

ВПЛИВ ІНЕРЦІЇ НОРМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА НА ОСНОВНУ ВЛАСНУ ЧАСТОТУ ПОДАТЛИВОЇ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО ЗСУВУ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНИ

Розглянуто математичну модель процесу вільних лінійних коливань податливих до трансверсального зсуву ортотропних прямокутних пластин, що враховує інерцію нормального елемента в тангенціальних напрямках. Для трансверсально-ізотропної квадратної пластини з шарнірно закріпленими краями отримано аналітичний вираз для основної власної частоти. Показано, що в реальному діапазоні зміни пружних характеристик вплив інерції нормального елемента на її значення несуттєвий порівняно із результатами за раніше запропонованим спрощеним варіантом уточненої теорії.

Вступ. Однією з основних характеристик динамічних систем, зокрема пластин, є спектр їх власних частот. Щоб запобігти резонансним явищам внаслідок циклічних експлуатаційних навантажень, необхідно на стадії проектування вміти розраховувати основну частоту пластинчатих елементів. Сьогодні існує багато різноманітних теорій динамічного деформування пластин, детальний огляд яких наведений у праці [4]. Однак далеко не всі вони беруть до уваги одну із основних характеристик особливостей деформування композитів – податливість до трансверсального зсуву [1]. Структура системи диференціальних рівнянь руху теорій, що враховують цю особливість, на відміну від класичної теорії [3, 5–7], не дає можливості записати розв'язки відповідних початково-крайових задач в аналітичному вигляді. Тому є потреба в певних спрощених рівняннях, щоб усунути цей недолік, і водночас в достатній мірі врахувати податливість до трансверсального зсуву. Для одновимірного випадку така процедура пророблена в [2]. Нижче ідею поширено на двовимірний випадок для квадратної композитної пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо квадратну трансверсально-ізотропну композитну пластину сталюї товщини $2h$ розміром сторони a з приведеними за товщиною пружними характеристиками та густиною ρ . Серединну її площину віднесемо до декартової системи координат $x_1 0 x_2$ з початком у лівому нижньому куті зайнятого нею квадрата. Математична модель, яка описує вільні лінійні поперечні коливання такої пластини за уточненою теорією, що враховує податливість матеріалу до трансверсального зсуву [2], включає:

– рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 &= \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 &= \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

– співвідношення пружності між узагальненими зусиллями та компонентами тензора деформацій серединної площини пластини

$$\begin{aligned} M_1 &= D(e_1 + \nu e_2), \quad M_2 = D(e_2 + \nu e_1), \\ H &= 2D_{12} e_{12}, \quad Q_i = 2\Lambda e_{i3}, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (2)$$

– деформаційні співвідношення між компонентами тензора деформації серединної площини пластини та узагальненими переміщеннями

$$e_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}, \quad 2e_{i3} = \gamma_i + \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$2e_{i2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2}. \quad (3)$$

У формулах (1)–(3) використані загальноприйняті позначення для згинних моментів M_i та моменту закруту H , перерізувальних Q_i зусиль, кутів повороту γ_i нормального до серединної площини перед деформуванням елемента, переміщень точок серединної площини вздовж нормальної координати w , згинних деформацій e_i , деформації трансверсального зсуву e_{i3} та закруту e_{i2} , а також для жорсткісних характеристик пластини: згинної $D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$, зсувної $\Lambda = 2k'hG'$ і жорсткості на закрут $D_{12} = Eh^3 / 3(1 + \nu)$, модуля Юнга E та коефіцієнта Пуассона ν у серединній та еквідистантних її площинах, модуля трансверсального зсуву G' і коефіцієнта зсуву $k' = 5/6$.

Наслідком підстановки співвідношень (3) в (2), а результату – в (1) є рівняння руху в узагальнених переміщеннях

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \kappa^2 \gamma_1 - \kappa^2 \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2^2} - \kappa^2 \gamma_2 - \kappa^2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \Delta w = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4)$$

де $c_1 = \sqrt{E / \rho(1 - \nu^2)}$, $c_2 = \sqrt{k'G' / \rho}$ – швидкості поширення поздовжніх та зсувних хвиль; $\kappa^2 = \Lambda / D$; Δ – оператор Лапласа.

Для однозначного розв'язання системи рівнянь (4) необхідно додати крайові умови на межі $x_i = 0; a$, $i = 1, 2$, та початкові в момент часу $t = t_0$.

Для шарнірного закріплення пластини вздовж усіх сторін крайові умови записуємо так:

$$w(x_1, x_2, t) \Big|_{x_1=0; a} = w(x_1, x_2, t) \Big|_{x_2=0; a} = 0,$$

$$M_1(x_1, x_2, t) \Big|_{x_1=0; a} = M_2(x_1, x_2, t) \Big|_{x_2=0; a} = 0,$$

$$\gamma_1(x_1, x_2, t) \Big|_{x_2=0; a} = \gamma_2(x_1, x_2, t) \Big|_{x_1=0; a} = 0. \quad (5)$$

Початкові умови за необхідності визначення амплітуди поперечних коливань точок серединної площини пластини та амплітуд нахилу вздовж тангенціальних осей координат нормального до серединної площини перед деформуванням елемента подамо у вигляді

$$w(x_1, x_2, t_0) = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x_1, x_2, t_0) = w_1(x_1, x_2)$$

$$\gamma_i(x_1, x_2, t_0) = \gamma_i^0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial}{\partial t} \gamma_i(x_1, x_2, t_0) = \gamma_i^1(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

де w_0 – задана форма зігнутої серединної площини пластини, а w_1 – вертикальна швидкість її точок у момент $t = t_0$; γ_i^0 – кути нахилу нормального елемента вздовж осей x_i , а γ_i^1 – швидкості нахилу в початковий момент часу $t = t_0$, що відповідають заданій функції прогину w_0 .

Побудова розв'язку. Для відшукування спектра частот вільних лінійних поперечних коливань вказаної квадратної пластини невідомі функції в (4) вибираємо так, щоб задовольнялись крайові умови (5):

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}(t) \sin \mu_m x_1 \sin \mu_n x_2, \\ \gamma_1(x_1, x_2, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_1^{mn}(t) \cos \mu_m x_1 \sin \mu_n x_2, \\ \gamma_2(x_1, x_2, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_2^{mn}(t) \sin \mu_m x_1 \cos \mu_n x_2, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\mu_k = (k+1)\pi/a$, $k = n, m$.

Після підстановки (7) в (4) та застосування методу Бубнова–Гальоркіна за змінними x_1 та x_2 при поданій у (7) системі координатних функцій для визначення $w_{mn}(t)$, $\gamma_i^{mn}(t)$, $i=1,2$, отримаємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Ця система через взаємну ортогональність координатних функцій та їх перших і других похідних складається з незалежних підсистем по три рівняння. Зокрема, при $m=n=0$ така підсистема має вигляд

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{3-\nu}{2} + \kappa^2 \right] \gamma_1^{00}(t) + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{1+\nu}{2} \gamma_2^{00}(t) + \frac{\pi}{a} \kappa^2 w_{00}(t) &= -\frac{1}{c_1^2} \ddot{\gamma}_1^{00}(t), \\ \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{1+\nu}{2} \gamma_1^{00}(t) + \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{3-\nu}{2} + \kappa^2 \right] \gamma_2^{00}(t) + \frac{\pi}{a} \kappa^2 w_{00}(t) &= -\frac{1}{c_1^2} \ddot{\gamma}_2^{00}(t), \\ \frac{\pi}{a} [\gamma_1^{00}(t) + \gamma_2^{00}(t)] + 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 w_{00}(t) &= -\frac{1}{c_2^2} \ddot{w}_{00}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

де крапка над позначеннями функцій означає похідну за часовою координатою.

Якщо шукані функції $w_{00}(t)$, $\gamma_i^{00}(t)$, $i=1,2$, подати у вигляді

$$w_{00}(t) = w e^{i\omega t}, \quad \gamma_i^{00}(t) = \gamma_i e^{i\omega t}, \quad i=1,2,$$

то для визначення коефіцієнтів w , γ_i , $i=1,2$ отримаємо систему трьох лінійних однорідних алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{3-\nu}{2} + \alpha^2 \right] \gamma_1 + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \gamma_2 + \frac{\pi}{a} \kappa^2 w &= 0, \\ \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{1+\nu}{2} \gamma_1 + \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{3-\nu}{2} + \alpha^2 \right] \gamma_2 + \frac{\pi}{a} \kappa^2 w &= 0, \\ \frac{\pi}{a} [\gamma_1 + \gamma_2] + 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 w - \frac{\omega}{c_2^2} w &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\alpha^2 = \kappa^2 - \omega^2 / c_1^2$.

З умови існування нетривіального розв'язку системи (9) дістанемо рівняння

$$\omega^2 - 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 c_2^2 + 2 \frac{\kappa^2}{\beta^2 + 2} c_2^2 = 0. \quad (10)$$

Тут

$$\beta^2 = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \alpha^2. \quad (11)$$

Ввівши до розгляду величину $\mu^2 = \beta^2 + 2$, для основної частоти $\omega = \omega_{00}$ отримаємо вираз

$$\omega^2 = 4 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 c_2^2 \frac{1}{\mu^2 + c_{21}^2}, \quad c_{21}^2 = c_2^2 / c_1^2. \quad (12)$$

Для знаходження величини μ^2 із (11) з урахуванням (12) маємо рівняння

$$\mu^4 - (2 + \kappa_1^2 - 2c_{21}^2)\mu^2 - 2\kappa_1^2 c_{21}^2 = 0, \quad \kappa_1^2 = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \kappa^2. \quad (13)$$

Завжди додатний розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$\mu^2 = 1 + \kappa_1^2 / 2 - c_{21}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{(2 + \kappa_1^2 - 2c_{21}^2) + 8c_{21}^2 \kappa_1^2}. \quad (14)$$

Ввівши до розгляду безрозмірну величину $\bar{\omega}$, пов'язану з ω співвідношенням

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} a,$$

і знайшовши значення виразу $\mu^2 + c_{21}^2$ із (12), отримаємо:

$$\bar{\omega}_{in} = 2\pi^2 (h / a) \frac{1}{\delta_2}, \quad (15)$$

де

$$\delta_2^2 = (\delta^2 / 2) + \beta_1^2 + \frac{1}{2} \sqrt{[2\beta_1^2 + \delta^2(1 - 2c_{21}^2)]^2 + 8c_{21}^2 \delta^2},$$

$$\delta^2 = 3(1 - \nu^2), \quad \beta_1^2 = \pi^2 (h / a)^2 (E / G') / k'.$$

Очевидно, що при $c_{21}^2 \rightarrow 0$ дістанемо вираз для спрощеного варіанта уточненої теорії, тобто за нехтування інерцією нормального до серединної площини перед деформуванням елемента:

$$\lim_{c_{21}^2 \rightarrow 0} \bar{\omega} = \bar{\omega}_{yc} = 2\pi^2 (h / a) \frac{1}{\delta_1},$$

$$\delta_1^2 = \delta^2 + 2\beta_1^2. \quad (16)$$

Якщо матеріал пластини неподатливий до трансверсального зсуву, тобто $E / G' = 0$, то

$$\bar{\omega} = 2\pi^2 (h / a)^2 \frac{1}{\delta} = \bar{\omega}_{\kappa\lambda}, \quad (17)$$

що збігається з виразом для частоти, визначеним за класичною теорією пластин.

Аналіз числових результатів. Числові розрахунки виконані для квадратної пластини при $\nu = 0,25$ за різних значень параметра тонкостінності $\varepsilon = 2h / a$. Табл. 1 відповідає $\varepsilon = 0,01$ – досить тонка пластина; табл. 2 – $\varepsilon = 0,05$ – тонка пластина, а табл. 3 – $\varepsilon = 0,1$ – пластина середньої товщини. У першому рядку таблиць наведені результати, обчислені за формулою (17), які не залежать від параметра податливості до трансверсального зсуву E / G' . Другий рядок містить результати, обчислені за формулою (16), а третій – за (15). Зі зниженням опору до трансверсального зсуву для всіх розглянутих товщин квадратної пластини зменшується жорсткість пластини та знижуються значення її основної власної частоти.

У четвертому рядку наведена величина $e = |\bar{\omega}_{yc} - \bar{\omega}_{in}| \cdot 100\% / \bar{\omega}_{yc}$, яка від параметра E / G' практично не залежить.

Таблиця 1

 $\varepsilon = 0,01$

E / G' $\bar{\omega}$	0	$2(1 + \nu)$	5	10	40	100
$\bar{\omega}_{кл}$	0,058851	0,058851	0,058851	0,058851	0,058851	0,058851
$\bar{\omega}_{yc}$	0,058851	0,058835	0,05882	0,058789	0,058605	0,058241
$\bar{\omega}_{ин}$	0,05885	0,058838	0,058822	0,058791	0,058606	0,058243
$e, \%$	0,003562	0,003549	0,003568	0,003574	0,003638	0,003666

Таблиця 2

 $\varepsilon = 0,05$

E / G' $\bar{\omega}$	0	$2(1 + \nu)$	5	10	40	100
$\bar{\omega}_{кл}$	0,294255	0,294255	0,294255	0,294255	0,294255	0,294255
$\bar{\omega}_{yc}$	0,294255	0,292337	0,290457	0,2868	0,267443	0,238172
$\bar{\omega}_{ин}$	0,294512	0,292598	0,290721	0,287072	0,267722	0,238429
$e, \%$	0,087465	0,089179	0,090899	0,093654	0,104196	0,107513

Таблиця 3

 $\varepsilon = 0,1$

E / G' $\bar{\omega}$	0	$2(1 + \nu)$	5	10	40	100
$\bar{\omega}_{кл}$	0,588095	0,588095	0,588095	0,588095	0,588095	0,588095
$\bar{\omega}_{yc}$	0,588095	0,573606	0,55978	0,534887	0,433595	0,333954
$\bar{\omega}_{ин}$	0,59045	0,57565	0,561898	0,537055	0,435364	0,334977
$e, \%$	0,40045	0,356389	0,378262	0,405389	0,407982	0,306402

Висновки. З аналізу результатів розрахунку основної частоти трансверсально-ізотропної квадратної пластини можна зробити висновок про незначний вплив (у межах 0,5 %) інерції нормального до серединної площини перед деформуванням елемента на її динамічний напружено-деформований стан. Тобто з достатньою точністю можна досліджувати динамічну поведінку податливих до трансверсального зсуву квадратних композитних пластин, що знаходяться під дією нормальних навантажень, використовуючи спрощений варіант уточненої теорії.

У подальшому аналогічні дослідження доцільно виконати для випадку ортотропії пружних характеристик і різних умов закріплення країв пластини.

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
2. Осадчук В. А., Марчук М. В. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.

3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
4. Batista M. Analytical Solution for Free Vibrations of Simply Supported Transversally Inextensible Homogeneous Rectangular Plate // [arXiv:1007.2539v2](https://arxiv.org/abs/1007.2539v2) [physics.gen-ph]. – 2010.
5. Huang M.H. and Thambiratnam D.P. Free Vibration Analysis of Rectangular Plates on Elastic Intermediate Supports // J. of Sound and Vibration. – 2001. – **240**(3). – P. 567–580.
6. Nikkhah-Bahrami M., Loghmani M., and Pooyanfar M. Analytical Solution for Free Vibration of Rectangular Kirchhoff Plate from Wave Approach // World Academy of Science, Engineering and Technology 39 2008. – P. 221–223.
7. Wu J.H., Liu A.Q., and Chen H.L. Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions // J. of Applied Mechanics. – 2007. – **74**. – P. 1247–1251.

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ НОРМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НА ОСНОВНУЮ СОБСТВЕННУЮ ЧАСТОТУ ПОДАТЛИВОЙ К ТРАНСВЕРСАЛЬНОМУ СДВИГУ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрена математическая модель процесса свободных линейных колебаний податливых к трансверсальному сдвигу ортотропных прямоугольных пластин, учитывающая инерцию нормального элемента в тангенциальных направлениях. Для трансверсально-изотропной квадратной пластины с шарнирно закрепленными краями получено аналитическое выражение для основной собственной частоты. Показано, что в реальном диапазоне изменения упругих характеристик влияние инерции нормального элемента на ее значение незначительно по сравнению с результатами за ранее предложенным вариантом уточненной теории.

INFLUENCE OF INERTIA OF NORMAL ELEMENT ON BASIC NATURAL FREQUENCY SQUARE PLATE PLIABLE TO TRANSVERSAL SHEAR

A mathematical model of free linear oscillations process of orthotropic rectangular plates pliable to transversal shear, taking into account the inertia of a normal element in the tangential directions is considered. For the case of transversally isotropic square plate with hinged fixed edges the analytical expression for the basic natural frequency is obtained. It is shown that in the real range of variations of elastic characteristics the influence of inertia of normal element on its magnitude is negligible in comparison with the results of previously proposed simplified version of refined theory.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
27.09.11

²Тернопільський нац. економічний ун-т, Тернопіль