

СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ ТА СТИСНЕННЯ

Для зручності застосування числових методів, зокрема методу скінченних елементів, до розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення, усі ключові співвідношення для визначення напружено-деформованого стану розглядуваних оболонок за статичного та динамічного навантажень, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану записано у матричному вигляді. Побудовано числові схеми розв'язування задач статичної та динамічної рівноваги, стійкості та коливань гнучких оболонок, податливих до зсувів та стиснення.

Вступ. Знаючи напружено-деформований стан (НДС) оболонкових конструкцій, можна прогнозувати і поліпшувати їх міцнісні та експлуатаційні властивості. Однією з найпоширеніших для їх дослідження є математична модель оболонок Тимошенка–Міндліна, яка базується на гіпотезі про незалежний поворот нормалі оболонки. Різні варіанти уточнених теорій оболонок і пластин, які враховують лінійні та зсувні поперечні деформації, запропоновано в працях [6, 7, 9], фундаментальні результати нелінійної теорії оболонок наведено в публікаціях [4, 5, 8] та ін.

Розрахунок НДС гнучких тонкостінних оболонкових конструкцій ґрунтується, звичайно, на числових методах, заснованих, зокрема, на варіаційних формулюваннях відповідних задач. Особливе місце серед них займає метод скінченних елементів (МСЕ) [1, 10, 11, 12] через універсальність в програмній реалізації та можливість створити повністю автоматизований цикл розрахунку.

Нижче записано ключові співвідношення для визначення НДС тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення (шестимодальний варіант, у якому поле переміщень характеризують шість функцій, що описують поворот та стиснення нормалі [5, 7, 10, 13]), знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок МСЕ. Для зручності застосування числових методів [1, 10, 12] усі співвідношення подано в матричному вигляді.

Ключові співвідношення теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Розглянемо оболонку скінченного об'єму $V = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2\}$. Вважаємо, що координатні лінії серединної її поверхні Ω збігаються із лініями головних кривин, а товщина h суттєво менша, ніж інші розміри.

Позначимо $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – вектор узагальнених переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix}^T$ та $e_L = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23})^T$ – відповідно вектори поворотів та лінійних деформацій. Тоді вирази для визначення компонент тензора лінійної деформації і тензора повороту з точністю до величини $o(h)$ можна подати у вигляді

$$e_L = C_L u, \quad (1)$$

$$\omega = C_\Omega u. \quad (2)$$

Деформаційні співвідношення для гнучких оболонок з урахуванням лінійної і нелінійної складових деформації запишемо так:

$$\varepsilon = e_L + e_N, \quad (3)$$

де $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23})^T$ – компоненти тензора деформацій Гріна,

$$e_N = \frac{1}{2}(C_\Omega u)^T E_\Omega (C_\Omega u).$$

Тут C_L та C_Ω – матриці диференціальних операторів розмірності 11×6 та 6×6 відповідно: повний вигляд C_L наведено у праці [2];

$$C_\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} & 0 & -1 & 0 \\ k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial_2(A_1 \cdot)}{A_1 A_2} & \frac{\partial_1(A_2 \cdot)}{A_1 A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial_2(A_1 \cdot)}{A_1 A_2} & \frac{\partial_1(A_2 \cdot)}{A_1 A_2} & 0 \end{pmatrix};$$

E_Ω – вектор вигляду $E_\Omega = (E_1, E_2, \dots, E_{11})^T$, компонентами якого є відповідно підібрані матриці E_i розмірності 6×6 , відмінні від нуля компоненти яких такі:

$$\begin{aligned} E_1^{22} = E_1^{33} = 1, \quad E_2^{11} = E_2^{33} = 1, \quad E_4^{21} = E_4^{12} = -1/2, \quad E_5^{31} = E_5^{13} = -1/2, \\ E_6^{32} = E_6^{23} = -1/2, \quad E_7^{22} = -k_1, \quad E_7^{25} = E_7^{36} = E_7^{52} = E_7^{63} = 1, \\ E_7^{25} = E_7^{36} = E_7^{52} = E_7^{63} = 1, \quad E_7^{33} = -(k_1 + 2k_2), \quad E_8^{41} = E_8^{14} = E_8^{36} = E_8^{63} = 1, \\ E_8^{33} = -(2k_1 + k_2), \quad E_8^{11} = -k_2, \quad E_9^{51} = E_9^{42} = E_9^{24} = E_9^{15} = -1/2, \\ E_{10}^{31} = E_{10}^{13} = k_2, \quad E_{10}^{61} = E_{10}^{43} = E_{10}^{16} = E_{10}^{34} = -1/2, \\ E_{11}^{32} = E_{11}^{23} = k_1, \quad E_{11}^{62} = E_{11}^{53} = E_{11}^{26} = E_{11}^{35} = -1/2. \end{aligned}$$

Тут $A_1 = A_1(\alpha)$, $A_2 = A_2(\alpha)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми середньої поверхні оболонки Ω ; $k_1 = k_1(\alpha)$, $k_2 = k_2(\alpha)$ – її головні кривини відповідно ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$).

За припущення, що розглядувана оболонка є лінійно пружною, тобто для неї виконується узагальнений закон Гука, матричну форму закону пружності можна подати так:

$$\sigma = B\varepsilon, \quad (4)$$

де $\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^T$ – вектор симетричних зусиль і моментів; B – матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11×11 [2].

Рівняння рівноваги розглядуваної математичної моделі оболонок, податливих до зсувів та стиснення, запишемо згідно з принципом можливих переміщень [8]:

$$C_{\sigma} \sigma^* + P = 0, \quad (5)$$

де $P = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3)^T$ – вектор зовнішнього навантаження; C_{σ} – матриця диференціальних операторів розмірності 6×15 , відмінні від нуля компоненти якої

$$\begin{aligned} C_{\sigma}^{1,1} &= \frac{\partial_1(A_2 \cdot)}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{1,2} &= -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{1,4} &= \frac{\partial_2(A_1 \cdot)}{A_1 A_2}, \\ C_{\sigma}^{1,5} &= \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{1,6} &= k_1, & C_{\sigma}^{1,12} &= C_{\sigma}^{1,13} = \frac{(\partial_2(A_1 k_1 \cdot) + k_2 \partial_2 A_1)}{2 A_1 A_2}, \\ C_{\sigma}^{2,1} &= -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{2,2} &= \frac{\partial_2(A_1 \cdot)}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{2,4} &= \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, \\ C_{\sigma}^{2,5} &= \frac{\partial_1(A_2 \cdot)}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{2,8} &= k_2, & C_{\sigma}^{2,12} &= C_{\sigma}^{2,13} = \frac{(\partial_1(A_2 k_2 \cdot) + k_1 \partial_1 A_2)}{2 A_1 A_2}, \\ C_{\sigma}^{3,1} &= -k_1, & C_{\sigma}^{3,2} &= -k_2, & C_{\sigma}^{3,6} &= \frac{\partial_1(A_2 \cdot)}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{3,8} &= \frac{\partial_2(A_1 \cdot)}{A_1 A_2}, \\ C_{\sigma}^{4,7} &= -1, & C_{\sigma}^{4,10} &= \frac{\partial_1(A_2 \cdot)}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{4,11} &= -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{4,12} &= \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} + \frac{\partial_2}{A_2}, & C_{\sigma}^{4,13} &= \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, \\ C_{\sigma}^{5,9} &= -1, & C_{\sigma}^{5,10} &= -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{5,11} &= \frac{\partial_2(A_1 \cdot)}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{5,12} &= \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{5,13} &= \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} + \frac{\partial_1}{A_1}, \\ C_{\sigma}^{6,3} &= -1, & C_{\sigma}^{6,10} &= -k_1, & C_{\sigma}^{6,11} &= -k_2, & C_{\sigma}^{6,14} &= \frac{\partial_1(A_2 \cdot)}{A_1 A_2}, & C_{\sigma}^{6,15} &= \frac{\partial_2(A_1 \cdot)}{A_1 A_2}; \end{aligned}$$

$\sigma^* = (N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*)^T$ – вектор нововведених зусиль і моментів, які пов'язані зі симетричними зусиллями і моментами залежністю

$$\sigma^* = F \sigma. \quad (6)$$

Тут F – матриця розмірності 15×11 з відмінними від нуля компонентами:

$$\begin{aligned} F^{11} &= F^{22} = F^{33} = F^{44} = F^{54} = F^{65} = F^{75} = F^{86} = F^{96} = F^{10,7} = \\ &= F^{11,8} = F^{12,9} = F^{13,9} = F^{14,10} = F^{15,11} = 1, \\ F^{45} &= -F^{55} = F^{64} = -F^{74} = F^{82} = -F^{92} = F^{12,10} = -F^{13,10} = F^{14,9} = F^{15,8} = \frac{1}{2} \omega_1^0, \\ F^{46} &= -F^{56} = -F^{61} = F^{71} = -F^{84} = F^{94} = F^{12,11} = \\ &= -F^{13,11} = -F^{14,7} = -F^{15,9} = \frac{1}{2} \omega_2^0, \\ F^{41} &= F^{42} = F^{51} = F^{52} = -F^{66} = F^{76} = F^{85} = F^{12,7} = F^{12,8} = \\ &= -F^{13,7} = -F^{13,8} = -F^{14,11} = F^{15,10} = -\frac{1}{2} \omega_3^0, \\ F^{69} &= \frac{1}{2} \omega_1^1, & F^{89} &= -\frac{1}{2} \omega_2^1, & F^{7,11} &= -F^{9,10} = -\frac{1}{2} \omega_3^1, \\ F^{4,7} &= -F^{5,7} = \frac{1}{2} \left((k_1 + 2k_2) \omega_3^0 - \omega_3^1 \right), & F^{4,8} &= -F^{5,8} = \frac{1}{2} \left((2k_1 + k_2) \omega_3^0 - \omega_3^1 \right), \\ F^{4,10} &= -F^{5,10} = \frac{1}{2} \omega_1^1 - k_2 \omega_1^0, & F^{4,11} &= -F^{5,11} = \frac{1}{2} \omega_2^1 - k_1 \omega_2^0, \end{aligned}$$

$$F^{67} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 \omega_2 - \omega_2 & \end{pmatrix}, \quad F^{6,11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega_3 - k_1 \omega_3 & \end{pmatrix}, \quad F^{77} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 \omega_2 + \omega_2 & \end{pmatrix}, \quad F^{79} = -k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_1 - \omega_1 & \end{pmatrix},$$

$$F^{88} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 \omega_1 + \omega_1 & \end{pmatrix}, \quad F^{8,10} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega_3 + k_2 \omega_3 & \end{pmatrix}, \quad F^{98} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_2 \omega_1 + \omega_1 & \end{pmatrix}.$$

Систему (5) доповнюємо статичними крайовими умовами на частині Γ_σ контуру серединної поверхні оболонки $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_\sigma$

$$G_\sigma \sigma^* \Big|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g \quad (7)$$

та кінематичними

$$G_U u \Big|_{\Gamma_U} = u_g \quad (8)$$

крайовими умовами. Тут $\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^T$ та $u_g = (u_t^p, u_s^p, u_n^p, \gamma_t^p, \gamma_s^p, \gamma_n^p)^T$ – вектори крайових зусиль-моментів та крайових зміщень відповідно. Через G_σ, G_U позначено матриці змінних коефіцієнтів розмірностей 6×15 та 6×6 відповідно, ненульові компоненти яких

$$G_\sigma^{11} = G_\sigma^{25} = G_\sigma^{4,10} = G_\sigma^{5,13} = \cos^2(n, \alpha_1), \quad G_\sigma^{12} = -G_\sigma^{24} = G_\sigma^{4,11} = -G_\sigma^{5,12} = \sin^2(n, \alpha_1),$$

$$G_\sigma^{14} = G_\sigma^{15} = -G_\sigma^{21} = G_\sigma^{22} = G_\sigma^{4,12} = G_\sigma^{4,13} = -G_\sigma^{5,10} = G_\sigma^{5,11} = \frac{1}{2} \sin 2(n, \alpha_1),$$

$$G_\sigma^{1,12} = G_\sigma^{1,13} = \frac{1}{4} (k_1 + k_2) \sin 2(n, \alpha_1),$$

$$G_\sigma^{2,12} = G_\sigma^{2,13} = \frac{1}{2} (k_2 \cos^2(n, \alpha_1) - k_1 \sin^2(n, \alpha_1)),$$

$$G_\sigma^{3,6} = G_\sigma^{6,14} = \cos(n, \alpha_1), \quad G_\sigma^{3,8} = G_\sigma^{6,15} = \sin(n, \alpha_1),$$

$$G_U^{11} = G_U^{22} = G_U^{44} = G_U^{55} = \cos(n, \alpha_1),$$

$$G_U^{12} = G_U^{45} = -G_U^{21} = -G_U^{54} = \sin(n, \alpha_1), \quad G_U^{33} = -G_U^{66} = -1,$$

і через n – нормаль до межі серединної поверхні оболонки.

Рівняння руху оболонок, податливих до зсувів та стиснення, які отримуємо з варіаційного принципу Остроградського–Гамільтона [3, 5], мають вигляд

$$C_\sigma \sigma^* + P - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

де m – діагональна матриця розмірності 6×6 , ненульові компоненти якої

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \rho h,$$

$$m_{44} = m_{55} = m_{66} = \rho \frac{h^3}{12},$$

ρ – густина матеріалу оболонки.

Для однозначного інтегрування системи рівнянь (9), окрім статичних (7) та геометричних (8) крайових умов, необхідно задати ще початкові

$$u \Big|_{t=0} = u^0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u^1. \quad (10)$$

Варіаційні формулювання задач статки та динаміки теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Оскільки розв'язування крайових задач деформування гнучких оболонок здійснюємо МСЕ [1, 10, 11, 12], який базується на варіаційних принципах [3], подамо їх варіаційні формулювання. За невідомі варіаційних задач обрали вектор узагальнених

переміщень точок серединної поверхні оболонки. Введемо функціональні простори $V = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [W_2^1(\Omega)]^6 \mid v = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_\sigma \right\}$ та

$$G = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [L^2(\Omega)]^6 \right\}.$$

Варіаційне формулювання задачі статки нелінійної теорії оболонок, податливих до зсувів та стиснення:

задано $l \in V'$,

знайти такий вектор узагальнених переміщень $u \in V$, що

$$a_N(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (11)$$

де форма $a_N(u, v)$ та функціонал $\langle l, v \rangle$ мають вигляд

$$a_N(u, v) = \iint_{\Omega} \left(C_L v + (C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega C_\Omega v \right)^T E_0 B \left(C_L u + \frac{1}{2} (C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega C_\Omega u \right) d\Omega, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle l, v \rangle = & \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega} (P_i v_i + m_i \xi_i) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{\Gamma_\sigma} (N_t v_t + N_s v_s + N_n v_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n) d\Gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

У рівності (12) E_0 – діагональна матриця розміру 11×11 з відмінними від нуля елементами:

$$E_0^{11} = E_0^{22} = E_0^{33} = E_0^{77} = E_0^{88} = 1, \quad E_0^{44} = E_0^{55} = E_0^{66} = E_0^{99} = E_0^{10,10} = E_0^{11,11} = 2.$$

Сформулюємо тепер варіаційну задачу динаміки нелінійної теорії оболонок, податливих до зсувів та стиснення:

задано $l \in L^2(0, T; V')$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$;

знайти такий вектор узагальнених переміщень $u \in L^2(0, T; V)$, що

$$\mu(u''(t), v) + a_N(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \quad \forall t \in (0, T], \quad (14)$$

$$\mu(u'(0) - u^1, v) = 0, \quad a(u(0) - u^0, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Тут форма $a_N(u, v)$ та лінійний функціонал $\langle l, v \rangle$ збігаються з відповідними формою (12) та функціоналом (13) нелінійної задачі статки, а білінійна форма буде

$$\mu(u, v) = \iint_{\Omega} \rho h \sum_{i=1}^3 \left(u_i v_i + \frac{h^2}{12} \gamma_i \xi_i \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (15)$$

Побудова схеми методу скінченних елементів для розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Побудуємо числові схеми МСЕ [1, 10, 11, 12] з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій серендипового типу для розв'язування задач деформування таких оболонок, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану.

Вектор переміщень $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, що входить у варіаційну рівність (11), подамо на елементі Ω^* ($\Omega^* = \{(\xi_1, \xi_2) : -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$) у вигляді

$$u = N^k(\xi_1, \xi_2) q^k, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega^*, \quad (16)$$

де $q^k = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_3^1, \dots, \gamma_3^8)^T$ – вектор невідомих вузлових переміщень та поворотів на k -му елементі, $N^k(\xi_1, \xi_2) = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8)$,

$$N_i(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \phi_i & & & & & & & \\ & \phi_i & & & & & & \\ & & \phi_i & & & & & \\ & & & \phi_i & & & & \\ & & & & \phi_i & & & \\ & & & & & \phi_i & & \\ & & & & & & \phi_i & \\ & & & & & & & \phi_i \end{pmatrix},$$

ϕ_i – базисні функції.

Відповідно, вектор шуканих переміщень $u(\alpha, t)$ з варіаційної рівності (14) подамо на елементі Ω^* так:

$$u = N^k(\xi_1, \xi_2) q^k(t), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega^*, \quad (17)$$

де $q^k(t) = (u_1^1(t), u_2^1(t), u_3^1(t), \gamma_1^1(t), \gamma_2^1(t), \gamma_3^1(t), \dots, \gamma_3^8(t))^T$ – вектор невідомих вузлових переміщень та поворотів, що залежить від часу t на k -му елементі.

Після розбиття області Ω на скінченні елементи співвідношення (16) та (17) символічно можна записати так:

$$u = \sum_k N^k(\xi_1(\alpha_1, \alpha_2), \xi_2(\alpha_1, \alpha_2)) q_k = N(\alpha_1, \alpha_2) q, \quad (18)$$

де q – вектор шуканих переміщень та поворотів всього ансамблю скінченних елементів.

Підставивши (18) у варіаційні формулювання (11) та (14), отримаємо системи рівнянь для розв'язку задач статичного та динамічного деформування:

$$K(q)q = R, \quad (19)$$

$$Mq''(t) + K(q(t))q(t) = R(t). \quad (20)$$

Для розв'язування нелінійної системи (19) застосуємо метод Ньютона, який призводить до ітераційної процедури:

$$K_T(q_i)\Delta q + K(q_i)q_i - R = 0, \quad (21)$$

де q_0 – вектор шуканих переміщень лінійної статичної задачі.

Під час знаходження частот лінійних коливань оболонки [2] приходимо до узагальненої задачі на власні значення:

$$K_T(0)\Phi = \omega^2 M\Phi, \quad (22)$$

де ω – колова частота вільних коливань; $\Phi(t) = \{\Phi_i(t)\}$ – невідомі коефіцієнти, які є функціями часу.

Для запису задачі стійкості розглядуваної математичної моделі оболонок використаємо енергетичний критерій визначення стійкості і критичного навантаження втрати стійкості [13].

Рівняння стійкості розглядуваної теорії оболонок запишемо у матричному вигляді:

$$K_T(0)q + \lambda G(q_0)q = 0. \quad (23)$$

Найменше власне значення рівняння (23) визначає критичний параметр навантаження λ^* , за якого оболонка з початкового стійкого стану рівноваги переходить у суміжний.

У співвідношеннях (19)–(23) введено такі позначення:

$K(q) = \iint_{\Omega} \left((C_L + (C_{\Omega} Nq)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega}) N \right)^T E_0 B \left(C_L + \frac{1}{2} (C_{\Omega} Nq)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \right) N d\Omega$ – матриця січної жорсткості,

$K_T(q) = K_U(q) + G(q)$ – матриця тангенціальної жорсткості,

$K_U(q) = \iint_{\Omega} \left((C_L + (C_{\Omega} Nq)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega}) N \right)^T E_0 B \left(C_L + (C_{\Omega} Nq)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \right) N d\Omega$ – матриця переміщень,

$G(q_0) = \iint_{\Omega} \sum_{k=1}^{11} T_k(Nq_0) (C_{\Omega} N)_{11}^T E_k C_{\Omega} N d\Omega$ – геометрична матриця жорсткості або матриця початкових напружень,

$T(q) = (T_1, T_2, \dots, T_{11})^T = E_0 B \left(C_L Nq + \frac{1}{2} (C_{\Omega} Nq)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} Nq \right)$,

$R = \iint_{\Omega} N^T P d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (G_U N)^T \sigma_g d\Gamma_{\sigma}$ – вектор зовнішнього вузлового навантаження,

$M = \iint_{\Omega} N^T m N d\Omega$ – матриця мас.

Числовий приклад. Досліджували задачу про НДС шарнірно опертої прямокутної пластини ($0 \leq \alpha_1 \leq a$, $0 \leq \alpha_2 \leq b$) під дією ударних навантажень (рис. 1). Під ударними розуміємо навантаження, які є нормальними до серединної поверхні пластини та відмінні від нуля на деякій її частині. Співвідношення для визначення такого навантаження має вигляд

$$P(\alpha_1, \alpha_2, t) = \begin{cases} \rho_0, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_0 \text{ та } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \notin \Omega_0 \text{ або } t > t_0. \end{cases}$$

де $\Omega_0 = \{(\alpha_1, \alpha_2) : a_1 \leq \alpha_1 \leq a_2, b_1 \leq \alpha_2 \leq b_2\}$.

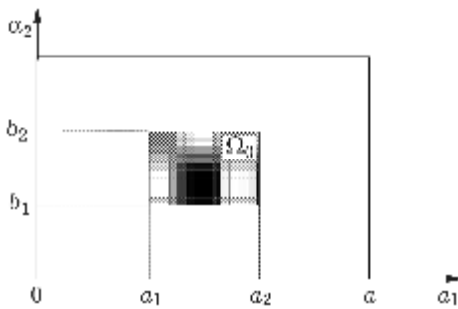


Рис. 1. Прямокутна пластинка.

Задача про лінійне деформування прямокутної пластини за однорідних початкових умов має аналітичний розв'язок у межах теорії Кірхгофа–Лява [4].

НДС пластини досліджували для фіксованого значення $\Omega_0(a_1 = a/3, a_2 = 2a/3, b_1 = b/3, b_2 = 2b/3)$. Значення ρ_0 обирали з умови $\rho_0 t_0 = \text{const}$ (в розглянутому випадку $\text{const} = 80$).

Параметри матеріалу пластини та її розміри такі: густина $\rho = 1$ кг/м³, модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 1$ Н/м², коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, товщина $h = 0,02$ м, $a = 2$ м, $b = 1$ м; $\rho_0 / E = 10^{-5}$.

Розглядали випадок, коли $t_0 = T_1 / 16$ ($t_0 = 5$ с). Тут T_1 – період коливань за першою власною частотою пластини. На рис. 2 побудовано залеж-

ність від часу прогину u_3 у центрі пластини. Крива 1 (◆) відповідає числовому розв'язку, отриманому в межах розглядуваної шестимодальної теорії оболонок на сітці з 36 скінченних елементів з кроком за часом $\Delta t = 0,5$ с; криві 2 (▲), 3 (■) та 5 (○) – аналогічним розв'язкам з кроком за часом $\Delta t = 0,25$ с, 0,125 та 0,0625 відповідно; крива 4 (■) – числовому розв'язку, отриманому на сітці з дев'яти скінченних елементів згідно з шестимодальною теорією з кроком за часом $\Delta t = 0,25$ с; крива 6 (◇) – числовому розв'язку, одержаному в межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка з урахуванням коефіцієнта зсуву з використанням методу Ньюмарка, на сітці з 36 скінченних елементів з кроком за часом $\Delta t = 0,25$ с; крива 7 (–) – аналітичному розв'язку.

Як бачимо, точність визначення прогину суттєво залежить від кількості скінченних елементів і, зменшуючи крок за часом, не вдається збільшити точність знаходження переміщень.

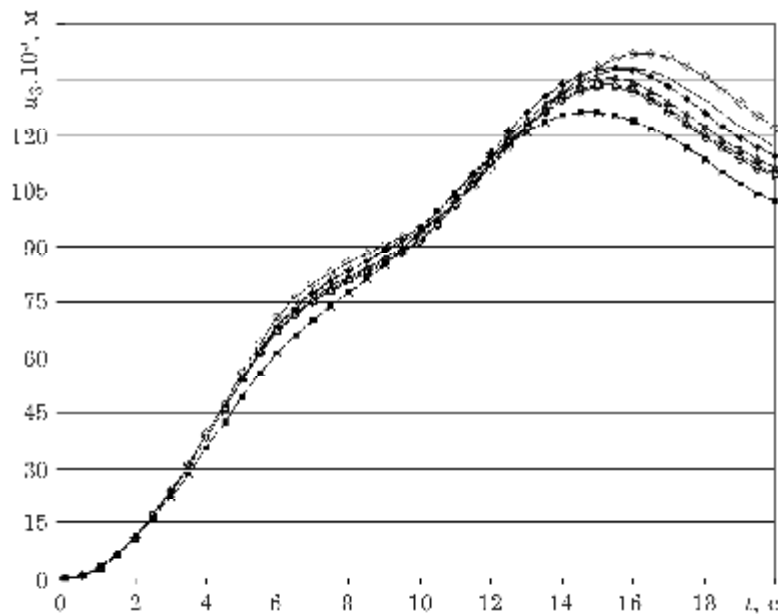


Рис. 2. Зміни в часі прогину u_3 при $t_0 = T_1 / 16$.

Наведені криві демонструють добру узгодженість числових розв'язків з аналітичним та їх збіжність зі збільшенням скінченно-елементного розбиття.

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
2. Вагін П. П., Шот І. Я. Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення // Прикл. проблеми механіки і математики – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
4. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
5. Галимов К. З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 212 с.
6. Галинъш А. К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1967. – Вып. 5. – С. 66–92.

7. Марчук М. В., Хом'як М. М. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. – Львів: Сполом, 2003. – 216 с.
8. Новожилів В. В. Основы нелинейной теории упругости. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 212 с.
9. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
10. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
11. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. М. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Изд-во Львовск. ун-та, 1981. – 88 с.
12. Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T. Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
13. Bernakevych I. E., Vahin P. P., Shot I. Ya. A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression // J. of Math. Sc. – 2012. – 181, № 4. – P. 497–505.

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК, ПОДАТЛИВЫХ К СДВИГАМ И СЖАТИЮ

Для удобства применения численных методов, в частности метода конечных элементов, к решению задач теории тонких оболочек, податливых к сдвигам и сжатию, все ключевые соотношения для определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек при статической и динамической нагрузках, нахождения собственных частот свободных колебаний и начального послекритического состояния записаны в матричном виде. Построены числовые схемы решения задач статического и динамического равновесия, устойчивости и колебаний гибких оболочек, податливых к сдвигам и сжатию.

FINITE-ELEMENT SOLUTION THE PROBLEM OF THE THEORY OF SHELLS AMENABLE TO SHEAR AND COMPRESSION

For the convenience of applying numerical methods, in particular the finite element method, to solving tasks of the theory of thin shells amenable to shear and compression, all key equations for the research the stress-strain state within the considered shells under static and dynamic loading, detecting proper frequencies of free vibrations, and the initial post-critical state, have been noted in the matrix form. Numerical schemes for solving the problems of statics and dynamics, stability and vibrations of flexible shells amenable to shear and compression have been constructed.