УДК 512.553.2

М. О. Малоїд-Глєбова

ПРО ТЕОРЕТИКО-СКРУТОВИЙ СПЕКТР ІНВАРІАНТНОГО ЗЛІВА КІЛЬЦЯ ТА СЛАБКО-МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНІ І ЧИСТО-МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНІ МОДУЛІ

Введено поняття теоретико-скрутового спектра інваріантного зліва кільця та топології Голана на ньому. Основний результат стверджує, що можна встановити гомоморфізм між топологією скінченного порядку та топологією Зариського. Також розглянуто слабко-, квазі- і чисто-мультиплікаційні модулі та вивчено їх властивості.

Поняття первинного скруту в явному вигляді ввів О. Голдман у 1969 р., яке використовував [10] під назвою «первинний ідемпотентний ядерний функтор». Еквівалент цього поняття, який виник у межах теорії категорій Гротендіка, можна відшукати в працях, що належать школі П. Габріеля. Відмітимо, що вперше теоретико-скрутовий спектр некомутативного кільця під назвою «лівий спектр» систематично досліджував Н. Попеску [12]. Суттєвий внесок у теорію первинних скрутів належить Н. Ламбеку та Дж. Міхлеру [8]. Застосування теорії первинних скрутів до некомутативної алгебричної геометрії запропонували Ф. Ван Овстаієн та А. Вершорен результати яких підсумовані у монографії [16], де також можна почерпнути цікаву інформацію про первинні скрути, зокрема симетричні.

Різні топології на теоретико-скрутовому спектрі некомутативного нетерового кільця запровадив Дж. Голан [6]. Можна було б згадати ще чимало авторів, які так чи інакше використовували ідею первинного скруту, проте нас цікавить можливість перенесення деяких результатів про спектри кілець на мультиплікаційні модулі та їх узагальнення. Це і є основною метою цієї замітки. Спочатку зауважимо, що мультиплікаційні модулі привертають увагу багатьох алгебристів [10, 2, 3].

Перш ніж розпочати виклад результатів, нагадаємо деякі основні поняття. Їх можна почерпнути з монографій [3, 5, 7] та статей [2, 3].

Надалі R − довільне асоціативне кільце з $1 \neq 0$, а всі розглядувані модулі M припускаємо лівими та унітарними R-модулями. Як правило, запис $N \subseteq M$ означатиме, що N є R-підмодулем модуля M.

Відомо, що лівий модуль Q кільця R буде *ін'єктивним*, якщо задовольнятиме одну (а отже, всі) з таких еквівалентних умов:

1) якщо Q − підмодуль деякого лівого R-модуля M, то існує такий підмодуль K в M, що M буде внутрішньою прямою сумою Q і K, тобто $Q + K = M$ і $Q \cap K = \{\varnothing\}$;
2) довільна коротка точна послідовність $0 \to Q \to M \to K \to 0$ лівих R-модулів розщеплюється;
3) якщо X та Y − ліві R-модулі і $f : X \to Y$ − ін'єктивний модульний гомоморфізм і $g : X \to Q$ − довільний модульний гомоморфізм, то існує модульний гомоморфізм $h : Y \to Q$, для якого $h \circ f = g$;
4) контрваріантний функтор $Hom(-, Q)$ з категорії лівих R-модулів у категорію абелевих груп є точний.

Два ін'єктивні ліві R-модулі називають *еквівалентними*, якщо кожен з них можна вкласти (а отже, є ізоморфним прямій сумі) у прямий добуток копій іншого модуля. Очевидно, що введене відношення є відношенням еквівалентності. Клас еквівалентності ін'єктивнох лівих R-модулів називають *скрутом* категорії R-mod і позначають τ [7].

Якщо R − кільце, то сім'ю всіх скрутів категорії R-mod позначимо через *R-tors*. Якщо A довільна сім'я модулів, то через ζ(A) позначимо найменший скрут, в якому кожен модуль $M \in$ A буде періодичним, а через χ(A) − найбільший скрут, в якому кожен модуль $M \in$ A є модулем без скруту. Клас *R-tors* має мінімальний елемент ξ, що означується як $\Im_{\xi} = \{0\}$, тобто скрут, для якого клас періодичних модулів складається з одного нульового модуля. Також існує максимальний елемент χ, для якого напівпростий клас тривіальний, тобто $F_{\tau} = \{0\}$.

На мові класів еквівалентності ін'єктивних модулів клас модуля (0) є *невласним скрутом* і позначається як χ. Клас еквівалентності всіх ін'єктивних котвірних категорії *R*-mod називають *тривіальним скрутом* і позначають ξ [7]. Якщо τ скрут категорії *R*-mod, то лівий R-модуль M називають τ-*періодичним* тоді і лише тоді, коли $Hom_R(M, E) = 0$ для деякого (а отже, всіх) елементів τ. Клас всіх τ-періодичних модулів позначимо через $\Im_{\tau}$ [7].

Якщо τ скрут категорії *R-mod*, то лівий R-модуль M називають *модулем без* τ-*скруту* тоді і лише тоді, коли існує R-мономорфізм з M у деякий член τ. Клас всіх τ-модулів без скруту позначимо через F_{τ} [7].

Скрут, не рівний максимальному елементу, називають *власним скрутом*, а скрут, не рівний мінімальному − *нетривіальним*. Множину всіх власних скрутів позначимо через *R-prop* [7].

Лівий ідеал I кільця R називають *критичним* тоді і лише тоді, коли для довільного лівого ідеалу H, що строго містить I, $R / H \in \Im_{\chi(R/I)}$. Окрім того, для комутативного кільця ідеал буде критичним тоді і лише тоді, коли він буде первинний [7]. Тепер означимо *первинний скрут* $\tau \in R$-*tors* як такий, що $\tau = \chi(R / I)$ для деякого критичного ідеалу I кільця R. Сім'ю всіх первинних скрутів *R-tors* називаємо лівим спектром R і позначимо через R-*sp* [6]. Як звичайно, $spec(R)$ позначає простір первинних ідеалів кільця R з топологією Зариського, а $spec(M)$ − простір первинних підмодулів модуля M з такою ж топологією.

Множина всіх скрутів *R-tors* є частково впорядкована. Для такого відношення порядку: $\tau \le \tau'$ тоді і лише тоді, коли $\Im_{\tau} \subseteq \Im_{\tau'}$, тобто клас періодичних модулів одного скруту міститься в класі періодичним модулів іншого.

Вслід за Дж. Голаном означимо дві топології: спочатку за правилом $c : \tau \mapsto \{\tau' \in R\text{-}prop \mid \tau \le \tau'\}$ задаємо відповідність *R-tors*$\rightarrow$ підмножини з *R-prop*;

- сім'я $\{c(\tau) \mid \tau \in R\text{-}tors\}$ підмножин з *R-prop* утворює базу топології на *R-prop*, яку називатимемо *порядковою топологією*;
- сім'я підмножин $\{c(\zeta(R / I)) \mid I \subset R\}$ множини *R-prop*, де I пробігає множину усіх лівих ідеалів кільця R, утворює базу топології на *R-prop*, що зветься *топологією скінченного порядку*.

Аналог поданого нижче твердження довів Голан для комутативних кілець [6]. Щоб довести його в некомутативній дуо-ситуації, накладемо на основне кільце додаткову умову:

(*) в кільці R кожен незвідний (у перетин двох ширших лівих ідеалів) критичний лівий ідеал є первинним.

Теорема 1. Нехай R − інваріантне зліва кільце, яке задовольняє умову (*). Тоді простір R-sp з топологією скінченного порядку гомеоморфний простору $spec(R)$ з топологією Зариського.

Доведення. Означимо функцію $h : spec(R) \to R\text{-}sp$ за правилом $P \mapsto \chi(R / P)$. За вказаною вище умовою кожен критичний ідеал є первинним в R, тому h, очевидно, є сюр'єктивним відображенням. Більше того, $T_{\chi(R/P)}(M) = \{m \in M \mid r^n m = 0$ для деякого $r \in R \setminus P$ і деякого цілого $n\}$. Це свідчить, що h − бієкція. Нехай I ідеал кільця R і $V(I) = \{P \in Spec(R) \mid I \subseteq P\}$ підмножина в $spec(R)$, замкнена в топології Зариського. Отже, $h(V(I)) = \{\chi(R / P) \in R - sp \mid \chi(R / P) \le \chi(R / I)\}$ є замкнена в топології скінченного порядку.

Навпаки, прообрази за відображення h підмножин з R-sp замкнені в топології скінченного порядку, тому, очевидно, замкнені і в $spec(R)$. Отже, h − гомеоморфізм. Теорема доведена.

Зауважимо, що питання про те, чи можна зняти умову (*) в цій теоремі залишається відкритим. Насправді, цікаво виявити, чи виконується ця умова для дуо-кілець.

Скрут τ називають *редукованим*, якщо кожен його τ-періодичний модуль є редукований [7]. Загалом клас τ-періодичних лівих R-модулів не замкнений для взяття ін'єктивних оболонок. Якщо ж ця умова виконується, то скрут τ називатимемо *стабільним*. Якщо стабільний скрут редукований, то називатимемо його *стабільно-редукованим*.

Теорема 2. Якщо τ стабільно-редукований скрут і M − ненульовий лівий R-модуль, що має мінімальну ін'єктивну резольвенту $(0) \to M \to E_0 \to E_1 \to \ldots$, то модуль M буде τ-періодичним і редукованим тоді і лише тоді, коли E_i буде τ-періодичним і редукованим для всіх $i \ge 0$.

Доведення. Якщо модуль M редукований і τ-періодичний, то за редукованою стабільністю таким буде і $E_0 = E(M)$, де символ E позначає перехід до ін'єктивної оболонки. Оскільки E_i є τ-періодичним, а $M^{(i+1)}$ – гомоморфним образом E_i, що теж є τ-періодичним і редукованим, то за редукованою стабільністю маємо $E_{i+1} = E(M^{i+1})$. Навпаки, якщо кожен E_i буде τ-періодичним і редукованим модулем, то, очевидно, що E_0 також буде таким, а отже, і модуль M, як підмодуль в E_0, також буде τ-періодичним і редукованим. Теорема доведена.

Топологічний простір W називатимемо *узагальнено спектральним*, якщо W гомеоморфний R-sp з топологією скінченного порядку для деякого кільця R.

Вслід за Хостером називатимемо спектральними топологічні простори, що задовольняють умови:

- W є T_0-простором;
- W є квазі-компактним простором;
- квазі-компактні відкриті підмножини з W замкнені відносно скінченних перетинів та видів відкритих баз;
- кожна нерозкладна замкнена підмножина з W має загальну точку.

Цікавим є питання про аналогічні властивості для топології скінченного порядку та інших спектральних просторів.

Лівий R-модуль M називають *слабко-мультиплікаційним*, якщо або $spec(M)$ − порожня множина, або для кожного первинного підмодуля N з M, $N = IM$, де I − ідеал кільця R [5].

Лівий R-модуль M називають *мультиплікаційним*, якщо будь-який підмодуль модуля M можна зобразити у вигляді $N = BM$, де B − деякий ідеал кільця R. Основні факти про мультиплікаційні модулі встановлені раніше [3, 15].

Лівий ідеал P кільця називають *лівим первинним*, якщо з того, що $aRb \subseteq P$, випливає, що або $a \in P$, або $b \in P$. Кільце R називають *первинним*, якщо нульовий його ідеал є первинним. Ідеал P кільця R називають *слабко-первинним*, якщо з того, що $aRb \neq 0 \subseteq P$, випливає, що $a \in P$ або $b \in P$.

Власний підмодуль $N \subseteq M$ над кільцем R називають *слабко-первинним* підмодулем, якщо з того, що $0 \neq rRm \in N$ для $r \in R$, $m \in M$ випливає, що або $m \in N$, або $rM \subseteq N$ [5].

Кільце R називають *локальним*, якщо воно має єдиний максимальний ідеал.

R-модуль M називають *квазі-мультиплікаційним*, якщо для кожного слабко-первинного підмодуля N з M, $N = IM$ для ідеалу I кільця R [5].

Задамо скрут T категорії R-Mod за формулою $T(M) = \{m \in M : rRm = 0\}$.

Твердження 1. Кожен слабко-первинний T-напівпростий підмодуль модуля M буде первинним.

Доведення. Нехай N − слабко-первинний підмодуль модуля M, тобто з того, що $0 \neq rRm \in N$ для $r \in R$, $m \in M$ випливає, що або $m \in N$, або $rM \subseteq N$. Припустимо, що $rRm \in N$ для $r \in R$, $m \in M$. Якщо $0 \neq rRm \in N$ і N − слабко-первинний, то $m \in N$ або $rM \subseteq N$. Якщо $rm = 0$, то $r = 0$ або $m = 0$, оскільки $T(M) = 0$, а отже, N − первинний підмодуль.

Звідси випливає прямий висновок.

Лема 1. Нехай M − слабко-мультиплікаційний R-модуль, де $T(M) = 0$. Тоді M − квазі-мультиплікаційний R-модуль.

Твердження 2. Нехай M − модуль над локальним кільцем з максимальним ідеалом P і $PM = 0$. Тоді кожен підмодуль N модуля M буде слабко-первинним.

Доведення. Нехай N − підмодуль модуля M і $0 \neq rRm \in N$, де $r \in R$ і $m \in M$. Якщо r − одиниця, то $m \in N$, а якщо ні, то $rm \in PM = 0$ − суперечність.

Лема 2. Припустимо, що N і K такі підмодулі M, що $K \not\subset N$ і $N \neq M$. Тоді виконуватиметься таке:

1) якщо N − слабко-первинний підмодуль модуля M, то N / K − слабко-первинний підмодуль модуля M / K;
2) якщо K і N / K − слабко-первинні підмодулі, то N − також слабко-первинний підмодуль.

Доведення. 1. Нехай $0 \neq rR(m + K) = rRm + K \in N / K$, де $r \in R$, $m \in M$. Якщо $rRm = 0$, то $rR(m + K) = 0$, і отримуємо суперечність. Якщо $rRm \neq 0$, N − слабко-первинний, то маємо, що або $m \in M$, або $r \in (N : M)$. Тому або $m + K \in N / K$, або $r \in (N / K :_R M / K)$ (оскільки маємо, що $(N :_R M) = (N / K :_R M / K)$, що і слід було показати.

2. Нехай $0 \neq rRm \in N$, де $r \in R$, $m \in M$, тому $rR(m+k) = rRm + k \in N / K$. Якщо $rRm \in K$, то зі слабкої первинності K матимемо те, що або $m \in K \subseteq N$, або $r \in (K :_R M) \subseteq (N :_R M)$. Тому можемо припустити, що $rRm \notin K$. Тоді $0 \neq rR(m+K) \notin N / K$. Оскільки N / K є слабко-первинним модулем, то отримаємо $m \in N$ або $r \in (N / K :_R M / K) = (N : M)$, що і слід було показати.

Нагадаємо, що R-модуль M називають *вторинним*, якщо для кожного елемента $r \in R$, R − ендоморфізм M, що задається множенням на r, є або нільпотентним, або сюр'єктивним [5].

Теорема 3. Нехай M − вторинний R-модуль, N − ненульовий слабко-первинний R-підмодуль у M. Тоді N теж буде вторинним.

Доведення. Нехай $r \in R$. За означенням вторинності: $r^n M = 0$ для деякого $n \in N$, а отже, $r^n N \subseteq r^n 0$, тому r − нільпотентний в N. Припустимо, що r ділить N. Нехай $n \in N$. Тому $n = rRm$ для деякого $m \in M$. Можемо припустити, що $0 \neq rRm$. Отже, $0 \neq rRm \in N$, звідки за слабкою первинністю N отримаємо $m \in N$. Тому $rN = N$, що і слід було показати.

Зауваження. Очевидно, що кожен мультиплікаційний модуль буде квазі-мультиплікаційним, а кожен квазі-мультиплікаційний − слабко-мультиплікаційним.

Підмодуль N називають *чистим підмодулем* в M, якщо $IN = N \cap IM$ для кожного ідеалу I з R [13].

Підмодуль N називають *відносно подільним* (або RD-*підмодулем*), якщо $rN = N \cap rM$ для всіх $r \in R$ [13].

З першого з цих означень випливає друге, навпаки, невірно.

Модуль M називють *чисто-мультиплікаційним*, якщо для кожного чистого підмодуля N з M, $N = IM$, де I − ідеал кільця R [4].

Модуль M називють RD-*мультиплікаційним*, якщо для кожного RD-підмодуля N з M, $N = IM$, де I − ідеал кільця R [13].

Тепер можемо отримати аналоги деяких фактів, доведених раніше [4]. Подані нижче твердження виконуються для комутативного випадку досить просто. Для некомутативного на підмодуль потрібно накласти додаткову умову. Надалі розглядатимемо лише кільця та модулі, для яких виконується сформульована нижче умова.

(**) Підмодуль $N \subseteq M$ є чистим в M тоді і лише тоді, коли N_P є R_P-чистим підмодулем M_P для кожного максимального ідеалу P з R.

Твердження 3. Нехай M − модуль над кільцем R.

1. Якщо M чисто-мультиплікаційний, то R_P-модуль M_P буде чисто-мультиплікаційним для кожного максимального ідеалу P з R;
2. Якщо M скінченно-породжений, то M буде чисто-мультиплікаційним модулем тоді і лише тоді, коли R_P-модуль M_P буде чисто-мультиплікаційним для кожного максимального ідеалу P з R.

Доведемо цей факт за відомою схемою [1]. Технічні перевірки виконують безпосередніми обчисленнями. Ось ескіз схеми перевірок.

1. Нехай N − чистий підмодуль M_P, P − максимальний ідеал R. За накладеною умовою існує чистий підмодуль G з M, що $N = G_P$. Тому $G = IM$ для деякого ідеалу I з R, а отже, $N = G_P = (IM)_P = I_P M_P$.

2. Нехай M − чисто-мультиплікаційний модуль. Тоді умова 2 випливає з умови 1. Навпаки, нехай K − чистий підмодуль з M. Покажемо, що $(K/(K:M)M)_P = 0$ для кожного ідеалу P з R. За введеною умовою K_P є чистим підмодулем M_P, тому $K_P = (K_P : M_P)M_P = ((K:M)M)_P$, оскільки M є скінченно-породженим. Отже, $(K/(K:M)M)_P = 0$, тому $K = (K:M)M$, що і слід було показати.

Теорема 4 [9]. Нехай R − кільце, M − скінченно-породжений точний мультиплікаційний R-модуль. Тоді виконуються такі властивості:

1) підмодуль N з M буде чистим тоді і лише тоді, коли $[N:M]$ буде чистим ідеалом кільця R;
2) ідеал I кільця R буде чистим тоді і лише тоді, коли IM буде чистим підмодулем M;
3) якщо K є чистим підмодулем N, а N − чистим підмодулем M, то K є чистим підмодулем M;
4) якщо R буде кільцем, в якому кожен проективний ідеал є головним і N буде чистим підмодулем M, то $ann(N)$ буде чистим ідеалом R.

Твердження 4. Нехай R − кільце, M − лівий R-модуль, N − власний R-підмодуль M. Якщо M є чисто-мультиплікаційним модулем і N є чистим підмодулем в M, то N і M/N теж будуть чисто-мультиплікаційними модулями.

Доведення. Нехай K − власний чистий підмодуль в N. Тоді, за теоремою 6, K є чистим підмодулем M. Можемо записати $K = I_1M = K \cap I_1M = I_1K$ і $N = I_2M = I_2N$ для деяких ідеалів I_1, I_2 з R ($K = I_1M = K \cap I_1M = I_1K$ випливає з означення чистоти підмодуля, $N = I_2M = I_2N$ − з означення мультиплікаційності, аналогічно попередньому). Звідси маємо, що $I_1N = I_1I_2M = I_2K = K \cap I_2M = K$. Отже, N є чисто-мультиплікаційним підмодулем.

Припустимо, що L/N є власним чистим підмодулем M/N. Звідси L є чистим підмодулем в M, тому $L = JM$ для деякого ідеалу з R. Тоді $J(M/N) = (L+N)/N = L/N$, що і слід було показати.

Наступна лема доведена раніше для чисто-мультиплікаційних модулів.

Лема 3. Скінченно-породжений R-модуль M буде мультиплікаційним тоді і лише тоді, коли R_P-модуль M_P буде мультиплікаційним модулем для всіх максимальних ідеалів P з R.

Доведення. Для доведення цього факту досить згадати те, що якщо X є підмодулем M, то $X = IM$ для деякого ідеалу I з R тоді і лише тоді, коли $X = (X:M)M$.

Твердження 5. Нехай R − напівлокальне кільце. Тоді R-модуль буде мультиплікаційним тоді і лише тоді, коли він буде циклічним.

Доведення. Досить показати, що кожен мультиплікаційний модуль над локальним кільцем буде циклічним (зворотне твердження очевидне). Нехай R − локальне кільце з єдиним максимальним ідеалом P, M − ненульовий мультиплікаційний модуль над R. Тоді згідно з працею [2] можемо вибрати елемент $x \in M - PM$. Тоді $Rx = IM$, де I − ідеал кільця R, і $I \not\subset P$. Більше того, $I = R$, тому $M = Rx$.

Твердження 6 [13]. Нехай R − інваріантне зліва кільце, M − R-модуль, N − власний R-підмодуль M. Тоді якщо I є таким ідеалом R, що $I \subseteq (0:M)$, то M є чисто-мультиплікаційним R-модулем тоді і лише тоді, коли M є чисто-мультиплікаційним R/I-модулем.

Наступне твердження випливає з леми 3 і твердження 5.

Твердження 7. Скінченно-породжений модуль буде мультиплікаційним тоді і лише тоді, коли він є локально-циклічним.

Твердження 8. Якщо M буде RD-мультиплікаційним модулем над областю цілісності R, тоді, якщо M буде модулем без скруту, то $rank_R(M) = 1$.

Доведення випливає з [15, Lemma 2.2] і [1, Proposition 2.4].

Теорема 5. Нехай R − кільце. Тоді кожен скінченно-породжений чистий мультиплікаційний модуль буде мультиплікаційним модулем.

Доведення. Скористаємося твердженням 7. Досить показати, що модуль є локально-циклічним. За твердженням 3 можемо припустити, що M є скінченно-породженим чистим мультиплікаційним модулем над локальним кільцем з єдиним максимальним ідеалом P. За тердженням 6 отримуємо, що M є чисто-мультиплікаційним, як R/P-модуль. Оскільки PM є чистим R/P-підмодулем M, за твердженням 4 і [1, Theorem 2.6] отримаємо, що M/PM є скінченно-породженим чисто-мультиплікаційним R/P-модулем. Якщо $M = PM$, то $M = 0$, M − мультиплікаційний. Якщо $M \neq PM$, то $rank_{R/P}(M/PM) = 1$ за твердженням 8. Отже, M є циклічним (за [1, Theorem 2.6]), що і слід було показати.

1. *Azizi A.* Shiraz Weak Multiplication Modules // Received June 29, 2000.
2. *Barnard A.* Multiplication modules // J. of Algebra. − 1981. − **71**, №. 1. − P. 174 − 178.
3. *Tuganbaev A. A.* Multiplication Modules // J. of Mathematical Sc. − 2004. − **123**, № 2. − P. 3839−3905.
4. *Lu C. P.* Prime Submodules of Modules // Comment. Math. − 1984 − **33.** − P. 61−69.
5. *Farzalipour F. and Ghiasvand P.* Reference "*Quasi Multiplication Modules*" // Thai J. of Mathematics. − 2009. − **7**, № 2. − 361366;
6. *Golan J. S.* Topologies on the Torsion-Theoretic Spectrum of a Noncommutatie Ring // Pacific J. of Mathematics. − 1974. − **51**, № 2. − P 439−450.
7. *Golan J. S.* Torsion Theories. − Oxford: Longman Scientific and Technical, 1986. – 589 p.;
8. *Lambek J., Michler G.* The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian rings // J. Algebra. − 1973. − **25**, № 2. − P 364−389.
9. *Majid M. Ali, David J. Smith.* Pure Submodules of Multiplication Modules // Contribution to Algebra and Geometry. − 2004. − **4**, № 1. − P. 61−74.
10. *Goldman O.* Rings and Modules of Quotients // J. of Algebra. − 1969. − P. 10−47.
11. *Popescu N.* Abelian cathegories with applications to rings and modules . − London; New York: Academic press, 1973. − 357 p.
12. *Popescu N.* Le spectre a gauche d'un anneau. // J. Algebra. − 1971. − **18**. − P 213−228.
13. *Atani S. E.* Indecomposable Weak Multiplication Modules over Dedekind Domain // Demonstratio Mathematica. − 2008. − **XLI**, № 1.
14. *Stenström B.* Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory. − New York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1975. − 309 p.
15. *Tekir U.* On Multiplication Modules // Int. Mathematical Forum. − 2007. − № 29. − P. 1415−1420.
16. *Van Oystaeyen F., Verschoren A.* Noncommutative algebraic geometry. An introduction // Lecture Notes in Mathematics, 887. − Berlin: Springer-Verlag, 1981. − 404 p.

ОБ ТЕОРЕТИКО-СКРУТОВОМ СПЕКТРЕ ИНВАРИАНТНОГО СЛЕВА КОЛЬЦА И СЛАБО-МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫХ И ЧИСТО-МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫХ МОДУЛЯХ

Введено понятие теоретико-скрутового спектра инвариантного слева кольца и топологии Голана на нем. Основной результат утверждает, что можно определить гомоморфизм между топологией конечного порядка и топологией Зариского. Также рассмотрены слабо-, квази- и чисто-мультипликационные модули и изучены некоторые их свойства.

ABOUT THE TORSION-THEORETICAL SPECTRUM OF LEFT INVARIANT RING AND WEAKLY-MULTIPLICATION AND PURE- MULTIPLICATION MODULES

In this paper, we introduce the concept of torsion-theoretic spectrum of left invariant ring and Golan topology. Main result shows that we can define homomorphism between finitary topology and Zarisky topology. Also weak-multiplication, quasi-multiplication and pure-multiplication are considered and there conditions are defined.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка

Одержано
12.09.11