

ПРИНЦИП ГАССЕ ДЛЯ МНОГОВИДІВ СЕВЕРІ-БРАУЕРА НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Доведено, що принцип Гассе виконується для многовидів Севері-Брауера над псевдоглобальними полями. Доведення ґрунтується на локально-глобальному принципі для групи Брауера псевдоглобального поля

Мета дослідження – показати, що для многовидів Севері-Брауера над псевдоглобальними полями виконується принцип Гассе. Доведення цього факту випливає з локально-глобального принципу для групи Брауера псевдоглобального поля, який отримують як наслідок з основної точної послідовності теорії полів класів псевдоглобального поля. Доведення принципу Гассе для многовидів Севері-Брауера над глобальними полями наведене раніше [2], і його можна застосувати і для псевдоглобального основного поля.

Нехай X – повна гладка крива над квазіскінченним полем (k, σ) , і нехай $K = k(X)$. Множину замкнених точок X позначимо як X^0 (тому X^0 пропускає лише загальну точку X). Кожній точці $v \in X^0$ відповідає нормування v поля K . Нехай K_v – поповнення поля K відносно v і R_v – кільце цілих поля K_v . Поле лишків $k(v)$ є квазіскінченним степеня $\deg(v)$ над k з $\sigma^{\deg(v)}$ як твірний елемент групи $\text{Gal}(k(v)^s/k(v))$. Нехай a_v – образ елемента $a \in \text{Br}(K)$ у $\text{Br}(K_v)$, і означимо $\text{inv}_K : \text{Br}(K) \rightarrow \square/\square$ як $a \mapsto \sum_v \text{inv}_v(a_v)$, де $\text{inv}_v = \text{inv}_{K_v}$. Нехай $\bar{X} \stackrel{\text{df}}{=} X \otimes_k k^s$ – крива X , розглянута над k^s , і нехай $\bar{K} = k^s(\bar{X})$ – її поле функцій. Позначимо через Jac_X Якобіан X .

Для повноти викладу почнемо з точної послідовності, розглянутої Дж. Мілном [6], з якої випливає можливість побудови аналога глобальної теорії класів для поля алгебричних функцій від однієї змінної над псевдоскінченним [1] полем констант.

Теорема [6]. *Нехай K – поле алгебричних функцій від однієї змінної над квазіскінченним [1] полем констант. Існує точна послідовність*

$$0 \rightarrow H^1(G_k, \text{Jac}_X(k^s)) \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{v \in X^0} \text{Br}(K_v) \xrightarrow{\text{inv}_K} \square/\square \rightarrow 0. \quad (1)$$

Для повноти викладу відтворимо доведення з праці [6]. Використаємо точну послідовність G_k -модулів:

$$0 \rightarrow k^{s*} \rightarrow \bar{K}^* \rightarrow \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0, \quad (2)$$

де $\text{Div}(\bar{X}) = \bigoplus_{v \in X^0} \square$ – група дивізорів (Вейля) на X . З когомологічної послідовності її відрізка

$$0 \rightarrow k^{s*} \rightarrow \bar{K}^* \rightarrow Q \rightarrow 0$$

отримуємо ізоморфізм $H^2(G_k, \bar{K}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(G_k, Q)$. Зауважимо, що

$$H^2(G_k, \bar{K}^*) = \text{Ker}(\text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(\bar{K})),$$

і нагадаємо, що теорема Тзена [7] стверджує, що $\text{Br}(K) = 0$, і тому

$$H^2(G_k, Q) = H^2(G_k, \bar{K}^*) = \text{Br}(K).$$

Когомологічною послідовністю іншого сегмента

$$0 \rightarrow Q \rightarrow \text{Div}(\bar{X}) \rightarrow \text{Pic}(\bar{X}) \rightarrow 0$$

послідовності (2) є

$$\begin{aligned} H^1(G_k, \text{Div}(\bar{X})) &\rightarrow H^1(G_k, \text{Pic}(\bar{X})) \rightarrow H^2(G_k, Q) \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(G_k, \text{Div}(\bar{X})) \rightarrow H^2(G_k, \text{Pic}(\bar{X})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Але $H^r(G_k, \text{Div}(\bar{X})) = \bigoplus_{v \in X^0} H^r(G_k, D_v)$, де $D_v = \bigoplus_{w \mapsto v}^{\text{df}} \square$ — G_k -модуль, індукований тривіальним $G_k(v)$ -модулем $\square$, і тому

$$H^r(G_k, \text{Div}(\bar{X})) = \bigoplus_{v \in X^0} H^r(\text{Gal}(k^s / k(v)), \square).$$

Зокрема, $H^1(G_k, \text{Div}(\bar{X})) = 0$ і $H^2(G_k, \text{Div}(\bar{X})) = \bigoplus_{v \in X^0} \Xi(G_{k(v)})$, де $\Xi(G_{k(v)})$ — група характерів групи $G_{k(v)}$.

З означення Jac_X отримуємо точну послідовність

$$0 \rightarrow \text{Jac}_X(k^s) \rightarrow \text{Pic}(\bar{X}) \rightarrow \square \rightarrow 0.$$

Оскільки група $\text{Jac}_X(k^s)$ подільна [5] і k має когомологічну розмірність 1, $H^2(G_k, \text{Jac}_X(k^s)) = 0$, то $H^2(G_k, \text{Pic}(\bar{X})) = H^2(G_k, Z) = \Xi(G_k)$. За цими результатами можна ототожнити наступну послідовність з шуканою:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & H^1(G_k, \text{Pic}(\bar{X})) & \rightarrow & H^2(G_k, Q) & \rightarrow & H^2(G_k, \text{Div}(\bar{X})) & \rightarrow & H^2(G_k, \text{Pic}(\bar{X})) & \rightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & H^1(G_k, \text{Jac}_X) & \rightarrow & \text{Br}(K) & \rightarrow & \bigoplus \Xi(G_{k(v)}) & \xrightarrow{\Sigma} & \Xi(G_k) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Наслідок 1. Якщо K — псевдоглобальне поле, то маємо точну послідовність

$$0 \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{v \in X^0} \text{Br}(K_v) \xrightarrow{\text{inv}_K} \square / \square \rightarrow 0. \quad (3)$$

Доведення. Оскільки кожен абсолютно незвідний многовид над полем k має k -раціональну точку, то в точній послідовності (1) $H^1(G_k, \text{Jac}_X(k^s)) = 0$, тому отримуємо точну послідовність (3).

Твердження 1. Якщо X — многовид Севері-Брауера над полем k , то $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(\bar{X})^{G_k}$ тоді й лише тоді, коли $X(k) \neq \emptyset$.

Доведення. За означенням $\bar{X}$ ізоморфний $\mathbf{P}_k^n$, де $n = \dim X$. Отже, $\text{Pic} \bar{X}$ породжується $\mathcal{O}(1)$, тобто класом гіперплощини в $\mathbf{P}_k^n$. Цей клас, зрозуміло, інваріантний відносно G , але лежить у $\text{Pic} X$ лише, коли $X(k) \neq \emptyset$. Справді, якщо $\mathcal{O}(1) \in \text{Pic} X$, то в цьому класі існує ефективний k -дивізор. Розглянувши n -кратний добуток $\mathcal{O}(1)$, отримаємо 1, а отже, $X(k) \neq \emptyset$ (за рясністю або за дуже загальним результатом Фултона [3]).

Лема. Нехай K — поле, що містить k . Тоді існує комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br} K & \xrightarrow{\psi_K} & \mathrm{Br} X_K \\ \mathrm{res} \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br} k & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Br} X, \end{array}$$

де Res – природний гомоморфізм обмеження, і $X_K = X \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} K$.

Доведення. Це безпосередній наслідок функторіальності $\mathrm{Br}(-)$, оскільки $\mathrm{Br} k = \mathrm{Br}(\mathrm{Spec} k)$.

Твердження 2. Нехай K – скінченне розширення поля k . Припустимо, що $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})^{G_K}$. Тоді $\ker \psi = \mathrm{coker} \beta$ анулюється $d = \deg K / k$.

Доведення. Якщо $b \in \ker \psi$, то $\psi_K \circ \mathrm{Res}(b) = 0$ за лемою. Тепер, оскільки ψ_K ін'єктивне, то $\mathrm{Res}(b) = 0$ і, за кообмеженням, $db = \mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res}(b) = 0$.

Наслідок 2. $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})^{G_K}$ тоді й лише тоді, коли існує k -раціональний 0-цикл степеня 1 на X .

Доведення. Якщо існує k -раціональний 0-цикл степеня 1 на X , то X містить точки у деяких скінченних розширеннях K/k взаємно простих степенів. Отже, за наслідком 1.3 з праці [2] і твердженням 5, $\ker \psi$ анулюється домноженням на 1.

Означення. Нехай k – глобальне або псевдоглобальне поле. Означимо

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})_{\mathrm{loc}}^{G_k} \Leftrightarrow \mathrm{Pic}(X_{k_v}) = \mathrm{Pic}(\bar{X}_{k_v})^{G_{k_v}}$$

для кожного поповнення k_v поля k .

Твердження 3. Якщо k – псевдоглобальне поле, то

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})_{\mathrm{loc}}^{G_k} \Rightarrow \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})^{G_k}.$$

Доведення. За наслідком 1 природне відображення

$$i : \mathrm{Br} k \rightarrow \bigoplus \mathrm{Br} k_v \subset \prod \mathrm{Br} k_v$$

ін'єктивне. Тепер припустимо $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})_{\mathrm{loc}}^{G_k}$. Тоді, застосовуючи лему з $K = k_v$ і переходячи до прямого добутку, отримуємо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & \prod \mathrm{Br} k_v & \rightarrow & \prod \mathrm{Br} X_{k_v} \\ & & i \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathrm{Br} k & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Br} X. \end{array}$$

Таким чином, ψ ін'єктивне.

Позначення. Якщо k глобальне або псевдоглобальне поле, позначимо $P_{\mathrm{loc}}(X, k) \Leftrightarrow X(k_v) \neq \emptyset$ для кожного поповнення k_v поля k . Враховуючи Наслідок 1.3 з [2], отримуємо:

Наслідок 3. Якщо k – псевдоглобальне поле, то

$$P_{\mathrm{loc}} \Rightarrow \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})^{G_k}.$$

Наслідок 4 (Шатле). Принцип Гассе виконується для многовидів Севері–Брауера над глобальними і псевдоглобальними полями.

Доведення. Це безпосередній наслідок з наслідку 3 і твердження 3.

1. Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math. – 1968. – **88**, № 2. – P. 239–271.

2. *Coray D. and Manoil C.* On large Picard groups and the Hasse Principle for curves and K3 surfaces // *Acta Arithm.* – 1998. – **76**, № 2. – P. 165–189.
3. *Fulton W.* Intersection Theory. – Berlin: Springer, 1984.
4. *Grothendieck A.* Le groupe de Brauer III // *Exemples et compléments* // Mimeographed notes, I.H.E.S, 1966.
5. *Milne J. S.* Abelian varieties // *Arithmetic geometry*. – New York: Springer, 1986. – P. 103–150.
6. *Milne J. S.* Arithmetic Duality theorems // *Perspectives in Mathematics*. – Boston: Academic Press Inc., 1986. – 421 p.
7. *Shatz S. S.* Profinite groups: arithmetic and geometry // *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Tokyo. – 1972. – **X**, № 67. – 252 p.

**ПРИНЦИП ГАССЕ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ СЕВЕРИ-БРАУЭРА НАД
ПСЕВДОГЛОБАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ**

Доказано, что принцип Гассе выполняется для многообразий Севери-Брауэра над псевдоглобальными полями. Доказательство основано на локально-глобальном принципе для группы Брауэра псевдоглобального поля

**HASSE PRINCIPLE FOR SEVERI-BRAUER VARIETIES OVER
PSEUDOGLOBAL FIELDS**

We prove that the Hasse principle holds for Severi-Brauer varieties over pseudoglobal fields. The proof is based on the local-global principle for the Brauer group of a pseudoglobal field.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
08.09.11