $L(t-x)$ у такому вигляді:

$$L(t-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty p\left[\mu_{n+1} D_{11}(p) - \varepsilon\right]\cos p(t-x)\,dp + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty p\cos p(t-x)\,dp. \tag{30}$$

Інтеграл $\int_0^\infty p\cos p(t-x)\,dp$ тут розбігається, тому розумітимемо його в такому сенсі:

$$\int_0^{+\infty} p\cos p(t-x)\,dp = \lim_{q\to 0+0}\int_0^{+\infty} p\cos p(t-x)\,e^{-qp}dp =$$

$$= \lim_{q\to 0+0}\frac{q^2-(t-x)^2}{\left(q^2+(t-x)^2\right)^2} = -\frac{1}{(t-x)^2}.$$

Оскільки інтеграл $\int_{-a}^{a}\frac{A(t)}{(t-x)^2}dt$ при $x = t$ має неінтегровну особливість, то скористаємось формальною рівністю

$$\int_{-a}^{a}\frac{A(t)}{(t-x)^2}dt = -\int_{-a}^{a} A(t)\,d\left(\frac{1}{t-x}\right) =$$

$$= -\frac{A(t)}{t-x}\bigg|_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a}\frac{d(A(t))}{t-x} = \int_{-a}^{a}\frac{A'(t)\,dt}{t-x}. \tag{31}$$

Математичне обґрунтування такої регуляризації наведено, наприклад, у праці [7]. У співвідношенні (31) використано той факт, що береги тріщини змикаються, тобто $A(\pm a) = 0$.

З урахуванням співвідношень (4)–(6) та (30), (31) отримуємо інтегро-диференціальне рівняння задачі для невідомої функції $f(x)$:

$$c\,f(x) = F(x) + \int_{-a}^{a}\left(a^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}} f(t)\,N(t-x)\,dt -$$

$$-\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\left[\left(a^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}} f(t)\right]'}{t-x}\,dt,$$

$$|\,x\,| < a, \tag{32}$$

де $N(z) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\infty p\left[\mu_{n+1} D_{11}(p) - \varepsilon\right]\cos(pz)\,dp$.

Рівняння (32) розв'язуємо наближено так: його праву та ліву частини подаємо у вигляді лінійної комбінації многочленів Чебишова другого роду з подальшим прирівнюванням коефіцієнтів при многочленах однакового степеня. Кількість членів у лінійних комбінаціях обираємо з умови, що під час

збільшення на одиницю кількості членів розкладу результати не змінюються в межах заданої точності.

Після визначення функції $f(x)$ знаходимо нормальні напруження у точках спільної межі пакета та півплощини із співвідношення

$$\sigma_{zn}(x,h_n) = F(x) + \int_{-a}^{a} \left(a^2 - t^2\right)^{\frac{1}{2}} f(t) N(t-x)\,dt - \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\left[\left(a^2 - t^2\right)^{\frac{1}{2}} f(t)\right]'}{t-x}\,dt .$$

Дослідимо поведінку нормальних напружень $\sigma_{zn}(x,h_n)$ при $x \to a+0$. Оскільки функції $f(x)$, $N(t-x)$ і $F(x)$ обмежені, то поведінка нормальних напружень залежатиме лише від доданка, який містить сингулярний інтеграл. За допомогою теореми Лагранжа подамо цей доданок у вигляді

$$\int_{-a}^{a} \frac{\left[\sqrt{a^2-t^2} f(t)\right]'}{t-x}dt = -\int_{-a}^{a} \frac{t f(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t-x)} + \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}\, f'(t)\,dt}{t-x} =$$

$$= -\int_{-a}^{a} \frac{[t f(t) - t f(x) + t f(x)]\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t-x)} + \int_{-a}^{a} \frac{\left[\sqrt{a^2-t^2}\, f'(t) - \sqrt{a^2-t^2}\, f'(x) + \sqrt{a^2-t^2}\, f'(x)\right]dt}{t-x} =$$

$$= -\int_{-a}^{a} \frac{f'(\xi)\; t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}} - f(x)\int_{-a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} - x f(x)\int_{-a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t-x)} + \int_{-a}^{a} f''(\xi)\sqrt{a^2-t^2}\,dt +$$

$$+ f'(x)\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}\;dt}{t-x},$$

де $\xi = \xi(t,x) \in [-a,a]$.

Оскільки $f'(\xi)$, $f''(\xi)$ – обмежені функції та

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}\;dt}{t-x} = \pi\left(\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{|x|} - x\right), |x| > a ,$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t-x)} = -\frac{\pi x}{|x|\sqrt{x^2-a^2}},\ |x| > a,$$

то отримаємо таку асимптотичну формулу:

$$\sigma_{zn}(x,h_n) = -\frac{\varepsilon f(a)\sqrt{2a}}{2\sqrt{r}} + O(1),\ r = x - a,\ \text{при}\ x \to a+0 .$$

Таким чином, формула для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень набуває вигляду

$$k_1 = -\sqrt{\pi a} f(a)\,\varepsilon .$$

Числові приклади. Наведемо результати числових розрахунків для тріщини з наповнювачем, що знаходиться на межі двошарового пакета та пружної півплощини. Розрахунки виконано для таких пружних та геометричних характеристик тіла: довжина тріщини 2, $h_1 = h_2 = 1$, $Q = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\mu_3 = 1$. Побудовано (рис. 2 і 3) графіки, що ілюструють вплив модулів зсуву шарів, які входять до складу пакета, та величини, яка характеризує наповнювач, на розподіл напружень у точках верхнього берега тріщини.

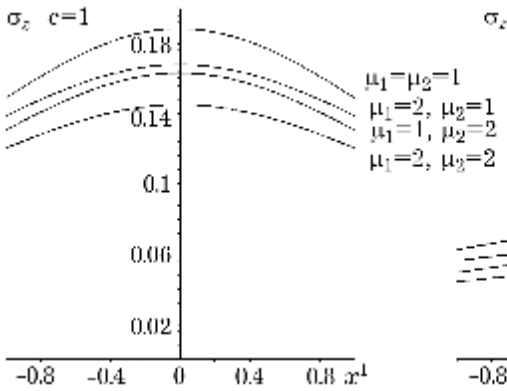

Рис. 2.

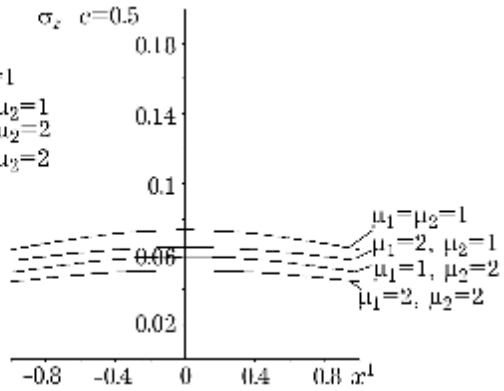

Рис. 3.

Базовим вважатимемо випадок, коли $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$. Отже, зі збільшенням модуля зсуву будь-якої зі смуг пакета, порівняно з базовим випадком, нормальні напруження у точках верхнього берега тріщини зменшуються, а зі збільшенням величини, яка характеризує наповнювач, нормальні напруження в точках верхнеього берега тріщини зростають.

У подальшому плануємо детальніше дослідити вплив геометричних та пружних характеристик смуг пакета та півплощини на розподіл напружень на берегах тріщини.

1. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полуплоскости // Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 86–93.
2. *Антоненко Н. М., Величко І. Г.* Дископодібна щілина на межі шару та півпростору // Динамические системы. – 2010. – Вып. 28. – С. 11–22.
3. *Величко И. Г.* Матричный формализм метода функций податливости // Вестник Днепропетр. ун-та. Механика. – 2000. – Вып. 3, **2**. – С. 12–19.
4. *Величко І. Г., Ткаченко І. Г.* Плоска термопружна деформація багатошарової основи // Там же. – 2004. – Вип. 8, **1**, № 6. – .С. 154–161.
5. *Гузь А. Н.* О физически некорректных результатах механики разрушения // Прикл. механика. – 2009. – **44**, № 10. – С. 4–21.
6. *Гузь А. Н.* Механика движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями (обзор) // Там же. – 2011. – **47**, № 2. – С. 3–75.
7. Лифанов *И. К.* Особые интегральные уравнения и методы их численного решения – М.: МАКС-Пресс, 2006. – 68с.
8. *Панасюк В. В., Андрейкив О. Е., Стадник М. М.* Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 637–640.
9. *Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включеними. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
10. *Силованюк В. П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: НАН України. ФМІ ім. Г.В. Карпенка, 2000. – 300 с.
11. *Силованюк В. П., Юхим Р. Я.* Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 31–35.
12. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

13. *Юхим Р., Горбач П.* Міцність пружно-пластичних тіл із періодичними системами паралельних та колінеарних включень // Вісник Терноп. держ. техн. ун-ту. – 2010. – **15**, № 2. – С. 67–72.

14. *Xuan F.-Z., Wang Z.-F., Tu S.-T.* Creep finite element simulation of multilayered system with interfacial cracks // Materials & Design – 2009. – **30**, № 3. – P. 563–569.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА С НАПОЛНИТЕЛЕМ НА ГРАНИЦЕ МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА И ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрена плоская деформация многослойного пакета, сцепленного с полуплоскостью, при наличии трещины нормального отрыва с наполнителем на их общей границе. Для решения задачи использовано преобразование Фурье и метод функций податливости. Получено интегро-дифференциальное уравнение задачи и предложен способ его численного решения. Проанализировано влияние модулей сдвига слоев двухслойного пакета и наполнителя на распределение нормальных напряжений в точках верхнего берега трещины.

THE MODELING OF THE BOUND-FAILURE CRACK WITH FILLER ON THE BODER OF THE MULTILAYER PACKAGE AND THE HALF-PLANE

The plane deformation of a multilayer package couple with a half-plane with a bound-failure crack with filler on their common border have been considered. The Fourier transform and the method of the compliance functions have been used. The integro-differential equation of the problem have been obtained and the method of its numerical solution have been proposed. The influence of the shear modules of layers of the two-layer package and the filler on the distribution of the normal stresses at the points of the upper edges of the crack have been analyzed.

Запорізький нац. ун-т, Запоріжжя

Одержано
03.06.2011