УДК 517.955.8

М. Г. Хмельовський[1], В. М. Цимбал[2]

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Побудовано асимптотичні розвинення розв'язків періодичних задач для сингулярно збурених параболічних рівнянь другого порядку.

Вступ. Сингулярно збуреним класичним задачам як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь у частинних похідних різних типів присвячено чимало праць [9, 13, 14].

Велику увагу останнім часом приділяють нелокальним задачам, що пов'язано з різноманітними практичними застосуваннями [7]. Очевидно, актуальне вивчення цих мало досліджених нелокальних сингулярно збурених задач. Ця публікація продовжує дослідження [16, 17].

Формулювання задач. В області $D = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ розглянемо диференціальні рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)u = f(x,t) \tag{2}$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = 0,\ 0 \le x \le 1 \tag{3}$$

і періодичними умовами

$$u(0,t,\varepsilon) = u(1,t,\varepsilon),\ \frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t,\varepsilon)}{\partial x},\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

де $\varepsilon > 0$ − малий параметр.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) Функції $a(x,t)$ та $f(x,t)$, що входять у (1) і (2), достатньо гладкі; ця гладкість, очевидно, зв'язана з порядком асимптотики N.

2) $a(x,t) \ge \alpha > 0$ в D.

За цих умов, очевидно, для кожної з задач (1), (3), (4) і (2), (3), (4) існує єдиний класичний розв'язок. Мета роботи − побудова асимптотичних розвинень розв'язків кожної з задач до будь-якого порядку N і доведення їх асимптотичної коректності.

Побудова формальної асимптотики. Методом примежового шару [3, 4] побудуємо асимптотичні розвинення розв'язків задач (1), (3), (4) і (2), (3), (4) за степенями ε. Під час отримання асимптотики розв'язків використовуємо ідею побудови асимптотики розв'язку допоміжної (простішої) задачі для вихідних рівнянь [3].

Побудуємо формальну асимптотику розв'язку задачі (1), (3), (4). Для цього розглянемо допоміжну задачу

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a(x,t)y = f(x,t) \tag{5}$$

з початковою умовою

$$y(x,0,\varepsilon) = 0,\ 0 \le x \le 1 \tag{6}$$

і крайовими

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 39–46.

$$\frac{\partial y(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i A_i(t), \quad \frac{\partial y(1,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i A_i(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

де $A_i(t)$, $i = \overline{0,N}$ – невідомі функції, $A_i(0) = 0$, $i = \overline{0,N}$.

Формальну асиптотику розв'язку задачі (5)–(7) шукаємо у вигляді

$$y(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (y_i(x,t) + \varepsilon\Pi_i(\xi,t) + \varepsilon Q_i(\eta,t)), \; i = \overline{0,N}, \tag{8}$$

де N (тут і далі) – натуральне число – порядок асимптотики; $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$ – функції регулярної частини асимптотики; $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$, $i = \overline{0,N}$ – функції примежового шару в околах точок $x = 0$, $x = 1$ відповідно; $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $\eta = \dfrac{1-x}{\varepsilon}$ – регуляризувальні перетворення.

Випишемо задачі, з яких визначимо функції, що входять у (8).

Функції регулярної частини асимптотики $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$ є достатньо гладкі при $0 \le x \le 1$ і їх сума з деякою точністю задовольняє рівняння (5) і початкову умову (6).

Функції $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$ є розв'язками задач Коші:

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + a(x,t)y_i = f_i(x,t), \; i = \overline{0,N}, \tag{9}$$

$$y_i(x,0) = 0, \; i = \overline{0,N}, \tag{10}$$

де $f_0(x,t) \equiv f(x,t)$; $f_1(x,t) \equiv 0$, $f_i(x,t) \equiv \dfrac{\partial^2 y_{i-2}}{\partial x^2}$, $i = \overline{2,N}$. Вони виражені рекурентно і їх легко записати в явному вигляді.

Функції примежового шару $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$ служать для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$ задовольнити крайову умову $\dfrac{\partial y(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i A_i(t)$.

Функції примежового шару в околі $x = 0$ $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$ визначимо як розв'язки таких задач:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} + a(0,t)\Pi_i = \psi_i(\xi,t), \; i = \overline{0,N}, \tag{11}$$

$$\Pi_i(\xi,0) = 0, \; i = \overline{0,N}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,t)}{\partial \xi} = A_i(t) - \frac{\partial y_i(0,t)}{\partial x}, \; i = \overline{0,N}, \tag{13}$$

$$\lim_{\xi \to \infty} \Pi_i(\xi,t) = 0, \; i = \overline{0,N}, \tag{14}$$

де $\psi_0(\xi,t) \equiv 0$; $\psi_i(\xi,t)$, $i = \overline{1,N}$, легко записати в явному вигляді і вони залежать лінійно від $\Pi_j(\xi,t)$, $j < i,$; $A_i(t)$, $i = \overline{0,N}$ – невідомі функції.

Як бачимо, функції $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$ є розв'язками другої граничної задачі для параболічного рівняння другого порядку (11)–(14) і визначаються, з урахуванням вже знайдених функцій $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$, рекурентно. Додаткові умови (14) забезпечують примежовий характер функцій $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$.

Тут і надалі всі функції примежового шару домножимо на зрізальні функції [2] і за ними збережемо старі позначення. Розв'язки задач (11)−(14) запишемо в явному вигляді [1] і, як показано у [8], вони є функції примежового шару.

Функції примежового шару $Q_i(\eta, t)$, $i = \overline{0, N}$, які служать для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $y_i(x, t)$, $i = \overline{0, N}$ задовольнити крайову умову $\dfrac{\partial y(1, t, \varepsilon)}{\partial x} = \sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i A_i(t)$, визначимо аналогічно, як і функції $\Pi_i(\xi, t)$, $i = \overline{0, N}$.

Таким чином, можемо вважати, що формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (5)−(7) побудовано. Залишається знайти невідомі функції $A_i(t)$, $i = \overline{0, N}$. Для цього використаємо явний вигляд асимптотичного розвинення розв'язку задачі (5)−(7), а також першу умову (4):

$$y_i(0,t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\left(A_i(t) - \dfrac{\partial y_i(0,t)}{\partial x} \right)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\int_\tau^t a(0,s)ds} d\tau =$$

$$= y_i(1,t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\left(\dfrac{\partial y_i(1,t)}{\partial x} - A_i(t) \right)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\int_\tau^t a(1,s)ds} d\tau, \; i = \overline{0, N}. \tag{15}$$

Виконавши елементарні перетворення у (15), отримаємо рівняння для знаходження $A_i(t)$, $i = \overline{0, N}$:

$$\int_0^t A_i(\tau) \frac{K(t,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = f(t), \; i = \overline{0, N}, \tag{16}$$

де $K(t,\tau) = e^{-\int_\tau^t a(1,s)ds} + e^{-\int_\tau^t a(0,s)ds}$, $f(t) = \sqrt{\pi}(y_i(0,t) - y_i(1,t)) +$

$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left(\frac{\partial y_i(0,t)}{\partial x} e^{-\int_\tau^t a(0,s)ds} + \frac{\partial y_i(1,t)}{\partial x} e^{-\int_\tau^t a(1,s)ds} \right) d\tau.$$

Це інтегральне рівняння Вольтерра першого роду зі слабкою особливістю. Однозначна розв'язальність (16) показана у [6]. Таким чином, отримали формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1), (3), (4).

Побудуємо формальну асимптотику розв'язку задачі (2), (3), (4). Для цього розглянемо допоміжну задачу

$$\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a(x,t) y = f(x,t) \tag{17}$$

з початковою умовою (6) і крайовими

$$\frac{\partial y(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (\alpha_i(t) + \beta_i(\tau)), \; \frac{\partial y(1,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (\alpha_i(t) + \beta_i(\tau)),$$

$$0 \le t \le T, \tag{18}$$

де $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{0, N}$ − невідомі функції; $\alpha_i(0) = \beta_i(0) = 0$, $i = \overline{0, N}$, $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$ − регуляризувальне перетворення.

Асимптотику розв’язку задачі (17), (6), (18) шукаємо методом примежового шару [3, 4] з використанням функцій кутового примежового шару [2].

Формальну асимптотику розв’язку задачі (17), (6), (18) будуємо у вигляді

$$y(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(y_i(x,t)+\Pi_i(x,\tau)+\varepsilon Q_i(\xi,t)+\varepsilon\tilde{Q}_i(\eta,t)+ +\varepsilon P_i(\xi,\tau)+\varepsilon\tilde{P}_i(\eta,\tau)),$$

$$(x,t)\in D, \tag{19}$$

де $y_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ – функції регулярної частини асимптотики; $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $\tilde{Q}_i(\eta,t)$, $i=\overline{0,N}$ – функції примежового шару в околах точок $t=0$, $x=0$, $x=1$ відповідно; $P_i(\xi,\tau)$, $\tilde{P}_i(\eta,\tau)$, $i=\overline{0,N}$ – кутові функції примежового шару в околах вершин $(0,0)$ і $(1,0)$ відповідно; $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $\eta=\dfrac{1-x}{\varepsilon}$ – регуляризувальне перетворення.

Випишемо задачі, з яких знайдемо функції, що входять у (19). Їх визначають стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $y_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ є достатньо гладкі при $0\le x\le 1$ і їх сума задовольняє рівняння (17) з деякою точністю.

Їх легко подати в явному вигляді

$$y_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{a(x,t)},\ \ y_1(x,t)=\frac{-\dfrac{\partial y_0}{\partial t}}{a(x,t)},\ y_i(x,t)=\frac{\dfrac{\partial^2 y_{i-2}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial y_{i-1}}{\partial t}}{a(x,t)},\ i=\overline{2,N} \tag{20}$$

і, як бачимо, виразити рекурентно.

Функції примежового шару в околі $t=0$ $\Pi_i(x,\tau)$, $i=\overline{0,N}$ служать для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $y_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ задовольнити початкову умову (6).

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$, $i=\overline{0,N}$ визначимо як розв’язки таких задач (x-параметр):

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}+a(x,0)\Pi_i=\pi_i(x,\tau),\ i=\overline{0,N}, \tag{21}$$

$$\Pi_i(x,0)=-y_i(x,0),\ i=\overline{0,N}, \tag{22}$$

де $\pi_0(x,\tau)\equiv 0$; $\pi_i(x,\tau)$, $i=\overline{1,N}$ легко записати в явному вигляді і вони залежать лінійно від $\Pi_j(x,\tau)$, $j<i$.

Функції $\Pi_i(x,\tau)$, $i=\overline{0,N}$ є розв’язками задач Коші. Їх легко записати в явному вигляді і визначити, з урахуванням вже знайдених функцій $y_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$, рекурентно. Крім того, з огляду на припущення 2), $\Pi_i(x,\tau)$, $i=\overline{0,N}$ – функції примежового шару в околі $t=0$.

Функції примежового шару в околі $x=0$ $Q_i(\xi,t)$, $i=\overline{0,N}$ служать для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $y_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ задовольнити крайову умову $\dfrac{\partial y(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\alpha_i(t)$.

Функції примежового шару $Q_i(\xi,t)$, $i=\overline{0,N}$ визначимо як розв’язки таких задач (t-параметр):

$$-\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^2} + a(0,t)Q_i = \psi_i(\xi,t),\ i = \overline{0,N}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial \xi} = \alpha_i(t) - \frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x},\ i = \overline{0,N}, \tag{24}$$

$$\lim_{\xi\to\infty} Q_i(\xi,t) = 0,\ i = \overline{0,N}, \tag{25}$$

де $\psi_0(\xi,t) \equiv 0$; $\psi_i(\xi,t),\ i = \overline{1,N}$ легко виписати в явному вигляді і вони залежать лінійно від $Q_j(\xi,t),\ j < i$.

Як бачимо, функції $Q_i(\xi,t),\ i = \overline{0,N}$ є розв'язками звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, їх легко записати в явному вигляді і визначити, з урахуванням вже знайдених функцій $y_i(x,t),\ i = \overline{0,N}$, рекурентно. Додаткові умови (25) забезпечують примежовий характер функцій $Q_i(\xi,t),\ i = \overline{0,N}$.

Функції примежового шару в околі $x = 1$ $\tilde{Q}_i(\eta,t),\ i = \overline{0,N}$, які служать для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $y_i(x,t),\ i = \overline{0,N}$ задовольнити крайову умову $\dfrac{\partial y(1,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i \alpha_i(t)$, визначимо аналогічно, як і функції $Q_i(\xi,t),\ i = \overline{0,N}$.

Зауважимо, що функції $\Pi_i(x,\tau),\ i = \overline{0,N}$, які забезпечують виконання початкової умови (6), вносять нев'язку в крайові умови при $x = 0$ і $x = 1$, а функції $Q_i(\xi,t)$ і $\tilde{Q}_i(\eta,t),\ i = \overline{0,N}$, які забезпечують виконання крайових умов (18), в початкову умову при $t = 0$. Ці нев'язки через те, що $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$ і $\tilde{Q}_i(\eta,t),\ i = \overline{0,N}$ – функції примежового шару, зосереджені лише поблизу кутових точок (0,0) і (1,0). Для усунення цих нев'язок служать кутові функції примежового шару $P_i(\xi,\tau),\ \tilde{P}_i(\eta,\tau),\ i = \overline{0,N}$.

Функції кутового примежового шару в околі точки (0,0) $P_i(\xi,\tau),\ i = \overline{0,N}$ визначимо як розв'язки задач

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2} + a(0,0)P_i = \rho_i(\xi,\tau),\ i = \overline{0,N}, \tag{26}$$

$$P_i(\xi,0) = -Q_i(\xi,0),\ i = \overline{0,N}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial P_i(0,\tau)}{\partial \xi} = \beta_i(\tau) - \frac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x},\ i = \overline{0,N}, \tag{28}$$

$$\lim_{\sqrt{\xi^2+\tau^2}\to\infty} P_i(\xi,\tau) = 0,\ i = \overline{0,N}, \tag{29}$$

де $\rho_0(\xi,\tau) \equiv 0$; $\rho_i(\xi,\tau),\ i = \overline{1,N},$ залежать лінійно від $P_j(\xi,\tau),\ j < i$ і їх легко виписати в явному вигляді.

Як бачимо, функції $P_i(\xi,\tau),\ i = \overline{0,N}$ є розв'язками другої граничної задачі для параболічного рівняння другого порядку (26)–(29) і визначаються, з урахуванням вже знайдених функцій $\Pi_i(x,\tau)$ і $Q_i(\xi,t),\ i = \overline{0,N}$, рекурентно. Додаткові умови (29) забезпечують примежовий характер функцій $P_i(\xi,\tau),\ i = \overline{0,N}$.

Розв'язки задач (26)–(28) запишемо в явному вигляді [1] і, з огляду на припущення 2), є функції примежового шару [2].

Функції кутового примежового шару в околі точки (1,0) $\tilde{P}_i(\eta,\tau),\ i=\overline{0,N}$ визначимо аналогічно, як і функції $P_i(\xi,\tau),\ i=\overline{0,N}$.

Механізм знаходження невідомих функцій $\alpha_i(t)$ і $\beta_i(\tau)$, $i=\overline{0,N}$ покажемо для випадку $i=0$. Для цього використаємо явний вигляд асимптотичного розвинення розв'язку задачі (17), (6), (18) при $i=0$, а також першу з умов (4) $y(0,t,\varepsilon)=y(1,t,\varepsilon)$:

$$u_0(0,t)+(\gamma_0(0)-u_0(0,0))e^{-a(0,0)\tau}-\sqrt{a(0,t)}(\alpha_0(t)-\frac{\partial u_0(0,t)}{\partial x})-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a(0,0)\tau}\int_0^{+\infty}Q_0(\alpha,0)\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4\tau}}d\alpha-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-a(0,0)\tau}\int_0^{\tau}\frac{e^{a(0,0)z}(\beta_0(z)-\frac{\partial \Pi_0(0,z)}{\partial x}))}{\sqrt{\tau-z}}dz=$$

$$=u_0(1,t)+(\gamma(1)-u_0(1,0))e^{-a(1,0)\tau}-\sqrt{a(1,t)}(\alpha_0(t)-\frac{\partial u_0(1,t)}{\partial x})-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a(1,0)\tau}\int_0^{+\infty}Q_0(\alpha,0)\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4\tau}}d\alpha-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-a(1,0)\tau}\int_0^{\tau}\frac{e^{a(1,0)z}(\beta_0(z)-\frac{\partial \Pi_0(1,z)}{\partial x}))}{\sqrt{\tau-z}}dz. \quad (30)$$

Виконавши елементарні перетворення у (30), окремо прирівнявши функції, які залежать від t і τ, отримаємо рівняння для знаходження $\alpha_0(t)$ і $\beta_0(\tau)$.

Функція $\alpha_0(t)$ має вигляд

$$\alpha_0(t)=\frac{1}{\sqrt{a(1,t)}-\sqrt{a(0,t)}}(u_0(1,t)-u_0(0,t)+$$

$$+\sqrt{a(1,t)}\frac{\partial u_0(1,t)}{\partial x}-\sqrt{a(0,t)}\frac{\partial u_0(0,t)}{\partial x}). \quad (31)$$

Для знаходження $\beta_0(\tau)$ отримаємо рівняння

$$\int_0^{\tau}\beta_0(z)\frac{K(z,\tau)}{\sqrt{\tau-z}}dz=f(\tau),\ i=\overline{0,N}, \quad (32)$$

де $K(z,\tau)=e^{a(1,0)(z-\tau)}-e^{a(0,0)(z-\tau)}$;

$$f(\tau)=\sqrt{\pi}e^{-a(1,0)\tau}(\gamma(1)-u_0(1,0))-\sqrt{\pi}e^{-a(0,0)\tau}(\gamma(0)-u_0(0,0))+\frac{1}{\sqrt{t}}(e^{-a(0,0)\tau}-$$

$$-e^{-a(1,0)\tau})\int_0^{\tau}Q_0(\alpha,0)e^{-\frac{\alpha^2}{4\tau}}d\alpha+\int_0^{\tau}\frac{e^{a(1,0)(z-\tau)}}{\sqrt{t-z}}\cdot\frac{\partial \Pi_0(1,z)}{\partial x}dz-\int_0^{\tau}\frac{e^{a(0,0)(z-\tau)}}{\sqrt{\tau-z}}\cdot\frac{\partial \Pi_0(0,z)}{\partial x}dz.$$

За допомогою згортки інтегральне рівняння Вольтерра першого роду зі слабкою особливістю (32) зведемо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, однозначна розв'язальність якого показана у [6]. Таким чином, отримали формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (2), (3), (4).

Оцінка залишкових членів. Враховуючи, що знайдені формальні асимптотичні розвинення наближають розв'язки задач (1), (3), (4) і (2), (3), (4) до порядку N, то в асимтотиках є ще доданки, в яких ε входить у степені $N+1$ і вище. Позначимо їх $\varepsilon^{N+1}R_N$ і називатимемо залишковими членами асимптотики.

Стандартною процедурою отримаємо задачі для R_N, подібні до вихідних.

Для задачі (1), (3), (4) матимемо:

$$\frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + a(x,t)R_N = \psi(x,t), \tag{33}$$

$$R_N(x,0) = 0, (0 \le x \le 1), \tag{34}$$

$$R_N(0,t) = R_N(1,t), \frac{\partial R_N(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial R_N(1,t)}{\partial x}, (0 \le t \le T), \tag{35}$$

де функцію $\psi(x,t)$ легко можна записати в явному вигляді і вона обмежена у D в L_2 нормі.

Оцінку $R_N(x,t)$ отримаємо методом інтегралів енергії [5]. Для цього домножимо (33) на $2R_N$ і, зводячи до дивергентного вигляду, матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(R_N{}^2) + \frac{\partial}{\partial x}(-2\varepsilon^2 \frac{\partial R_N}{\partial x} R_N) + 2\varepsilon^2 \left(\frac{\partial R_N}{\partial x}\right)^2 + 2a(x,t)R_N{}^2 = 2\psi(x,t)R_N \;. \tag{36}$$

Інтегруючи (36) по області D, використовуючи формулу Гаусса−Остроградського, умови (34), (35), після простих перетворень одержуємо:

$$\alpha \iint_D R_N{}^2 dxdt \le \iint_D \psi(x,t)R_N \; dxdt \,. \tag{37}$$

Оцінюючи праву частину (37) за допомогою нерівності Коші з параметром і вибираючи його достатньо малим, матимемо:

$$\|R_N\|_{L_2(D)} \le C\|\psi\|_{L_2(D)}, \tag{38}$$

де C, очевидно, не залежить від малого параметра ε.

Для задачі (1), (3), (4) отримуємо

$$\varepsilon \frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + a(x,t)R_N = \psi(x,t) \tag{39}$$

з умовами (34), (35).

Міркуючи, як і у попередньому випадку, приходимо до аналогічного результату.

Висновки. Результат роботи можна сформулювати так.

Теорема. Припустимо, що виконуються умови 1); 2). Тоді розв'язки задач (1), (3), (4) і (2), (3), (4) допускають асимптотичне розвинення довільного порядку N виду (8) і (19), де додатково додається $\varepsilon^{N+1}R_N$ − залишковий член асимптотики. Усі функції, що у них входять, отримують рекурентно в явному вигляді. Функції $A_i(t)$, $i = \overline{0,N}$, які входять в асимптотику задачі (5)−(7), а також $\beta_i(t)$, $i = \overline{0,N}$, які входять в асимптотику задачі (17), (6), (18), знаходять як розв'язки інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду зі слабкою особливістю вигляду (16) і (32) відповідно, $\alpha_i(t)$, визначають в явному вигляді зі співвідношень, аналогічних (31). Залишкові члени розвинень є порядку $O(\varepsilon^{N+1})$ у нормі $L_2(D)$.

Зауваження 1. Отриманий результат дає наближений розв'язок вихідної задачі, а також його можна використати для побудови ефективних обчислювальних алгоритмів розв'язків задач (1), (3), (4) і (2), (3), (4) [15].

Зауваження 2. Результат роботи анонсовано у [12].

Зауваження 3. Подібна періодична задача для рівняння параболічного типу другого порядку з малим параметром, що входить множником тільки при похідній за часовою змінною, розглянута раніше [10, 11].

1. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1979. – 685 с.
2. *Бутузов В. Ф., Нестеров А. В.* Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестник Моск. ун–та. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. – 1978. – № 2. – С. 19–56.
3. *Васильева А. Б, Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 832 с.
6. *Манжиров А. В., Полянин А. Д.* Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 384 с.
7. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Сушко В. Г.* Асимптотические решения некоторых сингулярно возмущенных уравнений смешанного типа // Фундаментальная и прикл. математика. – 1997. – **3**, № 2. – С. 579–586.
9. *Треногин В. А.* Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика // Успехи матем. наук. – 1970. – 25, вып. 4. – С. 123–156.
10. *Хмельовський М. Г.* Періодична задача для сингулярно збуреного параболічного рівняння другого порядку // Наук. зб. Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача. – 2008. – № 6. – С. 111–114.
11. *Хмельовський М. Г.* Періодична задача для сингулярно збуреного параболічного рівняння другого порядку // Тези доп. Конф. молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача, Львів, 24–27 травня 2005. – С. 325.
12. *Хмельовський М. Г., Цимбал В. М.* Періодична задача для сингулярно збуреного параболічного рівняння другого порядку // Тези доп. Міжвуз. наук.-техн. конф. наук.-пед. працівників. – Львів, 21–22 березня 2006. – С. 246.
13. *Lions I. L.* Perturbations singuliéres dans les problémes aux limites et en contrôle optimal // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1973. – **323**. – 540 p.
14. *Morosanu G., Barbu L.* Singularly perturbed boundary value problems. – Basel-Boston-Berlin: Biekhдuser, 2007.— 230p.
15. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
16. *Tsymbal V., Flud V.* Pewne nielokalne zagadnienie dla silnie zaburzonego równania różniczkowego zwyczajnego // Zesz. Nauk. Politechniki Opolskiej. Ser. matem. – 2002. – **18**. – S. 27–35.
17. *Tsymbal V., Flud V.* O pewnym nielokalnym zagadnieniu dla równania różniczkowego zwyczajnego // Ibid.– S. 21–26.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Построено асимптотическое разложение решений периодической задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения второго порядка.

PERIODIC PROBLEMS FOR SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Asymptotic expantions of the solutions to the singularly perturbed parabolic periodic problems of the second order equations are constructed.

[1]Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів
[2]Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
11.04.11