УДК 512.628.2

І. О. Мельник

ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНІ МОДУЛІ

Введено поняття диференціально-мультиплікаційного модуля над комутативним диференціальним кільцем. Вивчено приклади та деякі властивості таких модулів. Також досліджено диференціальні мультиплікаційні модулі. Встановлено, що чисті підмодулі мультиплікаційних диференціальних модулів є диференціальні.

Вступ. Розглянуто комутативні кільця з ненульовою одиницею та унітарні модулі над ними.

Мультиплікаційні модулі та ідеали останнім часом інтенсивно досліджували різні автори [4, 6, 7, 9, 11, 14, 15]. Нагадаємо, що R-модуль M називають *мультиплікаційним* [3], якщо будь-який його підмодуль N має вигляд $N = IM$, де I – ідеал кільця R. Ідеал I кільця R називають *мультиплікаційним*, якщо він є мультиплікаційним, як R-модуль [7].

Модуль називають *модулем Безу*, якщо кожний його скінченно породжений підмодуль є циклічним. Модуль є модулем Безу тоді і тільки тоді, коли кожний його двопороджений підмодуль є циклічним. Всі модулі Безу над комутативними кільцями є дистрибутивними модулями: тобто виконується рівність $(X+Y)\cap Z = (X\cap Z)+(Y\cap Z)$ для будь-яких підмодулів X, Y, Z модуля M. Дистрибутивні модулі тісно зв'язані з мультиплікаційними. Наприклад, модуль над комутативним кільцем є дистрибутивним тоді і тільки тоді, коли всі його скінченно породжені підмодулі є мультиплікаційними. Якщо всі двопороджені підмодулі модуля M мультиплікаційні, то модуль M є дистрибутивним [12, 13].

Нехай N і K – підмодулі R-модуля M. Тоді розглядають множину $(N:K)=\{r\in R \mid rK\subseteq N\}$. *Анулятор R-модуля M* – це множина $Ann(M)=(0:M)=\{r\in R \mid rM=0\}$. *Анулятором елемента* $m\in M$ називають множину $Ann(m)=(0:Rm)$. R-модуль M називають *точним*, якщо його анулятор $Ann(M)=0$.

Надалі через R позначатимемо диференціальне кільце з диференціюванням δ, а через M – лівий диференціальний R-модуль з диференціюванням d, яке узгоджене з диференціюванням кільця δ [6, 8].

Для елемента $r\in R$ використовуватимемо такі позначення: $r^{(0)}=r$, $r'=\delta(r)$, $r''=\delta(r')$, $r^{(n)}=\delta\left(r^{(n-1)}\right)$, де $n=0,1,2,3\mathbf{K}$ [5, 6]. Крім того, $r^{(\infty)}=\{r^{(n)} \mid n=0,1,2,3\mathbf{K}\}$, $[r]=\left(r^{(\infty)}\right)=(r,r',r'',\mathbf{K})$.

Так само для $m\in M$: $m^{(0)}=m$, $m'=d(m)$, $m''=d(m')$, $m^{(n)}=d\left(m^{(n-1)}\right)$, $n=0,1,2,3\mathbf{K}$, $m^{(\infty)}=\{m^{(n)} \mid n=0,1,2,3\mathbf{K}\}$, $[m]=\left(m^{(\infty)}\right)=(m,m',m'',\mathbf{K})$.

Про мультиплікаційні диференціальні модулі. Нехай M – мультиплікаційний R-модуль, N – підмодуль в M. Нагадаємо, що підмодуль N R-модуля M називають *ідемпотентним* [1], якщо $N=(N:M)M$. Це поняття введено у статті [2] як узагальнення понять ідемпотентного ідеалу та чистого підмодуля.

Якщо $(N:M)$ – ідемпотентний ідеал, то підмодуль N є ідемпотентним. Якщо M – скінченно породжений точний мультиплікаційний R-модуль, то підмодуль N є ідемпотентним в M тоді і тільки тоді, коли $(N:M)$ є мультиплікаційним ідеалом в R. Також добуток ідемпотентного ідеалу та ідемпотентного підмодуля є ідемпотентним підмодулем, сума ідемпотентних в M підмодулів є ідемпотентним підмодулем в M [2].

Відомо, що кожний ідемпотентний ідеал диференціального кільця є диференціальним. Тепер можна отримати модульний аналог цього результату.

Твердження 1. *Кожний ідемпотентний підмодуль диференціального модуля є диференціальним.*

Доведення. Нехай (M, d) − диференціальний (R, δ)-модуль, N − його ідемпотентний підмодуль. Якщо $x \in N = (N : M)N$, то він є скінченною сумою вигляду $x = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i$, де $r_i \in (N : M)$, $m_i \in N$. Зауважимо, що тоді $r_i M \subseteq N$ для всіх $i = \overline{1, k}$. Отже, $d(x) = \sum_{i=1}^{k} d(r_i m_i) = \sum_{i=1}^{k} (\delta(r_i) m_i + r_i d(m_i)) \in N$.

Підмодуль N R-модуля M називають *чистим підмодулем* модуля M, якщо $IN = N \bigcap IM$ для кожного ідеалу I кільця R.

Показано [2], що чисті підмодулі мультиплікаційного модуля є ідемпотентними. Цей результат узагальнює відомий факт, що чисті ідеали є ідемпотентними та мультиплікаційними ідеалами.

Наслідок. *Чисті підмодулі мультиплікаційного диференціального модуля є диференціальними.*

Диференціально-мультиплікаційні модулі. Нехай R − комутативне кільце з ненульовою одиницею і диференціюванням $\delta : R \to R$ кільця R, M − унітарний модуль над диференціальним кільцем (R, δ) разом з модульним диференціюванням $d : M \to M$, узгодженим з кільцевим диференціюванням δ. Доведемо спочатку ряд технічних тверджень.

Лема 1. *Нехай N − диференціальний підмодуль диференціального R-модуля M. Множина $(N : M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$ є диференціальним ідеалом диференціального кільця R.*

Доведення. Нехай $r \in (N : M)$. Тоді $rM \subseteq N$ і $d(rm) \in N$ для кожного $m \in M$. Крім того, $rd(m) \in N$. Отже, $\delta(r)m = d(rm) - rd(m) \in N$ для кожного $m \in M$. Таким чином, $\delta(r) \in (N : M)$.

Лема 2. *Нехай I − диференціальний ідеал диференціального кільця R. Множина IM є диференціальним підмодулем диференціального R-модуля M.*

Доведення. Якщо $x \in IM$, то $x = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i$ для деяких $m_i \in M$, $r_i \in I$. Тоді $d(x) = \sum_{i=1}^{k} (\delta(r_i) m_i + r_i d(m_i)) = \sum_{i=1}^{k} \delta(r_i) m_i + \sum_{i=1}^{k} r_i d(m_i)$. Оскільки I − диференціальний ідеал, то $\delta(r_i) m_i \in IM$ та $r_i d(m_i) \in IM$. Звідси випливає, що $d(x) \in IM$.

Лема 3. *Для кожного диференціального підмодуля N диференціального модуля M вірне включення: $(N : M)M \subseteq N$.*

Доведення. Якщо $x \in (N : M)M$, то x є скінченною сумою виду $\sum_{i=1}^{k} r_i m_i$, де $m_i \in M$, а $r_i M \subseteq N$. Тоді $r_i m_i \in N$, а отже, $x = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i \in N$.

R-модуль M назвемо *диференціально-мультиплікаційним*, якщо для будь-якого диференціального підмодуля N R-модуля M існує такий диференціальний ідеал I кільця R, що $N = IM$.

Лема 4. *Якщо для деякого диференціального підмодуля N R-модуля M існує такий диференціальний ідеал I кільця R, що $N = IM$, то $I \subseteq (N : M)$.*

Доведення. Якщо $r \in I$, то для всіх $m \in M$ $rm \in IM = N$, тобто $rm \in N$ для всіх $m \in M$, звідки $rM \subseteq N$. Тоді $r \in (N : M)$.

Твердження 2. *Модуль M є диференціально-мультиплікаційним тоді і тільки тоді, коли $N = (N : M)M$ для кожного диференціального підмодуля N R-модуля M.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай M − диференціально-мультиплікаційний модуль, N − довільний диференціальний підмодуль в M. Тоді існує такий диференціальний ідеал I диференціального кільця R, що $N = IM$. Звідси $N = IM \subseteq (N : M)M$. Отже, зважаючи на лему 3, $N = (N : M)M$.

Достатність. Якщо N − довільний диференціальний підмодуль диференціального R-модуля M і $N = (N : M)M$, достатньо взяти диференціальний ідеал $I = (N : M)$ кільця R.

Кожне диференціальне кільце R, очевидно, є диференціально-мультиплікаційним модулем над собою. Нагадаємо, що модуль називають *диференціально-простим*, якщо він не має нетривіальних диференціальних підмодулів.

Кожний диференціально-простий модуль є диференціально-мультиплікаційним. Справді, якщо R-модуль M − диференціально-простий, то єдиними його диференціальними підмодулями є нульовий підмодуль $(0) = (0)M$ та сам модуль $M = IM$, де I − довільний диференціальний ідеал кільця R, який не міститься вануляторі модуля M.

Твердження 3. *Кожний диференціальний модуль M, диференціально породжений константою, є диференціально-мультиплікаційним.*

Доведення. Справді, якщо $x \in M$ − константа, то $d(x) = 0$, а тому $[x] = \left(x^{(\infty)}\right) = Rx$.

Нехай N − диференціальний підмодуль диференціального R-модуля $M = [x] = Rx$, і нехай $x \in N$. Тоді існує такий елемент $r \in R$, що $m = rx$. Але останнє означає, що $r \in (N : M)$, а тому $N \subseteq (N : M)M$. Зважаючи на лему 3, отримуємо рівність $N = (N : M)M$, отже, за твердженням 2, M − диференціально-мультиплікаційний модуль.

Нагадаємо, що модуль M називають *модулем Безу*, якщо кожний його скінченно породжений підмодуль є циклічним.

Твердження 4. *Кожний підмодуль диференціального модуля Безу, диференціально породжений елементом, скінченна кількість похідних якого відмінна від нуля, є диференціально-мультиплікаційним.*

Доведення. Нехай M − диференціальний модуль Безу над диференціальним кільцем R, $m \in M$ − такий елемент, що $m^{(n)} = 0$ для деякого $n \in \mathbf{N}$. Тоді підмодуль $K = [m] = \left(m^{(\infty)}\right) = \left(m, m', m'', \mathbf{K}, m^{(n-1)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} Rm^{(i)}$ є скінченно породженим диференціальним підмодулем R-модуля M. Він, зрозуміло, є циклічним диференціальним підмодулем, тому існує такий елемент $x \in M$, що $K = Rx$.

Нехай N − диференціальний підмодуль диференціального R-модуля K. Доведемо, що $N \subseteq (N : K)K$. Якщо $y \in N$, то існує такий елемент $r \in R$, що $y = rx$, але останнє означає, що $r \in (N : K)$, тому $y \in (N : K)K$. Зважаючи на лему 3, отримуємо рівність $N = (N : K)K$, отже, K − диференціально-мультиплікаційний модуль.

Теорема 1. *Для R-модуля M такі умови еквівалентні:*

1. M − диференціально-мультиплікаційний модуль.

2. *Для кожного елемента* $m \in M$ *диференціального* R*-модуля* M *існує такий диференціальний ідеал* I *кільця* R, *що* $[m] = IM$.
3. *Для кожного диференціального підмодуля* N R*-модуля* M *існує така сім'я* $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *диференціальних підмодулів диференціального мо*$\alpha \in A$ *дуля* N *та сім'я* $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *диференціальних ідеалів диференціального кільця* R, *такі, що* $N = \sum_{\alpha \in A} N_\alpha$ *та* $N_\alpha = I_\alpha M$ *для всіх* .

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Якщо M − диференціально-мультиплікаційний модуль, то для кожного диференціального підмодуля N диференціального R-модуля M існує такий диференціальний ідеал I диференціального кільця R, що $N = IM$. Такий ідеал існує в тому числі і для диференціального підмодуля $[m]$ для кожного $m \in M$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Нехай N − деякий диференціальний підмодуль модуля M. Позначимо $N_m = [m] = Rm^{(\infty)}$, $m \in N$. Розглянемо сім'ю $\{N_m\}_{m \in N} = \{[m]\}_{m \in N} = \left\{Rm^{(\infty)}\right\}_{m \in N}$ диференціальних підмодулів диференціального модуля N і позначимо $I_m = ([m] : M) = (N_m : M)$ − диференціальний ідеал кільця R, для всіх $m \in N$. За припущенням, $N_m = [m] = I_m M$ для всіх $m \in M$. Крім того, як легко видно з безпосередніх підрахунків, $N = \sum_{m \in N} [m] = \sum_{m \in N} N_m$. Так отримуємо потрібні сім'ї $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ і $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Нехай N − деякий диференціальний підмодуль диференціального R-модуля M. Візьмемо сім'ю $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ таких диференціальних підмодулів диференціального модуля N, що $N = \sum_{\alpha \in A} N_\alpha$, і сім'ю $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ таких диференціальних ідеалів диференціального кільця R, що $N_\alpha = I_\alpha M$ для всіх $\alpha \in A$. Позначимо через I ідеал $\sum_{\alpha \in A} I_\alpha$ диференціального кільця R. Цей ідеал, як відомо, буде диференціальним. Тоді

$$N = \sum_{\alpha \in A} N_\alpha = \sum_{\alpha \in A} I_\alpha M = \left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha \right) M = IM.$$

Отже, M − диференціально-мультиплікаційний модуль.

Нагадаємо, що кільце називають *диференціально-простим*, якщо воно не має нетривіальних диференціальних ідеалів.

Твердження 5. *Кожний ненульовий диференціально-мультиплікаційний модуль над диференціально-простим кільцем є диференціально-простим.*

Доведення. Справді, якщо R-модуль M − диференціально-мультиплікаційний, то для будь-якого диференціального підмодуля N модуля M існує такий диференціальний ідеал I в R, що $N = IM$. Але єдиними диференціальними ідеалами кільця R є тривіальні ідеали, тому $N = (0)M = (0)$ та $N = RM = M$ − всі диференціальні підмодулі модуля M.

Твердження 6. *Якщо* M − *диференціально-мультиплікаційний модуль над диференціальним кільцем* R, N − *диференціальний підмодуль в* M *і для кожного диференціального ідеалу* I *диференціального кільця* R $N \cap IM = IN$, *то підмодуль* N *є диференціально-мультиплікаційним модулем.*

Доведення. Нехай K − диференціальний підмодуль диференціального R-модуля N, тоді він є диференціальним підмодулем і модуля M. Оскільки M диференціально-мультиплікаційний, то існує такий диференціальний ідеал I кільця R, що $K = IM$. Тоді $K = IM = K \cap IM \subseteq N \cap IM = IN \subseteq IM = K$, звідки випливає, що $K = IN$. Отже, N − диференціально-мультиплікаційний R-модуль.

Твердження 7. *Кожний диференціально-гомоморфний образ диференціально-мультиплікаційного модуля є диференціально-мультиплікаційним модулем.*

Доведення. Нехай M, $\tilde{M}$ − диференціальні R-модулі, причому модуль M диференціально-мультиплікаційний, а $f : M \to \tilde{M}$ − диференціальний епіморфізм модулів. Нехай $\tilde{N}$ − деякий диференціальний підмодуль в M. Оскільки f сюр'єктивний і диференціальний гомоморфізм, то існує такий диференціальний підмодуль N диференціального R-модуля M, що $f(N) = \tilde{N}$. Оскільки модуль M диференціально-мультиплікаційний, для його диференціального підмодуля N існує такий диференціальний ідеал I диференціального кільця R, що $N = IM$. Тоді $\tilde{N} = f(N) = f(IM) = If(M) = I\tilde{M}$. Отже, $\tilde{M}$ − диференціально-мультиплікаційний модуль.

Твердження 8. *Кожний диференціальний підмодуль диференціально-мультиплікаційного модуля M є диференціально цілком інваріантним диференціальним підмодулем в M. Іншими словами, для кожного диференціального підмодуля N диференціально-мультиплікаційного модуля M та кожного диференціального ендоморфізму $f : M \to M$ $f(N) \subseteq N$.*

Доведення. Нехай N − диференціальний підмодуль диференціального R-модуля M, і нехай $f : M \to M$ − диференціальний ендоморфізм диференціально-мультиплікаційного модуля M. Тоді існує такий диференціальний ідеал I диференціального кільця R, що $N = IM$. Тоді $f(N) = f(IM) = If(M) \subseteq IM = N$, що і треба було довести.

Твердження 9. *Кожний ендоморфний образ мультиплікаційного модуля є цілком інваріантним мультиплікаційним підмодулем цього модуля.*

Доведення. Твердження випливає з того, що кожний диференціально-ендоморфний образ диференціально-мультиплікаційного модуля M є диференціально-мультиплікаційний підмодулем в M (твердження 7), а отже, за твердженням 8, є диференціально цілком інваріантним підмодулем диференціального R-модуля M.

Нехай R − диференціальне кільце з диференціюванням $\delta : R \to R$, M − лівий диференціальний R-модуль з диференціюванням $d : M \to M$, S − мультиплікативно замкнена підможина кільця R, $s \in S$, $r \in R$, $m \in M$. Тоді $S^{-1}R$-модуль $S^{-1}M$ є диференціальним [5, 8, 10] з диференціюваннями $\bar{\delta} : S^{-1}R \to S^{-1}R$, $\bar{d} : S^{-1}M \to S^{-1}M$, які задаються правилами:

$$\bar{\delta}(r/s) = (\delta(r)s - r\delta(s))/s^2, \quad \bar{d}(m/s) = (d(m)s - m\delta(s))/s^2.$$

Диференціальні модулі дробів ввів Горман [5].

Теорема 2. *Нехай S − мультиплікативно замкнена підмножина диференціального кільця R. Якщо диференціальний R-модуль M є диференціально-мультиплікаційним, то диференціальний $S^{-1}R$-модуль $S^{-1}M$ є диференціально-мультиплікаційним.*

Доведення. Нехай N − диференціальний підмодуль диференціального R-модуля M. Тоді існує такий диференціальний підмодуль I диференціального кільця R, що $N = IM$. З іншого боку, $S^{-1}N$ є диференціальним підмодулем в $S^{-1}M$. Тоді, $S^{-1}N = S^{-1}(IM) = \left(S^{-1}I\right)\left(S^{-1}M\right)$. Отже, $S^{-1}M$ є диференціально-мультиплікаційним $S^{-1}R$-модулем.

Наслідок. *Нехай* P *– первинний диференціальний ідеал диференціального кільця* R. *Якщо диференціальний* R*-модуль* M *є диференціально-мультиплікаційним, то диференціальний* R_{P}*-модуль* M_{P} *є диференціально-мультиплікаційним.*

1. *Ali M. M.* Idempotent and nilpotent submodules of multiplication modules // Communications in Algebra. – 2008. – **36**, № 12. – P. 4620–4642.
2. *Ali M.M., Smith D. J.* Pure submodules of multiplication modules // Beitrдge zur Algebra und Geom. – 2004. – **44**. – P. 61–74.
3. *Barnard A.* Multiplication modules // J. Algebra. – 1981. – **71**, № 1. – P. 174–178.
4. *El-Bast Z. A., Smith P. F.* Multiplication modules // Comm. Algebra. – 1988. – **16**. – P. 755–779.
5. *Gorman H. E.* Differential rings and modules // Scripta Math. – 1973. – **29**, № 1–2. – P. 25–35.
6. *Kolchin S. E.* Differential Algebra and Algebraic Groups. – New York: Academic Press, 1973. – 446 p.
7. *Low G. H., Smith P. F.* Multiplication modules and ideals // Comm. Algebra. – 1990. – **18**. – P. 4353–4375.
8. *Mikhaliev A. V., Pankratiev E. V.* Differential and difference algebra // Itogi nauki i tehniki, Algebra. Topology. Geometry. – 1987. – **25**. – P. 67–134.
9. *Smith P. F.* Some remarks on multiplication module // Arch. Math. – 1988. – **50**. – P. 223–235.
10. *Stenström B.* Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory. – New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1975. – 309 p.
11. *Tekir Ü.* On Multiplication Modules // Int. Math. Forum. – 2007. – **2**, № 29, – P. 1415–1420.
12. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive modules and rings. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 352 p.
13. *Tuganbaev A. A.* Distributive modules and related topics. – New York: Gordon & Breach, 1999. – 274 p.
14. *Tuganbaev A. A.* Multiplication modules // J. of Math. Sci. – 2004.– **123**, № 2. – P. 3839–3905.
15. *Zhang G., Wang F., Tong W.* Multiplication modules in which every prime submodule is contained in a unique maximal submodule // Comm. Algebra. – 2004. – **32**, № 5. – P. 1945–1959.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫХ МОДУЛЯХ

Введено понятие дифференциально-мультипликационного модуля над коммутативным дифференциальным кольцом. Изучены некоторые свойства таких модулей. Также исследованы дифференциальные мультипликационные модули. Установлено, что чистые подмодули мультипликационных дифференциальных модулей являются дифференциальными.

ON DIFFERENTIALLY MULTIPLICATION MODULES

The notion of differentially multiplication module over the commutative differential ring is introduced. Some properties and characterizations of such modules are considered. Differential multiplication modules are also investigated. It is shown that pure submodules of multiplication differential modules are differential.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано 01.09.11