УДК 517.95

І. Я. Кміть

ПРО РЕГУЛЯРИЗАТОРИ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Подано огляд недавніх результатів з регулярності та фредгольмовості для гіперболічних операторів першого порядку. Показано, що гіперболічний оператор підвищує гладкість і моделюється фредгольмовим оператором нульового індексу. Ефект підвищення гладкості дає ключ у пошуку регуляризаторів (параметриксів) для гіперболічних задач. Побудовано регуляризатори для лінійних одновимірних гіперболічних систем першого порядку з періодичними умовами та умовами відображення від межі області.

Порівняно зі звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями параболічного типу, властивості фредгольмовості та регулярної поведінки розв'язків гіперболічних задач є значно менш зрозумілі, а відтак, потребують розвитку аналітичного апарату для їх вивчення. У працях [6, 17–20], серед яких [6, 19, 20] написані спільно з Лютцом Рекке, детально проаналізовано окреслене коло питань для одновимірних гіперболічних операторів першого порядку. Мета цього огляду – підсумувати недавні результати авторів, що стосуються якісної теорії гіперболічних рівнянь таких, як ефект підвищення гладкості, побудова регуляризаторів та властивість фредгольмовості нульового індексу для мішаних та періодичних задач. Усі ці питання тісно пов'язані з властивостями регулярності гіперболічних операторів, а саме:

- розв'язки гіперболічних рівнянь мають різні властивості регулярності в характеристичних та нехарактеристичних напрямках, що призводить до т. зв. ефекту втрати гладкості;
- сингулярності поширюються вздовж характеристик [24], що в загальному унеможливлює підвищення гладкості.

Це ускладнює доведення фредгольмовості для гіперболічних задач, зокрема, використання базового факту про те, що будь-який фредгольмовий оператор є компактним збуренням бієктивного оператора.

Пропонуємо загальний підхід до доведення фредгольмовості для одновимірних гіперболічних задач і демонструємо його на прикладі періодичних задач з розсіянням для загальних гіперболічних систем першого порядку, записаних у канонічній формі Шаудера. Підхід базується на побудові правого параметриксу (правого регуляризатора) задачі. Регуляризатори мішаних задач для лінійних гіперболічних систем першого порядку, які використовують для побудови резольвент, знайдено, зокрема, в праці [8].

Результати з *фредгольмовості* охоплюють нестрого гіперболічні системи з розривними коефіцієнтами, але вони є новими й для строгої гіперболічності та гладких коефіцієнтів.

Ефект *підвищення гладкості* має динамічну природу. Для мішаних задач неперервний розв'язок у визначений момент часу стає k разів неперервно диференційовним для кожного k. Для періодичних задач, коли задано $k_0 \in$ ¥ і достатньо гладкі дані, ядро задачі не залежить від $k \le k_0$ і кожний неперервний її розв'язок є k_0 разів неперервно диференційовним за t.

Математично ці результати застосовні в теорії стійкості, біфуркаційного аналізу та теорії синхронізацій. На практиці мають потенційне застосування в математичній біології [13–15, 22], хімічній кінетиці [1–4, 9] та в динаміці напівпровідникових лазерів [21, 25, 26].

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 23–38.

Підвищення гладкості. Розв'язки гіперболічних рівнянь демонструють широкий спектр динамічної поведінки регулярності. Сингулярності (ударні хвилі, градієнтні катастрофи [10, 16]) у нелінійних задачах можуть з'являтися за скінченний проміжок часу навіть за малих і гладких вихідних даних [11]. У деяких випадках – як лінійних, так і нелінійних, – розв'язки з часом можуть або зберігати свою початкову регулярність, або ж змінювати її. Нас цікавитиме останній випадок. В області $\Pi = \{(x,t)|0 < x < 1, t > 0\}$ розглянемо задачу

$$(\partial_t + a(x,t)\partial_x + b(x,t))u = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u_i(1,t) &= h_i(t, v(t)), \quad 1 \le i \le k, \ \ t \in (0,\infty), \\ u_i(0,t) &= h_i(t, v(t)), \quad k < i \le n, \ \ t \in (0,\infty), \end{aligned} \tag{3}$$

де u, f, φ – дійсні n-вектори, $b = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $a = diag(a_1, \mathbf{K}, a_n)$;

$$v(t) = (v_1(t), \mathbf{K}, v_n(t)) = (u_1(0,t), \mathbf{K}, u_k(0,t), u_{k+1}(1,t), \mathbf{K}, u_n(1,t)).$$

Припускаємо, що система є строго гіперболічна,

$$a_1 < \mathbf{K} < a_k < 0 < a_{k+1} < \mathbf{K} < a_n \tag{4}$$

для всіх $(x,t) \in \overline{\Pi}$. Вважаємо, що a, b, f і $h = (h_1, \mathbf{K}, h_n)$ є гладкими, у той час як φ – лише неперервна. Під неперервним розв'язком задачі (1)–(3) розумітимемо неперервну вектор-функцію в $\overline{\Pi}$, яка задовольняє систему інтегральних рівнянь, еквівалентну до (1)–(3).

Означення 1. Говоритимемо, що неперервний розв'язок u задачі (1)–(3) *підвищує гладкість*, якщо для будь-якого $m \in \mathbf{N}$ існує таке $T > 0$, що $u \in C^m\left(\overline{\Pi} \cap \{t \ge T\}\right)^n$.

Основним результатом цього параграфа є критерій підвищення гладкості для розв'язків задачі (1)–(3). Результати про підвищення гладкості для часткових випадків задачі (1)–(3) отримано раніше в [5, 7, 23].

Припускаємо, що $\varphi(x)$ є неперервна і

$$\begin{aligned} \varphi_i(0) &= h_i(0, v(0)), \qquad k+1 \le i \le n, \\ \varphi_i(1) &= h_i(0, v(0)), \qquad 1 \le i \le k, \end{aligned} \tag{5}$$

де $v(0) = (\varphi_1(0), \mathbf{K}, \varphi_k(0), \varphi_{k+1}(1), \mathbf{K}, \varphi_n(1))$. Через $\|\cdot\|$ позначимо евклідову норму в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 1 [17]. *Припустимо, що* a_i, b_{ij}, f_i, φ_i, h_i *є неперервні функції за всіма аргументами. Крім цього, коефіцієнти* a_i *є ліпшицевими за* $x \in [0,1]$ *локально за* $t \in [0,\infty)$. *Нехай* $h_i(t,z)$ *є неперервно диференційовні за* $z \in \mathbf{R}^n$ *і для кожного* $T > 0$ *існує таке* $C > 0$, *що*

$$\|\nabla_z h(t,z)\| \le C\,(\log\log H(t, \mathbf{P}\, z\, \mathbf{P}))^{1/4}, \tag{6}$$

де H *– поліном за* $\|z\|$ *з коефіцієнтами в* $C[0,T]$. *Якщо виконуються умови (5), то задача (1)–(3) має єдиний неперервний розв'язок в* $\overline{\Pi}$.

Позначимо через $\omega_i(\tau; x, t)$ характеристику i-го рівняння (1), яка проходить через точку $(x,t) \in \overline{\Pi}$. Нехай χ – деяка характеристика i-го рівняння системи (1). Припустимо, що χ досягає $\partial\Pi$ у двох точках, причому (x,t) позначає одну із них з більшою ординатою. Очевидно, що при цьому $x=0$ або $x=1$. Говоритимемо, що χ *відображається* в точці (x,t), якщо $\partial_z h_j(t, v_1(t), \mathbf{K}, v_{i-1}(t), z, v_{i+1}(t), \mathbf{K}, v_n(t)) \neq 0$ для деякого $j \le n$ і $z \in \mathbf{R}$. У цьому випадку характеристики $\omega_j(\tau; x, t)$ і $\omega_j(\tau; 1-x, t)$, які лежать вище прямої $\{\tau = t\}$, називають *відображеннями* χ.

Означення 2. Послідовність характеристик $\chi_1, \chi_2, \mathbf{K}$ називають *траєкторією поширення розв'язку (ТПР),* якщо кожна χ_{l+1} є відображенням χ_l.

Покладемо $\Pi^T = \{(x,t) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$.

Теорема 2. *Нехай* a_i, b_{ij}, f_i і h_i *є гладкі функції за всіма аргументами, а також виконуються умови (4), (6). Припустимо, що для кожного* $T > 0$ *існує таке* $T' > T$, *що для всіх* $x \in [0,1]$ *усі* ТПР, *які проходять через* (x,T), *розташовані нижче прямої* $t = T'$.

Тоді неперервний розв'язок задачі (1)–(3) підвищує гладкість для кожної $\varphi \in C[0,1]^n$, *що справджує рівності (5).*

Доведення. Визначимо послідовність $T_1, T_2, \mathbf{K}$ індуктивно за таким правилом. Значення T_1 визначають інфімум тих значень $\tau > 0$, для яких існує x і ТПР, що проходить через точку $(x,0)$ і лежить нижче $t=\tau$; величину T_j для $j > 1$ визначають як інфімум тих значень $\tau > 0$, для яких існує x і ТПР, що проходить через точку (x, T_{j-1}) і лежить нижче $t = T_{j-1}$. За теоремою 1 задача (1)–(3) має єдиний неперервний розв'язок u в $\overline{\Pi}$. Достатньо показати, що $u \in C^j\left(\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_j}\right)^n$.

Розглянемо спочатку задачу (1)–(3) в $\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_1}$. Тут розв'язок справджує систему інтегральних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&u_i(x,t) = E_i(t_i(x,t); x,t) h_i(t_i(x,t), v(t_i(x,t))) + \\
&+\int_{t_i(x,t)}^{t} E_i(\tau; x,t)\left[-\sum_{j\neq i} b_{ij}(\xi,\tau) u_j(\xi,\tau) + f_i(\xi,\tau)\right]\Big|_{\xi=\omega_i(\tau;x,t)} d\tau, \qquad i \le n,
\end{aligned} \tag{7}
$$

де $E_i(\tau; x,t) = \exp\int_t^\tau b_{ii}(\omega_i(\tau_1; x,t), \tau_1) d\tau_1$, $t_i(x,t)$ – найменше значення $\tau \ge 0$, за якого характеристика $\xi = \omega_i(\tau; x,t)$ досягає $\partial\Pi$. Надалі поруч із рівнянням $\xi = \omega_i(\tau; x,t)$ також використовуватимемо обернене рівняння $\tau = \tilde{\omega}_i(\xi; x,t)$. Згідно з означенням T_1,

$$
\begin{aligned}
&v_j(t_i(x,t)) = E_j(t_j(x_j, t_i(x,t)); x_j, t_i(x,t)) h_j(t_j(x_j, t_i(x,t)), v(t_j(x_j, t_i(x,t)))) + \\
&+\int_{t_j(x_j, t_i(x,t))}^{t_i(x,t)} E_j(\tau; x_j, t_i(x,t))\left[-\sum_{s\neq j} b_{js}(\xi,\tau) u_s(\xi,\tau) + f_j(\xi,\tau)\right]\Big|_{\xi=\omega_j(\tau; x_j, t_i(x,t))} d\tau,
\end{aligned}
$$

де $x_j = 0$, якщо $1 \le j \le k$, і $x_j = 1$, якщо $k+1 \le j \le n$. Продовжуючи подібно, праву частину зведемо до вигляду, який не залежить від v і φ. Зведену задачу позначатимо (7'). Доведемо спочатку, що u володіє $C_x^1\left(\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_1}\right)$-регулярністю. Достатньо показати, що права частина (7') має неперервну похідну за x. Для цього зробимо заміну змінних у кожному інтегралі в (7'). Перетворення проілюструємо на прикладі інтегрального виразу

$$I_{ijm}(x,t)=\int_{t_j(x_j,t_i(x,t))}^{t_i(x,t)}E_j(\tau;x_j,t_i(x,t))b_{jm}(\xi,\tau)u_m(\xi,\tau)\,|_{\xi=\omega_j(\tau;x_j,t_i(x,t))}d\tau,$$

де $i\le k$, $j\ge k+1$, $m\le k$ і $t_m(1,t_j(x_i,t_i(x,t)))>0$. Звідси $x_i=0$ і $x_j=1$. З огляду на (7) отримуємо (з точністю до знака):

$$I_{ijm}(x,t)=\int_{t_j(0,t_i(x,t))}^{t_i(x,t)}E_j(\tau;0,t_i(x,t))b_{jm}(\xi,\tau)[E_m(t_m(\xi,\tau);\xi,\tau)h_m(t_m(\xi,\tau),v(t_m(\xi,\tau))+$$

$$+\int_{t_m(\xi,\tau)}^{\tau}E_m(\tau_1;\xi,\tau)\{-\sum_{p\ne m}(b_{mp}u_p+f_m)(z,\tau_1)\}\,|_{z=\omega_m(\tau_1;\xi,\tau)}d\tau_1]\,|_{\xi=\omega_j(\tau;0,t_i(x,t))}\;d\tau=$$

$$=\int_{t_m(1,t_j(0,t_i(x,t)))}^{t_i(x,t)}E_j(\rho;0,t_i(x,t))b_{jm}(\eta,\rho)E_m(\tau;\eta,\rho)\frac{a_m(0,\tau)}{(a_m-a_j)(\eta,\rho)}\times$$

$$\times\exp\left\{\int_\tau^\rho a'_{m\xi}(\xi,\sigma)\,|_{\xi=\omega_m(\sigma;\eta,\rho)}d\sigma\right\}|_{\rho=\theta(0,\tau;x,t),\eta=\omega_m(\rho;0,\tau)}\;h_m(\tau,v(\tau))d\tau+$$

$$+\int_{S_m}E_j(\rho;0,t_i(x,t))b_{jm}(\eta,\rho)E_m(\tau;\eta,\rho)\frac{1}{(a_m-a_j)(\eta,\rho)}\times$$

$$\times\exp\left\{\int_\tau^\rho a'_{m\xi}(\xi,\sigma)\,|_{\xi=\omega_m(\sigma;\eta,\rho)}d\sigma\right\}|_{\rho=\theta(\xi,\tau;x,t),\eta=\omega_m(\rho;\xi,\tau)}\times \tag{8}$$

$$\times\left\{-\sum_{p\ne m}b_{mp}(\xi,\tau)u_p(\xi,\tau)+f_m(\xi,\tau)\right\}d\xi\partial\tau,$$

де

$$S_m=\{(\xi,\tau):0\le\xi\le 1,\omega_m(\xi;1,t_j(0,t_i(x,t)))\le\tau\le\omega_j(\xi;0,t_i(x,t))\},$$

$\theta(\xi,\tau;x,t)$ позначає t-координату точки, де характеристики $\omega_j(\tau_1;0,t_i(x,t))$ і $\omega_m(\tau_1;\xi,\tau)$ перетинаються. Оскільки $\theta(\xi,\tau;x,t)$ є C_x^1-гладкою, то цією ж гладкістю володіє і функція $I_{ijm}(x,t)$. Отже, права частина (7') є неперервно диференційовною за x, а відтак $\partial_x u\in C\left(\overline{\Pi}\setminus\Pi^{T_1}\right)^n$. Той факт, що u належить до $C^1\left(\overline{\Pi}\setminus\Pi^{T_1}\right)^n$ випливає зі системи (1).

На наступному кроці доводимо, що $u\in C^2\left(\overline{\Pi}\setminus\Pi^{T_2}\right)^n$. Для $\partial_x u$ записуємо систему

$$\begin{aligned}\partial_x u_i(x,t)=(R_iu)(x,t)+\int_{t_i(x,t)}^{t}E_i(\tau;x,t)[-\sum_{j\ne i}b_{ij}(\xi,\tau)\partial_\xi u_j(\xi,\tau)-\\-\partial_\xi a_i(\xi,\tau)\partial_\xi u_i(\xi,\tau)+\left(\partial_\xi \tilde f_i\right)(\xi,\tau,u)]\,|_{\xi=\omega_i(\tau;x,t)}d\tau,\qquad i\le n,\end{aligned}\tag{9}$$

де $\tilde f_i(\xi,\tau,u)=f_i(\xi,\tau)-\sum_{j=1}^n b_{ij}(\xi,\tau)u_j$,

$$\begin{aligned}&(R_iu)(x,t)=E_i(\tau;x,t)a_i^{-1}(y_i,\tau)\times\\&\times[\tilde f_i(y_i,\tau,u)-\nabla_v h_i(\tau,v)\cdot v'(\tau)-(\partial_\tau h_i)(\tau,v)]\,|_{\tau=t_i(x,t)},\end{aligned}\tag{10}$$

$y_i=0$ при $k+1\le i\le n$ і $y_i=1$ при $1\le i\le k$. У (10) використаємо представлення

$$v_j'(t)=\tilde f_j(x_j,t,u)-a_j(x_j,t)\partial_x u_j(x_j,t)=\tilde f_j(x_j,t,u)-a_j(x_j,t)[(R_ju)(x_j,t)+$$

$$+\int_{t_j(x_j,t)}^{t}E_j(\tau;x_j,t)(-\sum_{s\ne j}b_{js}(\xi,\tau)\partial_\xi u_s(\xi,\tau)-\partial_\xi a_j(\xi,\tau)\partial_\xi u_j(\xi,\tau)+$$

$$+\left(\partial_\xi\tilde f_j\right)(\xi,\tau,u))\,|_{\xi=\omega_j(\tau;x_j,t)}d\tau].$$

Продовжуючи так, за скінченну кількість кроків отримуємо таке зображення граничної функції (10), яке не залежить від v'. Далі показуємо, що права частина отриманого виразу для $\partial_x u_i(x,t)$ є неперервно диференційовна. Для цього використовуємо заміну змінних і перетворюємо інтеграли, як у (8). Оскільки $u \in C^1(\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_1})^n$, то легко переконатись, що $u \in C^{2,1}_{x,t}\left(\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_2}\right)^n$. Потрібна $C^2\left(\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_2}\right)$-гладкість розв'язку безпосередньо випливає зі системи (1) та її диференціювань.

Продовжуючи індукцією за k, припускаємо, що $u \in C^{k-1}\left(\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_{k-1}}\right)^n$ для деякого $k \ge 2$. Доведемо, що $u \in C^k\left(\overline{\Pi} \setminus \Pi^{T_k}\right)^n$. Продиференціювавши (1) k разів за змінною x, отримуємо систему диференціальних рівнянь щодо $\partial_x^k u$, а відтак можемо записати її в інтегральному вигляді (подібного до (9)). Означення T_k робить можливим таке інтегральне представлення, яке не залежить від $v^{(k)}$, але містить інтеграли від $\partial_x^{k-1} u$. Щоб показати C_x^k-гладкість розв'язку, перетворюємо всі інтеграли аналогічно до (8). Остаточно, C^k-гладкість функції u ззовні Π^{T_k} випливає з відповідних диференціювань системи (1). Теорему доведено.

Регуляризатори і фредгольмовість. Наступний критерій фредгольмовості відіграє ключову роль при побудові регуляризаторів (параметриксів) для одновимірних гіперболічних операторів, а отже, і при доведенні фредгольмовості.

Лема 1 [19]. Нехай W *– банахів простір,* I *– тотожний оператор на* W, $K \in L(W)$, *причому* K^2 *є компактним оператором. Тоді* $I + K$ *є фредгольмовим оператором нульового індексу.*

Періодичні задачі для гіперболічних систем з коефіцієнтами, незалежними від часу. Припускатимемо, що коефіцієнти a_j і b_{jk} не залежать від t. Нехай система (1) підпорядкована періодичним умовам

$$u_j(x, t + 2\pi) = u_j(x,t),\ j = 1,\ldots,n,\ x \in [0,1], \tag{11}$$

та умовам відображення

$$\begin{aligned} u_j(0,t) &= \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk}^0 u_k(0,t),\ j = 1,\ldots,m, \\ u_j(1,t) &= \sum_{k=1}^{m} r_{jk}^1 u_k(1,t),\ j = m+1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{12}$$

Тут коефіцієнти r_{jk}^0 і r_{jk}^1 – дійсні числа, а праві частини $f_j : [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – 2π-періодичні за t.

Нехай $f = (f_1,\ldots,f_n)$ і $u = (u_1,\ldots,u_n)$. Позначимо через $\mathbf{M}_n$ простір дійсних $n \times n$ матриць. Крім цього, для $\gamma \ge 0$ позначимо через W^γ векторний простір таких локально інтегровних функцій $u : [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, що $u(x,t) = u(x, t + 2\pi)$ для майже всіх $x \in (0,1)$ і $t \in \mathbf{R}$, і таких, що

$$\|u\|_{W^\gamma}^2 = \sum_{s \in \mathbf{Z}} (1 + s^2)^\gamma \int_0^1 \left\| \int_0^{2\pi} u(x,t) e^{-ist}\, dt \right\|^2 dx < \infty.$$

Далі, для $\gamma \ge 1$ і $a \in L^\infty\left((0,1); \mathbf{M}_n\right)$, таких, що $\operatorname{essinf} |a_j| > 0$ для всіх $j = 1,\ldots,n$, введемо простори

$$U^{\gamma} = \{u \in W^{\gamma} : \partial_x u \in W^{\gamma-1}, \partial_t u + a\partial_x u \in W^{\gamma}\}$$

з нормами $\|u\|^2_{U^{\gamma}} = \|u\|^2_{W^{\gamma}} + \|\partial_t u + a\partial_x u\|^2_{W^{\gamma}}$. Покладемо:

$$V^{\gamma} = \{u \in U^{\gamma} : \text{ виконується (12)}\},$$

$$\tilde{V}^{\gamma}(a, r) = \{u \in U^{\gamma} : \text{ виконуються умови, спряжені до (12)}\}.$$

Тут $r = (r^0, r^1)$ з $r^0 = [r^0_{jk}]^{m}_{j=1,k=m+1}{}^{n}$, $r^1 = [r^1_{jk}]^{n}_{j=m+1,k=1}{}^{m}$. Позначимо також $b^0 = \operatorname{diag}(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn})$ і $b^1 = b - b^0$.

Сформулюємо деякі властивості введених просторів. Для кожного $u \in W^{\gamma}$ виконується представлення

$$u(x,t) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} u^s(x) e^{ist}, \qquad u^s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t) e^{-ist}\, dt, \tag{13}$$

де $u^s \in L^2((0,1); \mathbf{C}^n)$ і ряд у (13) збігається до u в W^{γ}. І, навпаки, для кожної послідовності $(u^s)_{s \in \mathbf{Z}}$ з

$$u^s \in L^2((0,1); \mathbf{C}^n), \;\; u^{-s} = \overline{u^s}, \;\; \sum_{s \in \mathbf{Z}} (1+s^2)^{\gamma} \|u^s\|^2_{L^2((0,1);\mathbf{C}^n)} < \infty$$

існує єдиний елемент $u \in W^{\gamma}$ з (13) (див. [12]).

Лема 2 (критерій передкомпактності у W^{γ}). *Множина $M \subset W^{\gamma}$ є передкомпактною в W^{γ} тоді і лише тоді, якщо виконуються такі дві умови:*

(i) *Існує таке $C > 0$, що для всіх $u \in M$* виконується *нерівність* $\sum_{s \in \mathbf{Z}} (1+s^2)^{\gamma} \int_0^1 \|u^s(x)\|^2 dx \le C.$

(ii) *Для всіх $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\xi, \tau \in (-\delta, \delta)$ і всіх $u \in M$ виконується нерівність* $\sum_{s \in \mathbf{Z}} (1+s^2)^{\gamma} \int_0^1 \left\| u^s(x+\xi) e^{is\tau} - u^s(x) \right\|^2 dx < \varepsilon,$ *де* $u^s(x+\xi) = 0$ *для* $x + \xi \notin [0,1]$.

Лема 3. (i) *Простір U^{γ} є повним.*

(ii) *Якщо $\gamma \ge 1$, то для кожного $x \in [0,1]$ існує неперервне відображення сліду $u \in U^{\gamma}$* **a** $u(x, \cdot) \in L^2\left((0, 2\pi); \mathbf{R}^n\right)$.

(iii) *Якщо $\gamma > 3/2$, то U^{γ} неперервно вкладається в* $C([0,1] \times [0, 2\pi]; \mathbf{R}^n)$.

Лема 4. (i) *Для довільної $\varphi \in (W^{\gamma})^*$ існує така послідовність $(\varphi^s)_{s \in \mathbf{Z}}$, що*

$$\varphi^s \in L^2((0,1); \mathbf{C}^n), \; \varphi^{-s} = \overline{\varphi}^s, \qquad \sum_{s \in \mathbf{Z}} (1+s^2)^{-\gamma} \|\varphi^s(x)\|^2_{L^2((0,1);\mathbf{C}^n)} < \infty, \tag{14}$$

і ряд $\sum_{s \in \mathbf{Z}} \varphi^s e_s$ збігається до φ в $(W^{\gamma})^*$. При цьому виконується рівність

$$\int_0^1 \left\langle \varphi^s(x), u(x) \right\rangle dx = [\varphi, u e_{-s}]_{W^{\gamma}} \text{ для всіх } u \in L^2(0,1). \tag{15}$$

(ii) *Для довільної послідовності $(\varphi^s)_{s \in \mathbf{Z}}$ (14) ряд $\sum_{s \in \mathbf{Z}} \varphi^s e_s$ збігається в $(W^{\gamma})^*$ до деякої $\varphi \in (W^{\gamma})^*$, причому виконується рівність (15).*

Введемо лінійні оператори $A \in L(V^{\gamma}; W^{\gamma})$, $\tilde{A} \in L(\tilde{V}^{\gamma}; W^{\gamma})$ і $B, \tilde{B} \in L(W^{\gamma})$ за правилами

$$Au = \partial_t u + a\partial_x u + b^0 u, \quad \tilde{A}u = -\partial_t u - \partial_x(au) + b^0 u, \quad Bu = b^1 u, \quad \tilde{B}u = (b^1)^T u.$$

Тоді рівняння $Au + Bu = f$ є операторним представленням задачі (1), (11), (12).

Введемо також $(n-m)\times(n-m)$ матриці

$$R_s = \left[\sum_{l=1}^{m} e^{is(\alpha_j(1)-\alpha_l(1))+\beta_j(1)-\beta_l(1)} r_{jl}^1 r_{lk}^0\right]_{j,k=m+1}^{n},$$

де $\alpha_j(x) = \int_0^x \frac{1}{a_j(y)}dy,\ \beta_j(x) = \int_0^x \frac{b_{jj}(y)}{a_j(y)}dy.$

Теорема 3. *Для всіх* $c > 0$ *існує таке* $C > 0$, *що: якщо*

$$a_j, b_{jj} \in L^\infty(0,1),\quad \operatorname{ess\,inf} |a_j| \ge c \ \text{ для всіх } j = 1,\ldots,n, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \| b_{jj} \|_\infty + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=m+1}^{n} | r_{jk}^0 | + \sum_{j=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{m} | r_{jk}^1 | \le \frac{1}{c}, \tag{17}$$

і

$$| \det(I - R_s) | \ge c \ \text{ для всіх } s \in \mathbf{Z}, \tag{18}$$

то для всіх $\gamma \ge 1$ *оператор* A *є ізоморфізмом і* $\| A^{-1} \|_{L(W^\gamma;V^\gamma)} \le C$.

Доведення. Нехай $\gamma \ge 1$ і $f \in W^\gamma$ є довільно фіксовані. Тоді $f(x,t) = \sum_{s\in\mathbf{Z}} f^s(x)e^{ist}$, $f^s \in L^2\left((0,1);\mathbf{C}^n\right)$, $\sum_{s\in\mathbf{Z}}(1+s^2)^\gamma \int_0^1 \left\|f^s(x)\right\|^2 dx < \infty.$
Потрібно показати, що існує єдиний елемент $u \in V^\gamma$, який справджує рівняння $Au = f$ і оцінку $\| u \|_{V^\gamma} \le C \| f \|_{W^\gamma}$, де константа C не залежить від γ, a, b^0, u, f, а лише від c. Записуючи u у вигляді ряду, потрібно показати, що існує єдина послідовність $(u_j^s)_{s\in\mathbf{Z}}, j = 1,\ldots,n,$ де $u_j^s \in H^1((0,1);\mathbf{C})$ справджують

$$a_j(x)\frac{d}{dx}u_j^s(x) + \left(is + b_{jj}(x)\right)u_j^s(x) = f_j^s(x),\ j = 1,\ldots,n, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} u_j^s(0) &= \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk}^0 u_k^s(0), & j &= 1,\ldots,m,\\ u_j^s(1) &= \sum_{k=1}^{m} r_{jk}^1 u_k^s(1), & j &= m+1,\ldots,n, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\sum_{s\in\mathbf{Z}}(1+s^2)^\gamma \int_0^1 | u_j^s(x) |^2 dx \le C_1 \| f \|_{W^\gamma},\ \ j = 1,\ldots,n, \tag{21}$$

$$\sum_{s\in\mathbf{Z}}(1+s^2)^\gamma \int_0^1 \left|a_j(x)\frac{d}{dx}u_j^s(x) + isu_j^s(x)\right|^2 dx \le C_2 \| f \|_{W^\gamma},\ \ j = 1,\ldots,n.$$

Остання оцінка випливає з (17), (19) і (21). Очевидно, що (19) виконується тоді і лише тоді, коли

$$u_j^s(x) = e^{-is\alpha_j(x)-\beta_j(x)}\left(u_j^s(0) + \int_0^x e^{is\alpha_j(y)+\beta_j(y)}\frac{f_j^s(y)}{a_j(y)}dy\right). \tag{22}$$

Умови (20) виконуються тоді і лише тоді, коли

$$u_j^s(0) = \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk}^0 u_k^s(0),\ j = 1,\ldots,m, \tag{23}$$

$$e^{-is\alpha_j(1)-\beta_j(1)}u_j^s(0)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=m+1}^{n}e^{-is\alpha_k(1)-\beta_k(1)}r_{jk}^1 r_{kp}^0 u_p^s(0)=$$
$$=-e^{-is\alpha_j(1)-\beta_j(1)}\int_0^1 e^{is\alpha_j(y)+\beta_j(y)}\frac{f_j^s(y)}{a_j(y)}dy+ \qquad (24)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}e^{-is\alpha_k(1)-\beta_k(1)}r_{jk}^1\int_0^1 e^{is\alpha_k(y)+\beta_k(y)}\frac{f_k^s(y)}{a_k(y)}dy,\ j=m+1,\ldots,n.$$

Система (24) (щодо $(u_{m+1}^s(0),\ldots,u_n^s(0))$) має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли матриця $I-R_s$ є регулярна. З огляду на припущення (17), (18), існують коефіцієнти c_{jk}^s і константа C, такі, що

$$u_j^s(0)=\sum_{k=1}^{n}c_{jk}^s e^{-is\alpha_k(1)-\beta_k(1)}\int_0^1 e^{is\alpha_k(y)+\beta_k(y)}\frac{f_k^s(y)}{a_k(y)}dy, j=m+1,\ldots,n, \qquad (25)$$

і $|c_{jk}^s|\le C$ рівномірно по a, b^0, r і $s\in\mathbf{Z}$, які задовольняють (17), (18). Отже, для кожного $s\in\mathbf{Z}$ задача (19), (20) має єдиний розв'язок, який допускає інтегральне представлення (22). При цьому справедлива оцінка

$$|u_j^s(x)|\le C\int_0^1\|f^s(x)\|dx. \qquad (26)$$

Оцінка (21) тепер випливає з $f\in W^\gamma$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Припустимо, що для деякого $c>0$ виконуються умови (16), (18) і така умова:*

для всіх $j\neq k$ існує $c_{jk}\in BV(0,1)$, таке, що

$$a_k(x)b_{jk}(x)=c_{jk}(x)(a_j(x)-a_k(x)) \text{ для майже всіх } x\in[0,1]. \qquad (27)$$

Тоді

(i) *$A+B$ є фредгольмовим оператором нульового індексу з V^γ в W^γ для всіх $\gamma\ge 1$, а також $\ker(A+B)=\{u\in V^\gamma:(A+B)u=0\}$ не залежить від γ.*

(ii) *Припустимо, що $a\in C^{0,1}([0,1];\mathbf{M}_n)$. Тоді*

$$\{(A+B)u:u\in V^\gamma\}=\{f\in W^\gamma:\langle f,u\rangle_{L^2}=0 \text{ для всіх } u\in\ker(A+B)\},$$

де $\ker(A+B)=\{u\in\tilde V^\gamma:(A+B)u=0\}$ не залежить від γ.

Теорему 4, коли $m=1, n=2, a_1(x)=1,\ a_2(x)=-1$, доведено раніше [19].

Доведення. Очевидно, що $A+B$ є фредгольмовим з V^γ в W^γ тоді і лише тоді, коли $I+BA^{-1}$ є фредгольмовим з W^γ в W^γ. Доведемо, що $I+BA^{-1}$ є фредгольмовим з W^γ в W^γ, використовуючи критерій фредгольмовості (див. лему 1) при $W=W^\gamma$ і $C=BA^{-1}$. Щоб показати компактність оператора $(BA^{-1})^2$, використовуватимемо лему 2.

Умова (i) виконується тому, що BA^{-1} є обмеженим оператором на W^γ. Залишається перевірити умову (ii). Розглянемо обмежену множину $N\subset W^\gamma$ і $f\in N$. Позначимо $u=A^{-1}f$ і $\tilde u=(BA^{-1})^2 f$. Тоді

$$\tilde u_j^s(x)=\sum_{k\neq j}b_{jk}(x)e^{-is\alpha_k(x)-\beta_k(x)}\Big(\int_0^x e^{is\alpha_k(y)+\beta_k(y)}a_k^{-1}(y)\sum_{l\neq k}b_{kl}(y)u_l^s(y)dy+$$

$$+\sum_{l=1}^{n} d_{kl}^{s} e^{-is\alpha_l(1)-\beta_l(1)} \int_0^1 e^{is\alpha_l(y)+\beta_l(y)} a_l^{-1}(y) \sum_{r\neq l} b_{lr}(y) u_r^s(y)dy).$$

Отже, $\tilde{u}_j^s(x+\xi)e^{is\tau} - \tilde{u}_j^s(x) = P_j^s(x,\xi,\tau) + Q_j^s(x,\xi,\tau) + R_j^s(x,\xi)$, де

$$\begin{aligned} P_j^s(x,\xi,\tau) &= \sum_{j\neq k\neq l} \int_x^{x+\xi} e^{is\left(-\alpha_k(x+\xi)+\tau+\alpha_k(y)\right)-\beta_k(x+\xi)+\beta_k(y)} \times \\ &\quad \times a_k^{-1}(y) b_{jk}(x+\xi) b_{kl}(y) u_l^s(y)dy, \\ Q_j^s(x,\xi,\tau) &= \sum_{k\neq j} b_{jk}(x+\xi) e^{-\beta_k(x+\xi)} \left(e^{is\left(-\alpha_k(x+\xi)+\tau\right)} - e^{-is\alpha_k(x)}\right) S_k^s(x), \\ R_j^s(x,\xi) &= \sum_{k\neq j} \left(b_{jk}(x+\xi)e^{-\beta_k(x+\xi)} - b_{jk}(x)e^{-\beta_k(x)}\right) S_k^s(x), \end{aligned}$$

$$S_k^s(x) = \int_0^x e^{is\alpha_k(y)+\beta_k(y)} a_k^{-1}(y) \sum_{l\neq k} b_{kl}(y) u_l^s(y)dy +$$

$$+\sum_{l=1}^{n} d_{kl}^{s} e^{-is\alpha_l(1)-\beta_l(1)} \int_0^1 e^{is\alpha_l(y)+\beta_l(y)} a_l^{-1}(y) \sum_{r\neq l} b_{lr}(y) u_r^s(y)dy.$$

Потрібно показати, що

$$\sum_{s\in \mathbf{Z}} (1+s^2)^\gamma \int_0^1 \left(|\, P_j^s(x,\xi,\tau)\,|^2 + |\, Q_j^s(x,\xi,\tau)\,|^2 + |\, R_j^s(x,\xi)\,|^2\right)dx \to 0$$

для $|\,\xi\,| + |\,\tau\,| \to 0$ рівномірно по $f \in N$. Оскільки $Au = f$, то виконується (26) і

$$\sum_{s\in \mathbf{Z}} (1+s^2)^\gamma \int_0^1 |\, P_j^s(x,\xi,\tau)\,|^2 dx \le C\xi^2 \| f \|_{W^\gamma}^2, \tag{28}$$

де константа C не залежить від j,ξ,τ і f. Звідси ліва частина (28) прямує до нуля при $|\,\xi\,| \to 0$ рівномірно по $f \in N$.

Щоб оцінити $S_j^s(x)$, використовуватимемо (19) і рівність $Au = f$:

$$\frac{d}{dy}\left(e^{is\alpha_l(y)} u_l^s(y)\right) = e^{is\alpha_l(y)} \frac{f_l^s(y) - b_{ll}(y)u_l^s(y)}{a_l(y)}.$$

Звідси

$$is\frac{a_l(y)-a_k(y)}{a_k(y)a_l(y)} e^{is\alpha_k(y)} u_l^s(y) = e^{is(\alpha_k(y)-\alpha_l(y))} \frac{d}{dy}\left(e^{is\alpha_l(y)} u_l^s(y)\right) - \frac{d}{dy}\left(e^{is\alpha_k(y)} u_l^s(y)\right) =$$

$$= e^{is\alpha_l(y)} \frac{f_l^s(y) - b_{ll}(y)u_l^s(y)}{a_l(y)} - \frac{d}{dy}\left(e^{is\alpha_k(y)} u_l^s(y)\right).$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} e^{is\alpha_k(y)+\beta_k(y)} \frac{b_{kl}(y)}{a_k(y)} u_l^s(y) &= \frac{e^{\beta_k(y)}}{is} \frac{a_l(y)b_{kl}(y)}{a_l(y)-a_k(y)} \times \\ &\times \left(e^{is\alpha_l(y)} \frac{f_l^s(y) - b_{ll}(y)u_l^s(y)}{a_l(y)} - \frac{d}{dy}\left(e^{is\alpha_k(y)} u_l^s(y)\right)\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Крім цього, враховуючи припущення (27), для всіх $k \neq l$ маємо:

$$\left|\int_0^x e^{\beta_k(y)} \frac{a_l(y)b_{kl}(y)}{a_l(y)-a_k(y)} \frac{d}{dy}\left(e^{is\alpha_k(y)} u_l^s(y)\right)dy\right| \le C \| u_l^s \|_\infty,$$

де константа C не залежить від x,k,l,s і u. Враховуючи (26) і (29), отримуємо

$$\left|\int_0^x e^{is\alpha_k(y)+\beta_k(y)} \frac{b_{kl}(y)}{a_k(y)} u_l^s(y)dy\right| \le \frac{C}{1+|s|}\int_0^1 \| f^s(y) \| dy$$

для деякої C, що не залежить від x,k,l,s і f. Подібно оцінюємо й інші інтеграли. Підсумовуючи, отримуємо

$$| S_j^s(x) | \le \frac{C}{1+|s|}\int_0^1 \| f^s(y) \| dy$$

з новою C, що не залежить від x, j, s і f. Звідси

$$\int_0^1 | Q_j^s(x,\xi,\tau) |^2 dx \le \frac{C}{1+|s|} \max_{k=1,\ldots,n} | e^{is(-\alpha_k(x+\xi)+\tau)} - e^{-is\alpha_k(x)} |^2 \int_0^1 \| f^s(y) \|^2 dy,$$

де C не залежить від x,ξ,τ, j, s і f. Згідно з припущенням (16), маємо оцінку

$$\sum_{s\in\mathbf{Z}}(1+s^2)^\gamma \int_0^1 | Q_j^s(x,\xi,\tau) |^2 dx \le C(\xi^2+\tau^2)\| f \|^2_{W^\gamma} \tag{30}$$

з новою костантою. Отже, ліва частина (30) прямує до 0 при $|\xi|+|\tau|\to 0$.

Остаточно,

$$\sum_{s\in\mathbf{Z}}(1+s^2)^\gamma \int_0^1 | R_j^s(x,\xi) |^2 dx \le$$
$$\le C \max_{k=1,\ldots,n}\int_0^1 | b_{jk}(x+\xi)e^{-\beta_k(x+\xi)} - b_{jk}(x)e^{-\beta_k(x)} |^2 dx \| f \|^2_{W^\gamma},$$

звідки ліва частина прямує до 0 при $|\xi|\to 0$.

Таким чином, доведено альтернативу Фредгольма для
$A+B\in L(V^\gamma, W^\gamma)$: $\dim\ker(A+B) = \dim\ker(A+B)^* < \infty$,

$$\mathrm{Im}(A+B) = \{f\in W^\gamma : [\varphi, f]_{W^\gamma} = 0 \text{ для всіх } \varphi\in\ker(A+B)^*\}.$$

Залишається довести, що $\ker(A+B)$ і $\ker(\tilde{A}+\tilde{B})$ не залежать від γ, а також $\mathrm{Im}(A+B) = \{f\in W^\gamma : \langle f,u\rangle_{L^2} = 0$ для всіх $u\in\ker(\tilde{A}+\tilde{B})\}$. Доведення цього твердження випливає з праці [20, Lemma 5.1].

Періодичні задачі для гіперболічних систем з коефіцієнтами, що залежать від часу. Розглянемо задачу (1), (11), (12) з коефіцієнтами, які залежать як від x, так і від t.

Працюватимемо в просторах неперервних функцій. Через $C(\mathbf{R})$ позначимо простір неперервних функцій $\varphi:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, такий, що $\varphi(x,t+2\pi)=\varphi(x,t)$ для всіх $x\in[0,1]$ і $t\in\mathbf{R}$, з нормою

$$\| \varphi \|_{C(\mathbf{R})} = \max_{0\le x\le 1}\max_{0\le t\le 2\pi} | \varphi(x,t) |.$$

Через $C(\mathbf{R}^n)$ і $C(\mathbf{M}_n)$ позначимо векторні простори всіх відображень $u=(u_1,\ldots,u_n):[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ і $b=[b_{jk}]_{j,k=1}^n:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{M}_n$ ($\mathbf{M}_n$ є векторним простором усіх $n\times n$ матриць), таких, що $u_j\in C(\mathbf{R})$ для всіх $1\le j\le n$ і $b_{jk}\in C(\mathbf{R})$ для всіх $1\le j,k\le n$, з нормами

$$\| u \|_{C(\mathbf{R}^n)} = \max_{1\le j\le n}\| u_j \|_{C(\mathbf{R})} \text{ і } \| b \|_{C(\mathbf{M}_n)} = \max_{1\le j,k\le n}\| b_{jk} \|_{C(\mathbf{R})},$$

відповідно. Крім цього, позначимо через $C^1(\mathbf{R}^n)$ і $C^1(\mathbf{M}_n)$ векторний простір усіх $u\in C(\mathbf{R}^n)$ і всіх $b\in C(\mathbf{M}_n)$, таких, що $\partial_t u$ і $\partial_t b$ існують і є неперервними, з нормами

$$\| u \|_{C^1(\mathbf{R}^n)} = \| u \|_{C(\mathbf{R}^n)} + \| \partial_t u \|_{C(\mathbf{R}^n)} \text{ і } \| b \|_{C^1(\mathbf{M}_n)} = \| b \|_{C(\mathbf{M}_n)} + \| \partial_t b \|_{C(\mathbf{M}_n)}.$$

Для заданого $a \in W \cap \left(C_x^1\right)^n$, такого, що $a_j \neq 0$ для всіх $j \leq n$, введемо простір розв'язків

$$U = \{u \in C(\mathbf{R}^n) : \left[\partial_t u_j + a_j \partial_x u_j\right]_{j=1}^n \in C(\mathbf{R}^n)\}$$

з нормою $\| u \|_U^2 = \| u \|_{C(\mathbf{R}^n)}^2 + \left\| \left[\omega \partial_t u_j + a_j \partial_x u_j\right]_{j=1}^n \right\|_{C(\mathbf{R}^n)}^2$, де $\partial_t u_j$ і $\partial_x u_j$ – узагальнені похідні.

Лема 5. *Простір* U *є повним.*

Доведення. Нехай $(u^k)_{k\in\mathbf{N}}$ – фундаментальна послідовність в U. Тоді $(u^k)_{k\in\mathbf{N}}$ і $(\partial_t u^k + a\partial_x u^k)_{k\in\mathbf{N}}$ – фундаментальні послідовності в $C(\mathbf{R}^n)$, де $\partial_t u^k$ і $\partial_x u^k$ розуміємо в сенсі узагальнених похідних. Оскільки $C(\mathbf{R}^n)$ є повним, то існують такі $v, w \in W$, що $u^k \to v$ в $C(\mathbf{R}^n)$, $\omega\partial_t u^k + a\partial_x u^k \to w$ в $C(\mathbf{R}^n)$ при $k \to \infty$. Залишається показати, що $\omega\partial_t v + a\partial_x v = w$ в D'. Розглянемо гладку функцію $\varphi : (0,1)\times(0,2\pi) \to \mathbf{R}^n$ з компактним носієм і C^1-послідовність $v_k \to v$ в $C(\mathbf{R})$. Тоді легко отримуємо бажане твердження:

$$\left\langle \omega\partial_t v + a\partial_x v, \varphi\right\rangle_D = -\left\langle v, \omega\partial_t \varphi + \partial_x(a\varphi)\right\rangle_{C(\mathbf{R}^n)} =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left\langle v^k, \omega\partial_t\varphi + \partial_x(a\varphi)\right\rangle_{C(\mathbf{R}^n)} = \lim_{k\to\infty}\left\langle \omega\partial_t v^k + a\partial_x v^k, \varphi\right\rangle_D = \langle w, \varphi\rangle_D .$$

Нехай $V = \{u \in U : \ u$ задовольняє умову (12)$\}$. Очевидно, що V – замкнутий підпростір простору U. Позначимо:

$$c_j(\xi; x,t) = \exp\left\{\int_x^\xi \left(\frac{b_{jj}}{a_j}\right)(\eta, \omega_j(\eta; x,t))d\eta\right\}, d_j(\xi; x,t) = \frac{c_j(\xi; x,t)}{a_j(\xi, \omega_j(\xi; x,t))},$$

$$R(a,b) \ = \max_{m+1\le j\le n}\max_{1\le k\le m}\max_{x\in[0,1]}\max_{t\in[0,2\pi]} \exp\left\{\int_x^1 \left(\frac{b_{jj}}{a_j}\right)(\eta, \omega_j(\eta; x,t))d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_1^0 \left(\frac{b_{kk}}{a_k}\right)(\eta, \omega_k(\eta; 1, \omega_j(1; x,t)))d\eta\right\}.$$

Векторний простір неперервних розв'язків однорідної задачі (1), (11), (12) позначимо через K. Нехай $L_a = \left\{\exp\left\|2\partial_t a_j / a_j^2\right\|_{C(\mathbf{R})}\right\}$.

Теорема 5. *Нехай* $a, b \in C^1(\mathbf{M}_n)$ *такі, що виконується (4),*

$$q = L_a R(a,b) \sum_{j,l=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{m} | r_{jk}^1 r_{kl}^0 | < 1 \tag{31}$$

і

$$L_a R(a, \partial_x a - b)\times$$
$$\times \sum_{j,l=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{x,t}\left|\left(\frac{a_k}{a_j}\right)\left(1, \omega_j(1; x,t)\right)\left(\frac{a_l}{a_k}\right)\left(0, \omega_k(0; 1, \omega_j(1; x,t))\right)\right| \left|r_{jk}^1 r_{kl}^0\right| < 1. \tag{32}$$

Тоді

(i) $\dim K < \infty$.

(ii) $\dim K > 0$ *або для всіх* $f \in C(\mathbf{R}^n)$ *існує єдиний розв'язок задачі (1), (11), (12).*

Доведення. Введемо оператори $A \in L(V; W)$ і $B \in L(W)$ за правилами

$$Au = \left[\omega\partial_t u + a_j\partial_x u_j + b_{jj}u_j\right]_{j=1}^n, \quad Bu = \left[\sum_{j\neq k} b_{jk}u_k\right]_{j=1}^n .$$

Тоді рівняння $Au + Bu = f$ є операторним представленням задачі (1), (11), (12).

Спочатку доведемо, що оператор A є ізоморфізмом з V на W. Нехай $f \in W$ є довільно фіксованим. Достатньо показати, що існує єдиний елемент $u \in V$, що справджує систему

$$\omega\partial_t u_j B + a_j(x,t)\partial_x u_j + b_{jj}(x,t)u_j = f_j(x,t),\ j \le n, \tag{33}$$

з умовами (11), (12), а також апріорну оцінку

$$\| u \|_V \le C \| f \|_W \tag{34}$$

з константою C, що не залежить від f.

Не важко переконатись, що за умов (31) і (32) задача (1), (11), (12) еквівалентна системі

$$u_j(x,t) = c_j(0;x,t)u_j(0,\omega_j(0;x,t)) + \int_0^x d_j(\xi;x,t)f_j(\xi,\omega_j(\xi;x,t))d\xi, \quad j \le n, \tag{35}$$

і будь-який неперервний її розв'язок задається формулою (35) і справджує умови

$$u_j(0,t) = \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk}^0 u_k(0,t),\ j \le m, \tag{36}$$

$$u_j(0,\tau) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=m+1}^{n} d_{jkp}(\tau)u_p(0,\omega_k(0;1,\omega_j(1;0,\tau))) + F_j(\tau), \quad m+1 \le j \le n, \tag{37}$$

де

$$\tau = \omega_j(0;1,t),\ t = \omega_j(1;0,\tau),$$

$$d_{jkp}(\theta) = \beta_j^{-1}(0;1,\omega_j(1;0,\tau))\beta_k(0;1,\omega_j(1;0,\tau))r_{jk}^1 r_{kp}^0,$$

$$F_j(\tau) = \beta_j^{-1}(0;1,\omega_j(1;0,\tau))[-\int_0^1 \beta_j^{-1}(\xi;1,\omega_j(1;0,\tau))f_j(\xi,\omega_j(\xi;0,\tau))d\xi +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} r_{jk}^1 \int_0^1 \beta_k(\xi;1,\omega_j(1;0,\tau))f_k(\xi,\omega_k(\xi;1,\omega_j(1;0,\tau)))d\xi].$$

Це система лінійних функціональних рівнянь щодо $u_j(0,\tau), m+1 \le j \le n$. За теоремою Банаха про нерухому точку за умови (31) система (35)–(37) має єдиний неперервний 2π-періодичний розв'язок $\left(u_{m+1}(0,\tau),\ldots,u_n(0,\tau)\right)$, який можна знайти методом послідовних наближень:

$$u_j(0,\tau) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(D_j^l F\right)(\tau), \quad m+1 \le j \le n, \tag{38}$$

де

$$D_j^0 F = F_j, \quad \left(D_j^1 F\right)(\tau) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=m+1}^{n} d_{jkp}(\tau)F_p(\omega_k(0;1,\omega_j(1;0,\tau))),$$

$$\left(D_j^l F\right)(\tau) = \left[D_j^1\left(D_j^{l-1}F\right)\right](\tau).$$

Далі, використовуючи (36), робимо висновок про те, що існує така константа $C > 0$, що для всіх $f \in W$ виконується оцінка

$$\| u(0,\cdot) \|_{C[0,2\pi]} \le C \| f \|_W . \tag{39}$$

Беручи до уваги (35), отримуємо апріорну оцінку

$$\| u \|_W \le C \| f \|_W \tag{40}$$

з новою константою $C > 0$, що не залежить від f.

Не важко переконатись, що функція u, визначена формулою (35), задовольняє (33) в сенсі розподілів, тобто $\omega\partial_t u_j + a_j(x,t)\partial_x u_j = -b_{jj}(x,t)u_j + f_j(x,t)$

для всіх $j \le n$, що й приводить до потрібної оцінки (34). Цим завершується доведення властивості ізоморфізму оператора A.

Таким чином, оператор $A+B$ з V в W є фредгольмовим тоді і лише тоді, коли є фредгольмовим оператор $I+BA^{-1}$ з W в W. Покладемо $C = BA^{-1}$ і застосуємо лему 1. Для цього використовуватимемо критерій передкомпактності у просторі неперервних функцій. Нехай $N \subset W$ – деяка обмежена множина і M – її образ при відображенні C^2. Оскільки C^2 є обмеженим оператором на W, множина M є рівномірно обмежена в W. Залишається перевірити властивість одностайної неперервності множини M в W. Покладемо $\tilde{u} = C^2 f$. Отже, досить довести, що існує така функція $\alpha : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, що $\alpha(p) \to 0$ при $p \to 0$, і має місце оцінка

$$\left\|\tilde{u}(x+h_1, t+h_2) - \tilde{u}(x,t)\right\|_W \le \alpha\left(|\, h \,|\right) \tag{41}$$

для всіх $\tilde{u} \in M$ і $|\, h \,| = |\, h_1 \,| + |\, h_2 \,|$, де $(h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$. Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j(x,t) = & \sum_{k=m+1, k\ne j}^{n} b_{jk}(x,t)\beta_k(0;x,t)\sum_{l=0}^{\infty}\left(D_k^l F\right)(\omega_k(0;x,t)) + \\ & + \sum_{k=1, k\ne j}^{m} b_{jk}(x,t)\beta_k(0;x,t)\sum_{p=m+1}^{n} r_{kp}^0 \sum_{l=0}^{\infty}\left(D_p^l F\right)(\omega_p(0;x,t)) + \\ & + \sum_{k=1, k\ne j}^{n} b_{jk}(x,t)\int_0^x \beta_k(\xi;x,t)\sum_{s=1, s\ne k}^{n}(b_{ks}u_s)(\xi, \omega_k(\xi;x,t))d\xi, \qquad j \le n, \end{aligned} \tag{42}$$

де

$$\begin{aligned} F_p(\tau) = {} & \beta_p^{-1}(0;1,\omega_p(1;0,\tau))[-\int_0^1 \beta_p(\xi;1,\omega_p(1;0,\tau))\sum_{s=1, s\ne p}^{n}(b_{ps}u_s)(\xi,\omega_p(\xi;0,\tau))d\xi + \\ & + \sum_{k=1}^{m} r_{pk}^1 \int_0^1 \beta_k(\xi;1,\omega_p(1;0,\tau))\sum_{s=1, s\ne k}^{n}(b_{ks}u_s)(\xi,\omega_k(\xi;1,\omega_p(1;0,\tau)))d\xi]. \end{aligned}$$

Перетворимо вираз (42) для $\tilde{u}$ так, щоб $u\,|_{x=0}$ і f у правій частині не залежали від x і t. Перетворення проілюструємо на прикладі інтегрального виразу

$$I_{ks}(x,t) = \int_0^x \beta_k(\xi;x,t)(b_{ks}u_s)(\xi,\omega_k(\xi;x,t))d\xi$$

для довільно фіксованих k і $s \ne k$. Використовуючи (35), отримуємо, що

$$\begin{aligned} I_{ks}(x,t) = & \int_0^x \beta_k(\xi;x,t) b_{ks}(\xi,\tau)\Big[\, \beta_s(0;\xi,\tau)u_s(0,\omega_s(0;\xi,\tau)) + \\ & + \int_0^{\xi} \beta_s(\xi_1;\xi,\tau) f_s(\xi_1,\omega_s(\xi_1;\xi,\tau))d\xi_1 \,\Big|_{\tau=\omega_k(\xi;x,t)}\Big] d\xi = \\ = & \int_{\omega_k(0;x,t)}^{\omega_s(0;x,t)} \beta_k(\rho;x,t) b_{ks}(\rho,\omega_k(\rho;x,t)) u_s(0,\tau)\,|\, J(0,\rho) \,\|_{\rho=\theta(0,\tau;x,t)} d\tau + \\ & + \int_0^x \int_{\omega_k(\xi;x,t)}^{\omega_s(\xi;x,t)} \beta_k(\rho;x,t) b_{ks}(\rho,\omega_k(\rho;\xi,\tau))\beta_s(\xi;\rho,\omega_k(\rho;\xi,\tau))\,|\, J(\xi,\rho) \,\|_{\rho=\theta(\xi,\tau;x,t)}\, f_s(\xi,\tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

де $\theta(\xi,\tau;x,t)$ позначає x-координату точки, в якій перетинаються характеристики $\omega_k(\xi_1;x,t)$ і $\omega_s(\xi_1;\xi,\tau)$, а $J(\xi,\rho)$ – якобіан перетворення:

$$J(\xi,\rho) = \left(\frac{a_k a_j}{a_k - a_j}\right)(\rho,\omega_j(\rho)) \exp\left\{\int_{\xi}^{\rho}\left(\frac{\partial_2 a_k}{a_k^2}\right)\left(\eta,\omega_k(\eta;\rho,\omega_j(\rho))\right)d\eta\right\}.$$

Властивість одностайної неперервності функцій $I_{ks}(x,t)$ тепер легко випливає з припущень гладкості щодо вихідних даних задачі. Зокрема, функції $\omega_j(\xi;x,t)$, $\omega_s(\xi;x,t)$ і $\theta(\xi,\tau;x,t)$ належать до класу C^1. Отже, з огляду на (39), маємо:

$$\left|I_{ks}(x+h_1,t+h_2)-I_{ks}(x,t)\right| \le C_I\ |h|\,\|f\|_W, \tag{43}$$

де C_I не залежить від x, t, $k \ne s$, $h \in \mathbf{R}^2$ і f.

Покажемо тепер, що подібна оцінка виконується для інтегралів у правій частині оператора $(D_p^0 F)(\omega_p(0;x,t)) = F_p(\omega_p(0;x,t))$. Для прикладу розглянемо інтеграл

$$J_0(x,t) = I_{ps}(1,\omega_p(1;0,\omega_p(0;x,t))) = I_{ps}(1,\omega_p(1;x,t)).$$

Беручи до уваги формули

$$\frac{\partial\omega_j(\xi;x,t)}{\partial x} = -a_j^{-1}(x,t)\exp\left\{\int_x^\xi \left(\partial_2 a_j^{-1}\right)\left(\xi_1,\omega_j(\xi_1;x,t)\right)d\xi_1\right\},$$

$$\frac{\partial\omega_j(\xi;x,t)}{\partial t} = \exp\left\{\int_x^\xi \left(\partial_2 a_j^{-1}\right)\left(\xi_1,\omega_j(\xi_1;x,t)\right)d\xi_1\right\},$$

де ∂_m – похідна за m-им аргументом, зауважимо, що L_a є спільною константою Ліпшиця функцій $\omega_p(\xi;x,t)$ по t і $L_a \max\limits_{j,x,t}\left|a_j^{-1}\right|$ – спільна константа Ліпшиця функцій $\omega_p(\xi;x,t)$ по x. Далі, враховуючи (43), отримуємо

$$\left|J_0(\omega_p(1;x+h_1,t+h_2)) - J_0(\omega_p(1;x,t))\right| \le$$

$$\le C_I\left|\omega_p(1;x+h_1,t+h_2)-\omega_p(1;x,t)\right|\|f\|_W \le C_I L_a\left(1+\max_{j,x,t}\left|a_j^{-1}\right|\right)|h|\,\|f\|_W,$$

причому оцінка є рівномірна за $m+1 \le p \le n$, $s \le n$, $p \ne s$ і $f \in N$. Звідси випливає, зокрема, що

$$\begin{aligned}&\left|(D_p^0F)(\omega_p(0;x+h_1,t+h_2)) - (D_p^0F)(\omega_p(0;x,t))\right| = \\ &= \left|F_p(\omega_p(0;x+h_1,t+h_2)) - F_p(\omega_p(0;x,t))\right| \le C_F\ |h|\,\|f\|_W,\end{aligned} \tag{44}$$

де константа C_F не залежить від x, t, $m+1 \le p \le n$, h, $f \in N$, а також $C_F \ge C_I$.

Далі встановимо оцінку одностайної неперервності для інтегральних виразів, що визначають оператор

$$\begin{aligned}(D_k^1F)(\omega_k(0;x,t)) &= \sum_{l=1}^{m}\sum_{p=m+1}^{n} d_{klp}(\omega_k(0;x,t))F_p(\omega_l(0;1,\omega_k(1;0,\omega_k(0;x,t)))) = \\ &= \sum_{l=1}^{m}\sum_{p=m+1}^{n} d_{klp}(\omega_k(0;x,t))F_p(\omega_l(0;1,\omega_k(1;x,t)))\end{aligned} \tag{45}$$

для $m+1 \le k \le n$. Розглянемо вираз $J_1(x,t) = I_{ps}(1,\omega_p(1;0,\omega_l(0;1,\omega_k(1;x,t))))$. Беручи до уваги (43), встановлюємо оцінку

$$\left|J_1(x+h_1,t+h_2) - J_1(x,t)\right| \le$$

$$\le C_I\left|\omega_p(1;0,\omega_l(0;1,\omega_k(1;x+h_1,t+h_2))) - \omega_p(1;0,\omega_l(0;1,\omega_k(1;x,t)))\right|\|f\|_W \le$$

$$\le C_I L_a\left|\omega_l(0;1,\omega_k(1;x+h_1,t+h_2)) - \omega_l(0;1,\omega_k(1;x,t))\right|\|f\|_W \le$$

$$\le C_I L_a^2\left|\omega_k(1;x+h_1,t+h_2) - \omega_k(1;x,t)\right|\|f\|_W \le C_I L_a^3\left(1+\max_{j,x,t}\left|a_j^{-1}\right|\right)|h|\,\|f\|_W.$$

Ця оцінка є рівномірна по x, t, $m+1 \le p, k \le n$, $l \le m$, $s \le n$ і $p \ne s$, а, отже, виконується для всіх інтегралів у правій частині (45).

Продовжуючи подібно, встановлюємо, що для довільного $q \in \mathbf{N}_0$ всі інтеграли, що входять до представлення $(D_p^q F)(\omega_p(0;x,t))$ з $m+1 \le p \le n$ володіють властивістю одностайної неперервності. Для довільно фіксованого інтеграла, скажімо $J_q(x,t)$, виконується оцінка

$$\left|J_q(x+h_1,t+h_2) - J_q(x,t)\right| \le C_I L_a^{2q+1}\left(1 + \omega \max_{j,x,t}\left|a_j^{-1}\right|\right) |h| \, \| f \|_W . \tag{46}$$

Повертаючись до (42) і враховуючи (43), (44) і (46), остаточно отримуємо:

$$\left|\tilde{u}_j(x+h_1,t+h_2) - \tilde{u}_j(x,t)\right| \le$$
$$\le \sum_{k=1,k\ne j}^{n} | b_{jk}(x+h_1,t+h_2)\beta_k(0;x+h_1,t+h_1) - b_{jk}(x,t)\beta_k(0;x,t) | \, \| u(0,\cdot) \|_{C[0,2\pi]} +$$
$$+ \sum_{k=1,k\ne j}^{n} \| b_{jk}(\cdot,\cdot)\beta_k(0;\cdot,\cdot) \|_W \left[\frac{1}{1-q} C_F \, | h | \, \| f \|_W + L_d \, | h | \max_{\tau, m+1\le p\le n} | F_p(\tau) | \sum_{l=1}^{\infty} l(q)^l \right] +$$
$$+ \sum_{k=1,k\ne j}^{n} \Big[| b_{jk}(x+h_1,t+h_2) - b_{jk}(x,t) | + \| b_{jk} \|_W \, C_I \, | h | \Big] \| f \|_W, \quad j \le n,$$

де L_d – спільна константа Ліпшиця функцій d_{lsp} для індексів $m+1 \le l$, $p \le n$, $s \le m$. Щоб завершити доведення, залишається зауважити, що ряд $\sum_{l=1}^{\infty} l(q)^l$ є збіжним і $\max_{\tau, m+1\le p\le n} | F_p(\tau) | \le C \| f \|_W$, де константа C не залежить від $f \in N$.

Зауваження. З результатів фредгольмовості та їх доведень випливає, що розглядувані задачі допускають еквівалентну регуляризацію шляхом побудови правого регуляризатора (правого параметриксу) вигляду $A^{-1}(I - BA^{-1})$.

1. *Акрамов Т. А.* О поведении решений некоторых гиперболических задач // Сибирс. матем. журн. – 1998. – **39**, № 1.– С. 1–17.
2. *Акрамов Т. А., Белоносов В. С., Зеленяк Е. И. и др.* Нелинейная динамика каталитических реакций и процессов (обзор) // Матем. моделирование. – 1997. – **99,** № 12. – С. 87–109.
3. *Зеленяк Е. И.* О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**. – С. 98–102.
4. *Зеленяк Е. И.* К вопросу об устойчивости решений смешанных задач для одного класса квазилинейных уравнений // Там же. – 1967. – **3**. – С. 9–13.
5. *Йолтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Матем. сб. – 1988. – **134,** № 2. – С. 186–209.
6. *Кміть І., Рекке Л.* Фредгольмовість періодичних задач для систем рівнянь біжучих хвиль // Доп. НАН України. Математика, природознавство, техн. науки. – 2011. – № 11. – С. 20–26.
7. *Лаврентьев М. М., Люлько Н. А.* Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач // Сибирс. матем. журн. – 1977. – **38**, № 1. – С. 92–105.
8. *Марковский А. И.* О регуляризаторах некотрих смешанных задач на плоскости // Матем. физика. – 1979. – **25**. – С. 100–106.
9. *Слинько М. Г.* История развития математического моделирования каталитических процессов и реакторов // Теорет. основы хим. технологии. – 2007. – **41**, № 1. – С. 13–29.
10. *Alinhac S.* Blowup for nonlinear hyperbolic equations // Boston: Birkhäuser, 1995.
11. *John F.* Formation of singularities in one dimensional nonlinear wave propagation // Comm. Pure Appl. Math. – 1974. – **27**. – P. 317–405.

12. *Herrmann L.* Periodic solutions of abstract differential equations: the Fourier method // Czechoslovak Math. J. – 1980. – **30** (105). – P. 177–206.
13. *Hillen T.* Existence theory for correlated random walks on bounded domains // Can. Appl. Math. Q. – 2010. – **18**, № 1. – P. 1–40.
14. *Hillen T., Hadeler K. P.* Hyperbolic systems and transport equations in mathematical biology // Analysis and Numerics for Conservation Laws. – G. Warnecke. – Berlin: Springer, 2005. – P. 257–279.
15. *Horsthemke W.* Spatial instabilities in reaction random walks with direction-independent kinetics // Phys. Rev. – 1999. – **E 60**. – P. 2651–2663.
16. *Hörmander L.* Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. – Paris: Springer, 1997.
17. *Kmit I.* Classical solvability of nonlinear initial-boundary problems for first-order hyperbolic systems // Int. J. of Dynamic Systems and ifferential Equations. – 2008. – **1**, № 3. – P. 191–195.
18. *Kmit I.* Smoothing solutions to initial-boundary problems for first-order hyperbolic systems // Appl. Anal. – 2011 (у друці).
19. *Kmit I., Recke L.* Fredholm Alternative for periodic-Dirichlet problems for linear hyperbolic systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – **335**, № 1. – P. 355–370.
20. *Kmit I., Recke L.* Fredholmness and smooth dependence for linear time-periodic hyperbolic systems // J. Differ. Equations. – 2011 (прийнято до друку, http://arxiv.org/abs/1005.0689).
21. *Lichtner M., Radziunas M., Recke L.* Well-posedness, smooth dependence and center manifold reduction for a semilinear hyperbolic system from laser dynamics // Math. Methods Appl. Sci. – 2007. – **30**. – P. 931–960.
22. *Lutscher F., Stevens A.* Emerging patterns in a hyperbolic model for locally interacting cell systems // J. Nonlinear Sci. – 2002. – **12**, № 6. – P. 619–640.
23. *Lyulko N. A.* The increasing smoothness properties of solutions to some hyperbolic problems in two independent variables // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2010. – **7**. – P. 413–424.
24. *Oberguggenberger M.* Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations // Harlow: Longman, 1992.
25. *Radziunas M.* Numerical bifurcation analysis of traveling wave model of multisection semiconductor lasers // Physica D. – 2006. – **213**. – P. 575–613.
26. *Radziunas M., Wünsche H.-J.* Dynamics of multisection DFB semiconductor lasers: traveling wave and mode approximation models // Optoelectronic Devices. – Advanced Simulation and Analysis. – 2005. – P. 121–150.

О РЕГУЛЯРИЗАТОРАХ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Наведен обзор недавних результатов по регулярности и фредгольмовости для гиперболических операторов первого порядка. Показано, что гиперболический оператор обладает свойством повышать гладкость и моделируется фредгольмовым оператором нулевого индекса. Эффект повышения гладкости дает ключ к поиску регуляризаторов (параметриксов) для гиперболических задач. Построены регуляризаторы для линейных одномерных гиперболических систем первого порядка с периодическими условиями и условиями отражения от границы области.

ON REGULARIZERS FOR FIRST-ORDER ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC SYSTEMS

We give an exposition of recent results on regularity and Fredholm properties for first-order hyperbolic operators. We show that the hyperbolic operator is smoothing and is modeled by a Fredholm operator of index zero. The smoothing effect is the key in finding regularizers (parametrieces) for hyperbolic problems. We construct regularizers for first-order one-dimensional linear hyperbolic systems with periodic and reflection boundary conditions.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
26.07.11