УДК 539.3

В. В. Матус, Я. І. Кунець

РОЗСІЯННЯ ЗГИННИХ ХВИЛЬ НАСКРІЗНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ У ПІВОБМЕЖНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ

Метод нульового поля узагальнено на задачу розсіяння згинних хвиль наскрізною нерухомою абсолютно жорсткою неоднорідністю неканонічної форми, що міститься у півобмеженій тонкій пластині, лицеві поверхні якої вільні від напружень. Згинні коливання пластини описано в межах гіпотез Кірхгофа.

Задачі розсіяння згинних хвиль у тонких пружних пластинах розглядали, в основному, для розсіювачів канонічної форми (див. огляди літератури в [1, 9]). При цьому практично важливі аспекти впливу обмеженості пластини на розподіл хвильових полів у ній вивчали лише в окремих випадках [3, 5]. Слід згадати також праці [4, 6], в яких отримано функції Гріна для згинних коливань півобмежених пластин за різних умов закріплення їх країв.

Ефективним інструментом дослідження хвильових полів у пружних тілах з неоднорідностями неканонічної форми є метод нульового поля (МНП), започаткований Уотерманом під час вивчення задач розсіяння електромагнітних та акустичних хвиль [10]. Упродовж останніх років його дедалі частіше використовують для розробки та вдосконалення сучасних методів неруйнівного контролю міцності пружних елементів конструкцій [7, 9]. В [2, 8] МНП вивчали згинні коливання (у межах гіпотез Кірхгофа) тонких необмежених пластин, що містять отвори чи жорсткі включення неканонічної форми. Нижче підхід, започаткований у цих працях, поширено на вивчення розсіяння згинних хвиль жорстким наскрізним включенням у півобмеженій тонкій пружній пластині.

Формулювання задачі. Нехай у півобмеженій тонкій пластині, рух якої описують на основі гіпотез Кірхгофа, міститься наскрізне абсолютно жорстке включення неканонічної форми, серединна поверхня якого займає двовимірну опуклу область S_0. За усталених коливань повний прогин пластини $w(\mathbf{x})$ задовольняє рівняння руху [1] та граничні умови на контурі $C = \partial S_0$:

$$\Delta^2 w(\mathbf{x}) - k^4 w(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in S; \tag{1}$$

$$S = R_+^2 \setminus S_0, \quad R_+^2 = \{(x_1, x_2) : |x_1| < \infty,\ x_2 \ge -H\};$$

$$w(\mathbf{x}) = 0, \qquad \gamma(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in C, \tag{2}$$

де $\gamma(\mathbf{x})$ – кут повороту нормального елемента пластини; S – серединна поверхня пластини; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати з початком всередині включення; $k = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$ – хвильове число згинних хвиль; $D = Eh^3 12^{-1}(1-\nu^2)^{-1}$ – циліндрична жорсткість пластини; ρ, E, ν і h – густина, модуль Юнґа, коефіцієнт Пуассона і товщина пластини; ω – кругова частота коливань.

Надалі розглядаємо випадки, коли край пластини вільно опертий (умова (3)) або шарнірно-рухомо закріплений (умова (4)) [6]:

$$w(\mathbf{x}) = 0, \quad M(\mathbf{x}) = 0, \quad |x_1| < \infty, \quad x_2 = -H; \tag{3}$$

$$\gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0, \quad |x_1| < \infty, \quad x_2 = -H, \tag{4}$$

де M та V − згинний момент та узагальнена перерізальна сила [1, 6].

На включення набігає плоска хвиля згину

$$w^{in}(\mathbf{x}) = A_0 \exp(ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{l}), \quad \mathbf{l} = (-\cos\theta_{in}, -\sin\theta_{in}), \quad 0 \le \theta_{in} \le \pi. \tag{5}$$

Тоді повний прогин пластини

$$w(\mathbf{x}) = w^{in}(\mathbf{x}) + w^{r}(\mathbf{x}) + w^{sc}(\mathbf{x});$$

$$w^{r}(\mathbf{x}) = (-1)^{\alpha} A_0 \exp\left[-ik(x_1\cos\theta_{in} + (2H - x_2)\sin\theta_{in})\right], \quad \alpha = 1, 2, \tag{6}$$

де A_0, $\mathbf{l}$ і θ_{in} − амплітуда, напрям і кут падіння зондувальної хвилі; $\alpha = 1$ та $\alpha = 2$ − для умов (3) та (4); $w^{r}(\mathbf{x})$ − плоска хвиля, відбита від краю пластини без включення; компонента $w^{sc}(\mathbf{x})$ враховує неоднорідність і задовольняє умову випромінювання на безмежності [4]

$$w^{sc}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2r/a}} e^{i(kr-\pi/4)} f(\theta) + o(1/\sqrt{r}), \quad r \to \infty; \tag{7}$$

$$x_1 = r\cos\theta, \; x_2 = r\sin\theta, \; 0 \le \theta \le 2\pi,$$

де $f(\theta)$ − комплексна амплітуда розсіяння згинних хвиль; (r,θ) − полярні координати; a − характерний розмір включення.

Інтегральне подання розв'язку задачі та рівняння нульового поля. Використовуючи теорему взаємності [2, 8], для прогину пластини отримуємо інтегральне зображення

$$\left.\begin{cases} w(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S \\ 0, & \mathbf{x} \in S_0 \end{cases}\right\} = w^{in}(\mathbf{x}) + w^{r}(\mathbf{x}) +$$

$$+\int_C \left[M(\mathbf{x}_0)\gamma^G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x}_0)G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\right] dC_{\mathbf{x}_0}; \quad \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}), \tag{8}$$

де $G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ − функція Гріна для півобмеженої пластини; $\gamma^G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ − кут повороту, що відповідає прогину $G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$. Для розглянутих тут практично важливих випадків закріплення краю пластини функцію Гріна можна визначити за допомогою методу дзеркального відображення [3, 6]:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) + (-1)^{\alpha} G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}_0^*), \quad \alpha = 1, 2; \tag{9}$$

$$\mathbf{x}_0^* = (x_{10}, -x_{20} - 2H),$$

де $G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – фундаментальний розв'язок рівняння (1) [6].

Для визначення згинного моменту $M(\mathbf{x}_0)$ та узагальненої перерізальної сили $V(\mathbf{x}_0)$ на контурі включення скористаємось підходом, запропонованим раніше [2, 8]. В результаті для функції Гріна отримаємо:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = d\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} \beta_\tau \varepsilon_n \bar{\Phi}_{\tau\sigma n}(\mathbf{x})\left[\Phi_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}_0) +\right.$$

$$\left.+(-1)^{\alpha}\Phi_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}_0^*)\right], \quad |\mathbf{x}| < |\mathbf{x}_0|, \quad \mathbf{x}_0 \in C; \tag{10}$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = d\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} \beta_\tau \varepsilon_n \left[\Phi_{\tau\sigma n}(\mathbf{x})\bar{\Phi}_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}_0) +\right.$$

$$\left.+(-1)^{\alpha}\bar{\Phi}_{\tau\sigma n}(\mathbf{x})\Phi_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}_0^*)\right], \quad r_1 < |\mathbf{x}| < r_2, \quad \mathbf{x}_0 \in C,$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = d\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_\tau\varepsilon_n\Phi_{\tau\sigma n}(\mathbf{x})\Big[\bar{\Phi}_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}_0)+$$

$$+(-1)^{\alpha}\bar{\Phi}_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}_0^*)\Big], \quad |\mathbf{x}| > r_3, \quad \mathbf{x}_0 \in C; \qquad (11)$$

$$\Phi_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}) = \Phi_{\tau n}(r)C_{\sigma n}(\theta), \; \bar{\Phi}_{\tau\sigma n}(\mathbf{x}) = \bar{\Phi}_{\tau n}(r)C_{\sigma n}(\theta);$$

$$\Phi_{\tau n}(r) = \begin{cases} H_n^{(1)}(kr), \; \tau = 1 \\ K_n(kr), \; \tau = 2 \end{cases}, \; \bar{\Phi}_{\tau n}(r) = \begin{cases} J_n(kr), \; \tau = 1 \\ I_n(kr), \; \tau = 2 \end{cases}, \; C_{\sigma n}(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, \; \sigma = 1 \\ \sin n\theta, \; \sigma = 2 \end{cases};$$

$$r_1 = \max_{\mathbf{x}_0\in C}(|\mathbf{x}_0|), \quad r_2 = 2H + \min_{\mathbf{x}_0\in C}(x_{20}), \quad r_3 = 2H + \max_{\mathbf{x}_0\in C}(x_{20}),$$

$$\beta_1 = i\pi, \quad \beta_2 = -2, \quad d = \left(8\pi Dk^2\right)^{-1}, \quad \alpha = 1,2,$$

де $J_n(x)$ та $H_n^{(1)}(x)$ – функції Бесселя та Ганкеля першого роду; $I_n(x)$ та $K_n(x)$ – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду; ε_n – множник Неймана.

Застосувавши теореми додавання [1, 5], для функцій $\Phi_{\tau\sigma m}\left(\mathbf{x}_0^*\right)$ матимемо:

$$\Phi_{\tau\sigma m}\left(\mathbf{x}_0^*\right) = \sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}R_{\tau\sigma m,\tau\sigma' n}\bar{\Phi}_{\tau\sigma' n}(\mathbf{x}_0), \quad \tau = 1,2, \; \sigma = 1,2, \quad m = \overline{0,\infty}; \qquad (12)$$

$$R_{\tau\sigma m,\tau\sigma' n} = r_{1m,\tau\sigma' n}\begin{pmatrix}\cos(3\pi m/2)\\ \sin(3\pi m/2)\end{pmatrix} + r_{2m,\tau\sigma' n}\begin{pmatrix}-\sin(3\pi m/2)\\ \cos(3\pi m/2)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sigma = 1\\ \sigma = 2\end{pmatrix};$$

$$r_{1m,1\sigma' n} = \kappa_n\left[H_{m+n}^{(1)}(2kH) + (-1)^n H_{m-n}^{(1)}(2kH)\right]\begin{pmatrix}\cos(\pi n/2)\\ -\sin(\pi n/2)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sigma' = 1\\ \sigma' = 2\end{pmatrix};$$

$$r_{2m,1\sigma' n} = \kappa_n\left[H_{m+n}^{(1)}(2kH) - (-1)^n H_{m-n}^{(1)}(2kH)\right]\begin{pmatrix}\sin(\pi n/2)\\ \cos(\pi n/2)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sigma' = 1\\ \sigma' = 2\end{pmatrix};$$

$$r_{1m,2\sigma' n} = \kappa_n\left[K_{m+n}(2kH) + K_{m-n}(2kH)\right]\begin{pmatrix}\cos(\pi n/2)\\ -\sin(\pi n/2)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sigma' = 1\\ \sigma' = 2\end{pmatrix};$$

$$r_{2m,2\sigma' n} = \kappa_n\left[K_{m+n}(2kH) - K_{m-n}(2kH)\right]\begin{pmatrix}\sin(\pi n/2)\\ \cos(\pi n/2)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sigma' = 1\\ \sigma' = 2\end{pmatrix};$$

$$\kappa_n = (3 - \varepsilon_n)^{-1}.$$

Враховуючи співвідношення (5), (6), (8)–(10), (12) та результати праць [2, 8], задачу (1)–(4) зводимо до розв'язання рівнянь нульового поля:

$$\int_C \left[\left(\Phi_{\tau\sigma m} + (-1)^{\alpha}\sum_{\sigma',n}R_{\tau\sigma m,\tau\sigma' n}\bar{\Phi}_{\tau\sigma' n}\right)V -\right.$$

$$\left.-\left(\gamma_{\tau\sigma m} + (-1)^{\alpha}\sum_{\sigma',n}R_{\tau\sigma m,1\sigma' n}\bar{\gamma}_{\tau\sigma' n}\right)M\right]dC = D\,a^{-2}\,b_{\tau\sigma m},$$

$$\tau,\sigma = 1,2, \quad m = \overline{0,\infty}; \qquad (13)$$

$$b_{1\sigma m} = 8A_0k^2a^2i^{-m+1}\left[1 - (-1)^{\alpha+\sigma}\exp\left(2ikH\sin\theta_{in}\right)\right]C_{\sigma m}(\theta_{in}),$$

$b_{2\sigma m} = 0$;

$$\gamma_{\tau\sigma m} = \frac{\partial \Phi_{\tau\sigma m}(r,\ \theta)}{\partial n}, \quad \overline{\gamma}_{\tau\sigma m} = \frac{\partial \overline{\Phi}_{\tau\sigma m}(r,\ \theta)}{\partial n},$$

$\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до C.

Числовий алгоритм визначення розсіяних хвильових полів. Подамо невідомі на контурі C функції у вигляді тригонометричних розкладів

$$M = Da^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} x_{1\sigma n} C_{\sigma n}(\theta), \quad V = Da^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} x_{2\sigma n} C_{\sigma n}(\theta) \quad \text{на } C. \tag{14}$$

Підставивши розклади (14) у рівняння нульового поля (13), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь безмежного порядку відносно невідомих коефіцієнтів $x_{\tau\sigma n}$, яку розв'язуємо методом редукції:

$$\sum_{\tau'=1}^{2} \sum_{\sigma'=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{\tau\sigma m,\tau'\sigma' n} + (-1)^{\alpha} \sum_{\sigma''=1}^{2} \sum_{n'=0}^{\infty} R_{\tau\sigma m,\tau\sigma'' n'} \overline{a}_{\tau\sigma'' n',\tau'\sigma' n} \right) x_{\tau'\sigma' n} = b_{\tau\sigma m},$$

$$\tau, \sigma = 1,\ 2; \quad m = \overline{0,\ \infty}, \quad \alpha = 1, 2; \tag{15}$$

$$a_{\tau\sigma m,1\sigma' n} = \int_C \gamma_{\tau\sigma m}(r,\theta) C_{\sigma' n}(\theta) dC,$$

$$a_{\tau\sigma m,2\sigma' n} = -a^{-1} \int_C \Phi_{\tau\sigma m}(r,\theta) C_{\sigma' n}(\theta) dC.$$

Вирази для $\overline{a}_{\tau\sigma m,\tau'\sigma' n}$ отримуємо із $a_{\tau\sigma m,\tau'\sigma' n}$ заміною $\gamma_{\tau\sigma m}$ на $\overline{\gamma}_{\tau\sigma m}$.

Знаючи розв'язок системи (15), на основі співвідношень (8), (11) дістанемо вирази для визначення прогину пластини у різних хвильових зонах:

$$w^{sc}(r,\theta) = \frac{1}{8\pi k^2 a^2} \sum_{\tau,\sigma,m} \sum_{\tau',\sigma',n'} \beta_\tau \varepsilon_m \Big\{ x_{\tau'\sigma' n'} \Big[\Phi_{\tau\sigma m}(r,\theta) \overline{a}_{\tau\sigma m,\tau'\sigma' n'} +$$

$$+ (-1)^{\alpha} \overline{\Phi}_{\tau\sigma m}(r,\theta) \sum_{\sigma'',n''} R_{\tau\sigma m,\tau\sigma'' n''} \overline{a}_{\tau\sigma'' n'',\tau'\sigma' n'} \Big] \Big\}, \quad r_1 < r < r_2;$$

$$w^{sc}(r,\theta) = \frac{1}{8\pi k^2 a^2} \sum_{\tau,\sigma,m} \sum_{\tau',\sigma',n'} \beta_\tau \varepsilon_m \Big\{ x_{\tau'\sigma' n'} \Big[\overline{a}_{\tau\sigma m,\tau'\sigma' n'} +$$

$$+ (-1)^{\alpha} \sum_{\sigma'',n''} \overline{R}_{\tau\sigma m,\tau\sigma'' n''} \overline{a}_{\tau\sigma'' n'',\tau'\sigma' n'} \Big] \Phi_{\tau\sigma m}(r,\theta) \Big\}, \quad r > r_3,$$

де вирази $\overline{R}_{\tau\sigma m,\tau\sigma'' n''}$ отримуємо з відповідних виразів $R_{\tau\sigma m,\tau\sigma'' n''}$ заміною в них функцій $H^{(1)}_{m\pm n}(x)$ та $K_{m\pm n}(x)$ функціями $J_{m\pm n}(x)$ та $(-1)^n I_{m\pm n}(x)$.

У дальній хвильовій зоні (зоні Фраунгофера) для амплітуди розсіяння $f(\theta)$ у співвідношенні (7) маємо:

$$f(\theta) = -\frac{i}{4k^2 a^2 \sqrt{\pi k a}} \sum_{\sigma,m} \sum_{\tau,\sigma',n'} \varepsilon_m i^{-m} x_{\tau\sigma' n'} \Big(\overline{a}_{1\sigma m,\tau\sigma' n'} +$$

$$+ (-1)^{\alpha} \sum_{\sigma'',n''} \overline{R}_{1\sigma m,\tau\sigma'' n''} \overline{a}_{1\sigma'' n'',\tau\sigma' n'} \Big) C_{\sigma m}(\theta).$$

Зазначимо, що розроблений підхід дає можливість також визначати концентрацію напружень в околі включення, контур якого близький до кругового.

Висновок. Метод нульового поля розвинуто для задач розсіяння згинних хвиль наскрізним абсолютно жорстким включенням неканонічної форми, що міститься у півобмеженій тонкій пластині Кірхгофа. Отриманий числово-аналітичний алгоритм дає можливість ефективно аналізувати розсіяні хвильові поля, зокрема, в дальній зоні Фраунгофера. Запропонований підхід можна також застосувати, коли розсіювачем згинних хвиль є отвір неканонічної форми за різних умов закріплення країв пластини.

Роботу частково підтримав ДФФД України (проект Ф40.1/018).

1. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 307 с.
2. *Матус В. В.* Матриця розсіяння для хвиль згину у тонкій пластині // Доп. НАН України. – 2009. – № 6. – С. 73–78.
3. *Chan K. L., Smith B., Wester E.* Flexural wave scattering in a quarter-infinite thin plate with circular scatterers // Int. J. of Solids and Struct. – 2009. – **46.** – P. 3669–3676.
4. *Evans D. V., Porter R.* Flexural waves on a pinned semi-infinite thin elastic plate // Wave Motion. – 2008. – **45.** – P. 745–757.
5. *Fang X.-Q., Wang X.-H.* Multiple scattering of flexural waves from a cylindrical inclusion in a semi-infinite thin plate // J. of Sound and Vibration. – 2009. – **320**, № 4–5. – P. 878–892.
6. *Gunda R., Vijayakar S. M, Singh R., Farstad J. E.* Harmonic Green's functions of a semi-infinite plate with clamped or free edges // J. Acoust. Soc. Am. – 1998. – **103.** – P. 888–899.
7. *Lee W.M., Chen J.T.* Scattering of flexural wave in a thin plate with multiple circular inclusions by using the null-field integral equation approach // J. of Sound and Vibration. – 2010. – **329**, № 8. – P. 1042–1061.
8. *Matus V. V., Emets V. F.* T-matrix method formulation applied to the study of flexural waves scattering from a through obstacle in a plate // Ibid. – 2010. – **329**, № 14. – P. 2843–2850.
9. *Parnell W. J., Martin P. A.* Multiple scattering of flexural waves by random configurations of inclusions in thin plates // Wave Motion. – 2011. – **48**. – P. 161–175.
10. *Waterman P. C.* New formulation of acoustic scattering // J. Acoust. Soc. Amer. – 1968. – **45**, № 6. – P. 1417–1429.

РАССЕЯНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН СКВОЗНЫМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ

Метод нулевого поля обобщен для задачи рассеяния изгибных волн сквозным неподвижным абсолютно жёстким включением неканонической формы, содержащимся в полуограниченной тонкой пластине, лицевые поверхности которой свободны от напряжений. Изгибные колебания пластины описаны согласно гипотезам Кирхгофа.

SCATTERING OF FLEXURAL WAVES BY THROUGH RIGID INCLUSION IN SEMI-INFINITE THIN PLATE

The null-field method has been generalized on the problem of flexural waves scattering by a through unmoving rigid inclusion of non-classical form in a semi-infinite thin plate. The face surfaces of the plate are stress-free. Flexural vibrations of the plate are described according to the Kirchhoff's plate theory.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.06.11