УДК 512.64+512.55

Н. С. Джалюк

АСОЦІЙОВНІСТЬ ФАКТОРИЗАЦІЙ КЛІТКОВО-ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ ТА ЇХ ДІАГОНАЛЬНИХ КЛІТОК НАД КОМУТАТИВНИМИ ОБЛАСТЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ*

Встановлено необхідні та достатні умови, за яких із асоційовності факторизацій діагональних кліток неособливих кліткових-трикутних матриць над комутативними областями головних ідеалів випливає асоційовність відповідних кліткових-трикутних факторизацій цих матриць.

Нехай R – комутативна область головних ідеалів, $M(n,R)$ – кільце $n\times n$-матриць над R, $M(m,n,R)$ – множина $m\times n$-матриць над R. Елементи $a,b\in R$ називають асоційованими, якщо $a=bu$, $u\in U(R)$, де $U(R)$ – група одиниць кільця R. Через R' позначаємо повну множину неасоційованих елементів кільця R, тобто таку, що містить по одному елементу з кожного класу асоційованих елементів, R_m – повну множину лишків за ідеалом (m), що породжений елементом $m\in R$, або за модулем m [8, 10].

Матриці $B_1, B_2\in M(n,R)$ називають правоасоційованими або правоеквівалентними, якщо існує така оборотна матриця $V\in GL(n,R)$, що $B_2=B_1V$. Відомо [8, 10], що кожна матриця A над областю головних ідеалів R правоасоційована до верхньої трикутної матриці H^A, яку називають формою Ерміта матриці A. Для неособливої матриці $A\in M(n,R)$ форма Ерміта має вигляд

$$AV=H^A=\begin{Vmatrix} h_{11}^A & h_{12}^A & \dots & h_{1n}^A \\ 0 & h_{22}^A & \dots & h_{2n}^A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn}^A \end{Vmatrix},$$

де $h_{ii}^A\in R'$, $i=1,\dots,n$, $h_{ij}^A\in R_{h_{ii}^A}$ $i,j=1,\dots,n$, $i<j$.

Факторизації $A=B_1C_1$, $A=B_2C_2$, $B_i,C_i\in M(n,R)$, $i=1,2$, матриці $A\in M(n,R)$ називають асоційованими, якщо існує така матриця $V\in GL(n,R)$, що $B_2=B_1V$, $C_2=V^{-1}C_1$. Задачу опису дільників та факторизацій матриць з точністю до асоційовності над кільцями головних ідеалів сформулював З. І. Боревич [1]. Зокрема, він вказав умови однозначності з точністю до асоційовності дільників та факторизацій неособливих матриць над цими кільцями.

У працях [3, 4] описані з точністю до асоційовності кліткові-діагональні та кліткові-трикутні факторизації кліткові-діагональних та кліткові-трикутних матриць. Зокрема, встановлено [3] умови існування таких кліткових факторизацій матриць над кільцями головних ідеалів, розглянуто [4] паралельні кліткові-трикутні факторизації матриць і вказано критерії однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць над адекватними кільцями. Саме під час дослідження факторизацій кліткових матриць виникла потреба вивчити умови асоційовності таких факторизацій

*Дослідження виконано за фінансової підтримки гранту НАН України для молодих учених (Державний реєстраційний номер 0111U005741).

матриць, що тісно пов'язано із задачею про асоційовність відповідних діагональних кліток цих матриць.

Блочні матриці, зокрема клітково-трикутні, застосовують у різноманітних областях математики [9, 11]. Актуальні, наприклад, задачі про встановлення умов різного типу еквівалентностей таких матриць [6, 7], задачі розкладу на множники різноманітних виглядів таких кліткових матриць, тобто опису їх факторизацій [5, 12].

Нижче встановлені умови, за яких із асоційовності факторизацій діагональних кліток неособливої клітково-трикутної матриці над комутативною областю головних ідеалів випливає асоційовність відповідних клітково-трикутних факторизацій цієї матриці.

Нехай $T \in M(n, R)$ – неособлива верхня клітково-трикутна матриця, тобто

$$T = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1k} \\ \mathbf{0} & T_{22} & \dots & T_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & T_{kk} \end{Vmatrix},$$

де $\mathbf{0}$ – нульова матриця відповідного розміру, $T_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $i, j = 1, \dots, k$, $i \le j$, яку записуватимемо у вигляді

$$T = \operatorname{triang}(T_{11}, \dots, T_{kk}),$$

де $T_{ii} \in M(n_i, R)$ – діагональні клітки матриці T, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Нехай матриця T розкладна у добуток клітково-трикутних множників:

$$T = BC = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ \mathbf{0} & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1k} \\ \mathbf{0} & C_{22} & \dots & C_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$T = \tilde{B}\tilde{C} = \begin{Vmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \dots & \tilde{B}_{1k} \\ \mathbf{0} & \tilde{B}_{22} & \dots & \tilde{B}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{B}_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \dots & \tilde{C}_{1k} \\ \mathbf{0} & \tilde{C}_{22} & \dots & \tilde{C}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{C}_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

де $B_{ii}, \tilde{B}_{ii}, C_{ii}, \tilde{C}_{ii} \in M(n_i, R)$, $B_{ij}, \tilde{B}_{ij}, C_{ij}, \tilde{C}_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $i, j = 1, \dots, k$, $i < j$. Тоді казатимемо, що матриця T має клітково-трикутні факторизації.

Із (1) і (2) отримуємо факторизації діагональних кліток матриці T:

$$T_{ii} = B_{ii} C_{ii}, \quad i = 1, \dots, k, \tag{3}$$

$$T_{ii} = \tilde{B}_{ii} \tilde{C}_{ii}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{4}$$

Надалі під клітково-трикутними розумітимемо лише верхні клітково-трикутні матриці. Аналогічні результати можна одержати і для нижніх.

Лема. *Нехай неособливі клітково-трикутні матриці*

$$B = \operatorname{triang}(B_{11}, \dots, B_{kk}), \ \tilde{B} = \operatorname{triang}(\tilde{B}_{11}, \dots, \tilde{B}_{kk}),$$

де $B_{ii}, \tilde{B}_{ii} \in M(n_i, R)$, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, *правоасоційовані, тобто*

$$\tilde{B} = BV, \ V \in GL(n, R). \tag{5}$$

Тоді

а) *матриці* B *та* $\tilde{B}$ *є клітково-трикутно правоасоційованими, тобто у співвідношенні* (5) *матриця* V *є клітково-трикутна:* $V = \mathrm{triang}(V_{11},\dots,V_{kk})$, $V_{ii} \in GL(n_i, R)$, $i = 1,\dots,k$;

б) *відповідні діагональні клітки* B_{ii} *та* $\tilde{B}_{ii}$, $i = 1,\dots,k$, *матриць* B *і* $\tilde{B}$ *є правоасоційованими.*

Доведення. Нехай матриці

$$B = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ \mathbf{0} & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_{kk} \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{Vmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \dots & \tilde{B}_{1k} \\ \mathbf{0} & \tilde{B}_{22} & \dots & \tilde{B}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{B}_{kk} \end{Vmatrix},$$

де $B_{ii}, \tilde{B}_{ii} \in M(n_i, R)$, $B_{ij}, \tilde{B}_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $i, j = 1,\dots,k$, $i < j$, правоасоційовані, тобто $\tilde{B} = BV$, $V \in GL(n, R)$, або у блочному вигляді

$$\begin{Vmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \dots & \tilde{B}_{1k} \\ \mathbf{0} & \tilde{B}_{22} & \dots & \tilde{B}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{B}_{kk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ \mathbf{0} & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1k} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{k1} & V_{k2} & \dots & V_{kk} \end{Vmatrix},$$

де $V_{ii} \in M(n_i, n_j, R)$, $i, j = 1,\dots,k$. Тоді отримуємо рівності $B_{ii}V_{ij} = \mathbf{0}$, $i = 2,\dots,k$, $j = 1,\dots,k-1$, $i > j$. Оскільки B_{ii}, $i = 2,\dots,k$ − неособливі матриці, то із цих рівностей випливає, що $V_{ij} = \mathbf{0}$ для всіх $i = 2,\dots,k$, $j = 1,\dots,k-1$, $i > j$, тобто V − клітково-трикутна матриця. Отже, твердження *а)* леми доведено, тоді справджується і твердження *б)*.

Лему доведено.◊

Зауважимо, що якщо діагональні клітки неособливих клітково-трикутних матриць є правоасоційованими, то клітково-трикутні матриці можуть не бути правоасоційованими, як видно з такого прикладу.

Приклад. Нехай

$$B = \left\Vert\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right\Vert, \quad \tilde{B} = \left\Vert\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right\Vert$$

− матриці над кільцем цілих чисел • . Діагональні клітки цих матриць правоасоційовані, але матриці B і $\tilde{B}$ не є правоасоційованими, оскільки їх форми Ерміта різні.

Із леми також випливає, що для асоційовності клітково-трикутних факторизацій (1) і (2) матриці T умова асоційовності факторизації (3) і (4) її діагональних кліток T_{ii} є необхідна, але недостатня.

Теорема. *Нехай факторизації* (3) *і* (4) *діагональних кліток* T_{ii}, $i = 1,\dots,k$, *неособливої клітково-трикутної матриці* T *асоційовані. Тоді клітково-трикутні факторизації* (1) *і* (2) *матриці* T *асоційовані тоді і тільки тоді, коли* $(\det B_{ss}, \det C_{s+t,s+t}) = 1$ *для всіх* $s = 1,\dots,k-1$, $t = 1,\dots,k-s$.

Доведення. Необхідність. Нехай факторизації (1) і (2) матриці T асоційовані. Тоді матриці B і $\tilde{B}$ є правоасоційованими, а за лемою − клітково-трикутно правоасоційовані. Отже, матриці B і $\tilde{B}$ мають одну і ту саму форму Ерміта, тобто існують такі клітково-трикутні матриці $V,\ \tilde{V} \in GL(n,R)$, що $BV = \tilde{B}\tilde{V} = H^B$ – форма Ерміта матриць B і $\tilde{B}$. Тоді із факторизацій (1) і (2) отримуємо такі факторизації матриці T:

$$T = H^B D = \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1k} \\ \mathbf{0} & G_{22} & \dots & G_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & G_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1k} \\ \mathbf{0} & D_{22} & \dots & D_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

$$T = H^B \tilde{D} = \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1k} \\ \mathbf{0} & G_{22} & \dots & G_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & G_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} & \dots & \tilde{D}_{1k} \\ \mathbf{0} & \tilde{D}_{22} & \dots & \tilde{D}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{D}_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

де $G_{ii} = B_{ii}V_{ii} = \tilde{B}_{ii}\tilde{V}_{ii}$, $D_{ii} = V_{ii}^{-1}C_{ii}$, $\tilde{D}_{ii} = \tilde{V}_{ii}^{-1}\tilde{C}_{ii}$, $V_{ii},\ \tilde{V}_{ii} \in GL(n_i, R)$, $i = 1,\dots,k$. Оскільки факторизації (1) і (2) матриці T асоційовані та факторизації (3) і (4) діагональних кліток T_{ii} матриці T асоційовані, то $D_{ii} = \tilde{D}_{ii}$, $i = 1,\dots,k$, тобто факторизація (7) має вигляд

$$T = H^B \tilde{D} = \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1k} \\ \mathbf{0} & G_{22} & \dots & G_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & G_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} D_{11} & \tilde{D}_{12} & \dots & \tilde{D}_{1k} \\ \mathbf{0} & D_{22} & \dots & \tilde{D}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D_{kk} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Із факторизацій (6) і (8) отримуємо, що матриці $X_{ij} = G_{ij}$, $Y_{ij} = D_{ij}$ та $X_{ij} = G_{ij}$, $Y_{ij} = \tilde{D}_{ij}$ є розв'язками системи матричних рівнянь

$$G_{ii}Y_{ij} + X_{ij}D_{jj} + \sum_{l=i+1}^{j-1} X_{il}Y_{lj} = T_{ij}, \quad 1 \le i < j \le k,$$

розв'язування якої зводиться до послідовного розв'язування лінійних матричних рівнянь вигляду

$$G_{ii}Y_{ij} + X_{ij}D_{jj} = T_{ij}, \quad 1 \le i < j \le k. \tag{9}$$

Оскільки трикутна форма Ерміта H^B матриць B і $\tilde{B}$ визначена однозначно, то розв'язок $X_{ij} = G_{ij} = \left\| g_{pq}^{(ij)} \right\|_1^{n_i, n_j}$, $Y_{ij} = D'_{ij}$ матричного рівняння (9) такий, що елементи $g_{pq}^{(ij)} \in R_{h_{pp}^{(i)}}$, де $G_{ii} = \left\| h_{pq}^{(i)} \right\|_1^{n_i}$ – верхня трикутна матриця, є єдиним, тобто $D_{ij} = D'_{ij}$ і $\tilde{D}_{ij} = D'_{ij}$. Тоді за лемою 1 із праці [2] виконуються умови $\left(\det G_{ss}, \det D_{s+t,s+t}\right) = 1$ для всіх $s = 1,\dots,k-1$, $t = 1,\dots,k-s$, які можна записати у вигляді $\left(\det B_{ss}, \det C_{s+t,s+t}\right) = 1$ для всіх $s = 1,\dots,k-1$, $t = 1,\dots,k-s$. Таким чином, необхідність доведено.

Достатність. Нехай $\left(\det B_{ss}, \det C_{s+t,s+t}\right) = 1$ для всіх $s = 1,\dots,k-1$, $t = 1,\dots,k-s$. Тоді за теоремою 1 із праці [4] факторизація (1) матриці T, що відповідає факторизації (3) її діагональних кліток, єдина з точністю до асоційовності. Оскільки факторизації (3) і (4) діагональних кліток T_{ii} матриці T асоційовані, то факторизація (2) матриці T асоційована до такої факторизації:

$$T = B'C' = \begin{Vmatrix} B_{11} & B'_{12} & \dots & B'_{1k} \\ \mathbf{0} & B_{22} & \dots & B'_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{11} & C'_{12} & \dots & C'_{1k} \\ \mathbf{0} & C_{22} & \dots & C'_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

де $B' = BV$, $C' = V^{-1}C$, $V = \mathrm{diag}(V_{11}, ..., V_{kk})$, $V_{ii} \in GL(n_i, R)$, $i = 1, ..., k$, яка також є відповідною до факторизації (3) діагональних кліток матриці T. Отже, факторизації (10) і (1) матриці T асоційовані, а тому асоційовані і факторизації (1) та (2) матриці T.

Теорему доведено.◊

1. *Боревич З. И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // Тез. сообщ. III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей. Тарту, 21–24 сент. 1976 г. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976.– С. 19.
2. *Джалюк Н. С.* Однозначність кліткoво-трикутних факторизацій матриць над кільцями головних ідеалів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 7–12.
3. *Джалюк Н., Петричкович В.* Факторизація кліткoво-діагональних та кліткoво-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів // Матем. вісник НТШ. – 2007. – **4.** – С. 79–89.
4. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Паралельні факторизації матриць над кільцями та їх зв'язки // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. **8**. – С. 7–17.
5. *Шаваровский Б. З.* Поиск полного набора решений или доказательство неразрешимости некоторых классов матричных многочленных уравнений с коммутирующими коэффициентами // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 2007. – **47**, № 12. – С. 1988–1997.
6. *Шаваровский Б. З.* Преобразования подобия разложимых матричных многочленов и некоторые их связи // Там же. – 2009. – **49**, № 9. – С. 1539–1553.
7. *Boyle M., Huang D.* Poset block equivalence of integral matrices // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – **355**, № 10. – P. 3861–3886.
8. *Brown W. C.* Matrices over commutative rings. – New York: Marcel Dekker, Inc., 1993. – 281 p.
9. *Di Vincenzo O. M., La Scala R.* Block-triangular matrix algebras and factorable ideals of graded polynomial identities // J. of Algebra. – 2004. – **279**. – P. 260–279.
10. *Newtmam M.* Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 224 c.
11. *Martins F., Pereira E.* Block matrices and stability theory // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – **38**. – P. 147–162.
12. *Yang Y., Holtti H.* The factorization of block matrices with generalized geometric progression rows // Linear Algebra and its Appl. – 2004. – **387**. – P. 51–67.

АССОЦИИРОВАННОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИЙ КЛЕТОЧНО-ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ ДИАГОНАЛЬНЫХ КЛЕТОК НАД КОММУТАТИВНЫМИ ОБЛАСТЯМИ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Установлены необходимые и достаточные условия, при которых из ассоциированности факторизаций диагональных клеток неособенных клеточно-треугольных матриц над коммутативными областями главных идеалов следует ассоциированность соответствующих клеточно-треугольных факторизаций этих матриц.

THE ASSOCIATION OF FACTORIZATIONS OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES AND OF THEIR DIAGONAL BLOCKS OVER COMMUTATIVE PRINCIPAL IDEAL DOMAINS

We established the necessary and sufficient conditions, under which from the association of the diagonal blocks of nonsingular block triangular matrices over commutative principal ideal domains it follows that corresponding block triangular factorizations of this matrices are associate.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.09.11