УДК 512.552.12

А. І. Гаталевич

КОМУТАТИВНІ В НУЛІ ЧИСТІ КІЛЬЦЯ

Доведено, що комутативне в нулі чисте кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно є дуо-кільцем.

Некомутативні кільця елементарних дільників досліджували досить фрагментарно. Крім кілець головних ідеалів [2], потрібно виділити результати Кона [12], який показав, що праве головне кільце Безу без дільників нуля є кільцем елементарних дільників з деякою умовою на діагональні елементи. Дубровін [3] виявив, що напівлокальне і напівпервинне кільце Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного елемента $a \in R$ існує такий елемент $b \in R$, що $RaR = bR = Rb$. У праці [7] вивчали квазідуо-області елементарних дільників. Туганбаєв [8] довів, що дистрибутивне кільце є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно є дуо-кільцем. Нові класи некомутативних кілець елементарних дільників описані в працях Забавського [4, 5, 16].

Під кільцем розумітимемо асоціативне кільце з $1 \neq 0$.

Позначимо через $diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$ матрицю з елементами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ по головній діагоналі і нулями – на інших місцях. Матриці A і B називають еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів, що $PAQ = B$. Якщо матриця A еквівалентна деякій діагональній матриці $diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$, де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$ за довільного $i = 1, 2, \ldots, r-1$, то кажуть, що матриця A володіє діагональною редукцією. Елементи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці A. Кільце R – кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією [13].

Якщо довільна 1×2 (2×1) матриця над кільцем R володіє діагональною редукцією, то кільце R називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільце Ерміта називають кільцем Ерміта [13].

Під правим (лівим) кільцем Безу розумітимемо кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним. Праве і ліве кільце Безу називають кільцем Безу.

Кільце R називають комутативним у нулі, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з умови $ab = 0$ слідує, що $ba = 0$ [12].

Кільце R називають скінченним за Дедекіндом, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з умови $ab = 1$ слідує, що $ba = 1$ [14].

Кільце R називають кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $(1-e) \in (1-a)R$ [14].

Кільце називають чистим, якщо довільний його елемент можна подати у вигляді суми оборотного елемента та ідемпотента кільця [15].

Кільце R називають кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з умови $aR + bR = R$ слідує, що існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt = u \in U(R)$ [9].

Праве (ліве) дуо-кільце – це кільце, в якому довільний правий (лівий) ідеал є ідеалом.

Якщо ґратка правих (лівих) ідеалів кільця є дистрибутивна, то кільце називають дистрибутивним справа (зліва).

Через $U(R)$ позначатимемо групу оборотних елементів кільця R.

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 95–97.

Лема. *Нехай R – комутативне в нулі кільце. Тоді:*

1) У кільці R всі ідемпотенти є центральними;

2) R − скінченне за Дедекіндом.

Доведення. 1) Нехай $x \in R, e \in R, e^2 = e$. Тоді $x(1-e)e = 0, ex(1-e) = 0$. Одержимо $exe = ex$. З іншого боку, $xe(1-e) = 0, (1-e)xe = 0$ і $xe = exe$.
2) Нехай $ab = 1$. Тоді елемент ba – центральний ідемпотент і $baab = abab = 1$.

Теорема 1. Комутативне в нулі чисте кільце Безу є дистрибутивним.

Доведення. Згідно з результатами праць [7, 10] достатньо показати, що для довільних $a, b \in R$ з умови $aR + bR = R$ слідує $Ra + Rb = R$. Оскільки R – чисте кільце, в якому ідемпотенти центральні, то згідно з [11], R − кільце ідемпотентного стабільного рангу 1. А саме для довільних $a, b \in R$ з умови $aR + bR = R$ слідує, що існує такий ідемпотент $e \in R$, що $a + be = u \in U(R)$. А тоді одержимо $a + eb = u$ і $Ra + Rb = R$.

Враховуючи теорему 1 і результати праці [11], одержимо такий результат.

Теорема 2. *Для комутативного в нулі кільця Безу R такі умови еквівалентні:*

1) R – чисте кільце;

2) R – кільце з властивістю заміни;

3) R – кільце ідемпотентного стабільного рангу 1;

4) R – дистрибутивне чисте кільце.

Теорема 3. *Комутативне в нулі чисте кільце Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли R є дуо-кільцем.*

Доведення. Згідно з теоремою 1, наше кільце є дистрибутивним і необхідність випливає з праці [8]. Оскільки кільце ідемпотентного стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1, то згідно з результатами праць [6, 16] кільце R є кільцем Ерміта. А отже, згідно з працею [1] − кільцем елементарних дільників.

Теорема 4. *Нехай R – комутативне в нулі просте кільце. Тоді R – нерозкладне кільце.*

Доведення. Згідно з лемою всі ідемпотенти в кільці R є центральними. А в простому кільці є лише тривіальні центральні ідемпотенти. Отже, R – нерозкладне кільце.

1. *Гаталевич А. І.* Про дуо-кільця елементарних дільників // Алгебра і топологія: тематичний зб. наук. праць. − Львів, 1996. − С. 58−64.
2. *Джекобсон Н.* Теория колец. − М.: Изд-во иностр. лит., 1947. − 287 с.
3. *Дубровин Н. И.* О кольцах с элементарными делителями // Изв. вузов. Математика. − 1986. − № 11. − С. 14−20.
4. *Забавский Б. В.* О некоммутативных кольцах с элементарными делителями // Укр. матем. журн. − 1990. − **42**, № 6. − С. 847−850.
5. *Забавский Б. В.* Простые кольца элементарных делителей // Матем. студії. − 2004. − **22**, № 2. − С. 129−133.
6. *Забавський Б. В.* Редукція матриць і одночасна редукція матриць над кільцями // Там же. − 2005. − **24**, № 2. − С. 3−11.
7. *Забавский Б. В., Комарницкий Н. Я.* Дистрибутивные области с элементарными делителями // Укр. матем. журн. − 1990. − **42**, № 7. − С. 1000−1004.
8. *Туганбаев А. А.* Кольца элементарных делителей и дистрибутиные кольца // Успехи матем. наук. − 1991. − **46**, № 6. − С. 219−220.
9. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. − 1964. − **22**. − P. 5−60.

10. *Brungs H. H.* Bezout domains and rings with distributive lattice of right ideals // Can. J. Math. – 1986. – **38**, № 2. – P. 286–303.
11. *Chen H.* Rings with many idempotents // Inter. J. Math. & Math. Sci. – 1999. – **22**, № 3. – P. 547–558.
12. *Cohn P. M.* Right principal Bezout domains // J. London Math. Soc. – 1987. – **35**, № 2. – P. 251–262.
13. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
14. *Lam T. S.* Serres conjecture // Lect. Notes Math. – Berlin; New York: Springer, 1978. – 636 p.
15. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **229**. – P. 269–278.
16. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank // Вісн. Львів. ун-ту. – 2003. – **61**. – С. 206–211.

КОММУТАТИВНЫЕ В НУЛЕ ЧИСТЫЕ КОЛЬЦА

Доказано, что коммутативное в нуле чистое кольцо Безу является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда оно дуо-кольцо.

COMMUTATIVE AT ZERO CLEAN RINGS

We proved that commutative at zero clean Bezout ring is an elementary divisor ring if and only if it is a duo-ring.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
10.10.11