УДК:517.956

Р. В. Андрусяк, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич

ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ В КУТОВІЙ ОБЛАСТІ

Розглянуто крайову задачу для лінійної гіперболічної системи з регулярною та сингулярною частинами в кутовій області. З допомогою методу характеристик і принципу стискальних відображень встановлено умови існування та єдиності глобального узагальненого неперервного розв'язку задачі.

Вступ. Багато проблем фізики, механіки, природознавства тощо моделюють задачами для гіперболічних рівнянь і систем, причому характеристики, що їм відповідають, традиційно є функції часу. Проте зустрічаються сингулярні системи, в яких деякі з характеристик ортогональні часовій осі [1]. Регулярна та сингулярна частини таких систем описують, відповідно, поширення "повільних" (механічних) та "швидких" (електромагнітних) збурень [3]. Сингулярності також виникають за переходу від регулярної системи до т. зв. продовженої, що є її диференціальним наслідком. Цей перехід використовують, досліджуючи задачі для нелінійних систем [8, 11].

Нижче вивчено крайову задачу в кутовій області з нелокальними крайовими умовами для сингулярної гіперболічної системи. Задачі в таких областях виникають у газо- та гідродинаміці (задача про поршень) [4, 7, 8], теорії оптимального керування [9, 10]. Кутові області також розглядають під час вивчення початково-крайових задач для гіперболічних систем з розривними коефіцієнтами, якщо лінії розриву вихідних даних перетинаються [2, 6].

Результатом статті є достатні умови глобальної за часовою змінною узагальненої розв'язності задачі. Під час доведення теореми відшукання розв'язку задачі зводиться до знаходження нерухомої точки оператора в просторі зі спеціальною ваговою метрикою, при цьому правильний підбір ваг забезпечує стисну властивість оператора [5].

Формулювання задачі. В області $V=\{(x,t):0<t<T,\ -kt<x<kt,\ k>0\}$ розглядаємо систему гіперболічних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x,t)u_k+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(x,t)v_k+f_i(x,t), \quad i\in\{1,\ldots,m\},\\
&\frac{\partial v_j}{\partial x}=\sum_{k=1}^{m}c_{jk}(x,t)u_k+\sum_{k=1}^{n}d_{jk}(x,t)v_k+g_j(x,t), \quad j\in\{1,\ldots,n\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Доповнимо її крайовими умовами

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\gamma_{ik}^{1}(t)\,u_k(-kt,t)+\gamma_{ik}^{2}(t)\,u_k(kt,t)\right)+\sum_{k=1}^{n}\psi_{ik}(t)\,v_k(-kt,t)=\delta_i(t),\quad i\in\{1,\ldots,m+n+r_3\}. \tag{2}$$

Визначимо множини індексів:

$$I_1=\{i\in\{1,\ldots,m\}:\lambda_i(0,0)<-k\},\quad I_2=\{i\in\{1,\ldots,m\}:\lambda_i(0,0)>k\},$$
$$I_3=\{i\in\{1,\ldots,m\}:-k<\lambda_i(0,0)<k\}.$$

Вважаємо, що всі задані функції $\lambda_i, a_{ik}, b_{ik}, f_i, c_{jk}, d_{jk}, g_j, \gamma_{ik}^1, \gamma_{ik}^2, \psi_{ik}, \delta_i$ є неперервні за своїми аргументами, функції λ_i задовольняють умову Ліпшиця за змінною x, і виконується співвідношення $(\lambda_i(-kt,t)+k)\times(\lambda_i(kt,t)-k)\neq 0$. Нехай множини I_1, I_2, I_3 містять відповідно r_1, r_2, r_3 елементів, тоді $r_1+r_2+r_3=m$.

Узагальнений розв 'язок задачі. Позначимо через $\phi_i(\tau; x,t)$, $i \in \{1,\mathbf{K},m\}$ розв 'язок задачі Коші:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i\,(x,t)\,, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ці розв'язки є характеристиками системи (1). Крім того, ця система має сім'ю горизонтальних характеристик вигляду $t = t_0$. Нехай $\chi_i(x,t)$ – найменше значення аргументу t, за якого визначений розв'язок $\phi_i(t; x_0, t_0)$.

За допомогою інтегрування вздовж характеристик зведемо систему (1) до системи інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered} u_i(x,t) = u_i\,(\phi_i\,(\chi_i\,(x,t);x,t)\,,\chi_i\,(x,t)) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(\phi_i\,(\tau;x,t)\,,\tau)u_k(\phi_i\,(\tau;x,t)\,,\tau) + \right.\\ \left. +\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\,(\phi_i\,(\tau;x,t)\,,\tau)\,v_k(\phi_i\,(\tau;x,t)\,,\tau) + f_i\,(\phi_i\,(\tau;x,t)\,,\tau)\right)d\tau, \qquad i \in \{1,\mathbf{K},m\}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} v_j(x,t) = v_j\,(-kt,t) + \int\limits_{-kt}^{x}\left(\sum_{k=1}^{m} c_{jk}(y,t)u_k\,(y,t) + \right.\\ \left. +\sum_{k=1}^{n} d_{jk}(y,t)v_k\,(y,t) + g_j\,(y,t)\right)dy, \qquad j \in \{1,\mathbf{K},n\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Означення. Узагальненим неперервним розв'язком задачі (1), (2) називатимемо пару вектор-функцій (u,v), компоненти яких належать простору $C\left(\overline{V}\right)$, причому задовольняються інтегральні системи (3), (4) та крайові умови (2).

Основна теорема. Визначимо матрицю

$$A\,(t) = \left(\left(\gamma_{ik}^{1}\,(t)\right)_{\substack{i\in\{1,\mathbf{K}n+m+r_3\},\\ k\in I_2\cup I_3}} \quad \left(\gamma_{ik}^{2}\,(t)\right)_{\substack{i\in\{1,\mathbf{K}n+m+r_3\},\\ k\in I_1\cup I_3}} \quad \left(\psi_{ik}\,(t)\right)_{\substack{i\in\{1,\mathbf{K}n+m+r_3\},\\ k\in\{1,\mathbf{K},n\}}}\right).$$

Якщо ця матриця є невироджена за всіх значень аргументу t, то крайові умови (2) можна переписати у вигляді

$$\begin{gathered} u_i\,(-kt,t) = \sum_{s\in I_1}\mu_{is}^{1}\,(t)\,u_s\,(-kt,t) + \sum_{s\in I_2}\nu_{is}^{1}\,(t)\,u_s\,(kt,t) + \omega_i^{1}\,(t)\,, \qquad i \in I_2\cup I_3,\\ u_i\,(kt,t) = \sum_{s\in I_1}\mu_{is}^{2}\,(t)\,u_s\,(-kt,t) + \sum_{s\in I_2}\nu_{is}^{2}\,(t)\,u_s\,(kt,t) + \omega_i^{2}\,(t)\,, \qquad i \in I_1\cup I_3, \end{gathered} \tag{5}$$

$$v_j\,(-kt,t) = \sum_{s\in I_1}\mu_{js}^{3}\,(t)\,u_s\,(-kt,t) + \sum_{s\in I_2}\nu_{js}^{3}\,(t)\,u_s\,(kt,t) + \omega_j^{3}\,(t)\,, \qquad j \in \{1,\mathbf{K},n\}. \tag{6}$$

Визначимо матрицю

$$B = \begin{pmatrix} \left(\mu_{is}^{2}\,(0)\right)_{\substack{i\in I_1,\\ s\in I_1}} & \left(\nu_{is}^{2}\,(0)\right)_{\substack{i\in I_1,\\ s\in I_2}} \\ \left(\mu_{is}^{1}\,(0)\right)_{\substack{i\in I_2,\\ s\in I_1}} & \left(\nu_{is}^{1}\,(0)\right)_{\substack{i\in I_2,\\ s\in I_2}} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця $E - B$ є невироджена (E – одинична матриця), то система

$$\begin{cases} \alpha_i = \sum\limits_{s\in I_1}\mu_{is}^{1}\,(0)\,\alpha_s + \sum\limits_{s\in I_2}\nu_{is}^{1}\,(0)\,\alpha_s + \omega_i^{1}\,(0)\,, & i \in I_2,\\ \alpha_i = \sum\limits_{s\in I_1}\mu_{is}^{2}\,(0)\,\alpha_s + \sum\limits_{s\in I_2}\nu_{is}^{2}\,(0)\,\alpha_s + \omega_i^{2}\,(0)\,, & i \in I_1, \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $\alpha_i = \alpha_i^0$, $\quad i \in I_1 \cup I_2$.

Теорема. Нехай виконуються такі умови:

1) $\lambda_i, a_{ik}, b_{ik}, f_i, c_{jk}, d_{jk}, g_j$ – неперервні на множині $\overline{V}$, а $\gamma_{ik}^1, \gamma_{ik}^2, \psi_{ik}, \sigma_i$ – на відрізку $[0,T]$;
2) функції λ_i є ліпшицевими на множині $\overline{V}$ за змінною x;
3) виконуються співвідношення
$$(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(kt,t)-k)\neq 0,\quad t\in[0,T],\quad i\in\{1,\mathbf{K},m\},$$
$$\det A(t)\neq 0,\quad t\in[0,T],\qquad \det(E-B)\neq 0,$$
4) існує нерівність
$$\max\left\{\max_{t,\ i\in I_2\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}\left|\mu_{is}^1(t)\right|+\sum_{s\in I_2}\left|\nu_{is}^1(t)\right|\right),\quad \max_{t,\ i\in I_1\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}\left|\mu_{is}^2(t)\right|+\sum_{s\in I_2}\left|\nu_{is}^2(t)\right|\right)\right\}<1;$$
5) виконується умова погодження
$$\sum_{s\in I_1}\mu_{is}^1(0)\alpha_s^0+\sum_{s\in I_2}\nu_{is}^1(0)\alpha_s^0+\omega_i^1(0)=\sum_{s\in I_1}\mu_{is}^2(0)\alpha_s^0+\sum_{s\in I_2}\nu_{is}^2(0)\alpha_s^0+\omega_i^2(0),\quad i\in I_3.$$

Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв 'язок задачі (1), (2).

Доведення. Розглянемо простір Q, елементами якого є пари вектор-функцій $w=(u,v)$ з компонентами із простору $C(\overline{V})$, причому $u_i(0,0)=\alpha_i^0$, $i\in I_1\cup I_2$. Визначимо метрику так:0,
$$\rho\left(w^1,w^2\right)=\max\left\{\max_{i,x,t}\left|u_i^1(x,t)-u_i^2(x,t)\right|\alpha_i(x,y)e^{-at};\right.$$
$$\left.\max_{i,x,t}\left|v_i^1(x,t)-v_i^2(x,t)\right|\beta_i(x,y)e^{-at}\right\},\tag{7}$$
де сталу $a>0$ і неперервні додатні функції α_i,β_i підберемо пізніше. Зауважимо, що отриманий метричний простір є повним.

На елементах простору Q визначимо оператор $F=(F_1,\ldots,F_m)$
$$F_i[w](x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{s\in I_1}\mu_{is}^1(\chi_i(x,t))u_s(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))+\sum\limits_{s\in I_2}\nu_{is}^1(\chi_i(x,t))u_s(k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\ +\\ \qquad +\omega_i^1(\chi_i(x,t)),\quad \phi_i(\chi_i(x,t);x,t)=-k\chi_i(x,t),\\ \sum\limits_{s\in I_1}\mu_{is}^2(\chi_i(x,t))u_s(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))+\sum\limits_{s\in I_2}\nu_{is}^2(\chi_i(x,t))u_s(k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\ +\\ \qquad +\omega_i^2(\chi_i(x,t)),\quad \phi_i(\chi_i(x,t);x,t)=k\chi_i(x,t),\end{cases}$$
тоді рівність
$$u_i(\phi_i(\chi_i(x,t);x,t),\chi_i(x,t))=F_i[w](x,t),\quad i\in\{1,\mathbf{K},m\},\quad (x,t)\in\overline{V}$$
еквівалентна крайовим умовам (5).

Таким чином, узагальнений розв'язок задачі (1), (2) є розв'язком системи інтегро-операторних рівнянь
$$u_i(x,t)=F_i[w](x,t)+\int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(\phi_i(\tau;x,t),\tau)u_k(\phi_i(\tau;x,t),\tau)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(\phi_i(\tau;x,t),\tau)v_k(\phi_i(\tau;x,t),\tau)+f_i(\phi_i(\tau;x,t),\tau)\right)d\tau,\quad i\in\{1,\mathbf{K},m\},$$
$$v_j(x,t)=\sum_{s\in I_1}\mu_{js}^3(t)u_s(-kt,t)+\sum_{s\in I_2}\nu_{js}^3(t)u_s(kt,t)+\omega_j^3(t)+$$
$$+\int\limits_{-kt}^{x}\left(\sum_{k=1}^{m}c_{jk}(y,t)u_k(y,t)+\sum_{k=1}^{n}d_{jk}(y,t)v_k(y,t)+g_j(y,t)\right)dy,\quad j\in\{1,\mathbf{K},n\}.$$

Враховуючи отримані співвідношення, на елементах простору Q введемо оператор $A=(A_1^1,\dots,A_m^1,A_1^2,\dots,A_n^2)$, де

$$A_i^1[w](x,t)=F_i[w](x,t)+\int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(\phi_i(\tau;x,t),\tau)u_k(\phi_i(\tau;x,t),\tau)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(\phi_i(\tau;x,t),\tau)v_k(\phi_i(\tau;x,t),\tau)+f_i(\phi_i(\tau;x,t),\tau)\right)d\tau,\qquad i\in\{1,\mathbf{K},m\},$$

$$A_j^2[w](x,t)=\sum_{s\in I_1}\mu_{js}^3(t)u_s(-kt,t)+\sum_{s\in I_2}\nu_{js}^3(t)u_s(kt,t)+\omega_j^3(t)+$$

$$+\int\limits_{-kt}^{x}\left(\sum_{k=1}^{m}c_{jk}(y,t)u_k(y,t)+\sum_{k=1}^{n}d_{jk}(y,t)v_k(y,t)+g_j(y,t)\right)dy,\qquad j\in\{1,\mathbf{K},n\}.$$

Отже, відшукання узагальненого розв'язку задачі (1), (2) звели до знаходження нерухомої точки оператора A у просторі Q. Існування та єдиність нерухомої точки оператора встановимо на основі теореми Банаха про стискальне відображення. Зауважимо, що $A[w]\in Q$, якщо $w\in Q$, що випливає з відомих теорем математичного аналізу, а також із неперервності функцій ϕ_i за всіма компонентами, причому враховуємо припущення 3)–5) теореми.

Введемо позначення. Нехай

$$L=\max\left\{\max_{i,x,t}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}(x,t)|+\sum_{k=1}^{m}|b_{ik}(x,t)|\right),\quad \max_{j,x,t}\left(\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}(x,t)|+\sum_{k=1}^{m}|d_{jk}(x,t)|\right),\right.$$
$$\left.\max_{j,t}\left(\sum_{s\in I_1}|\mu_{js}^3(t)|+\sum_{s\in I_2}|\nu_{js}^3(t)|\right)\right\},$$

$$H=\max\left\{\max_{t,\ i\in I_2\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}|\mu_{is}^1(t)|+\sum_{s\in I_2}|\nu_{is}^1(t)|\right),\quad \max_{t,\ i\in I_1\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}|\mu_{is}^2(t)|+\sum_{s\in I_2}|\nu_{is}^2(t)|\right)\right\},$$

причому $H<1$.

Зауважимо, що з (7) для всіх допустимих i,x,t та $w\in Q$ випливає співвідношення

$$|u_i^1(x,t)-u_i^2(x,t)|\le\frac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_i(x,t)}e^{at},\qquad |v_i^1(x,t)-v_i^2(x,t)|\le\frac{\rho(w^1,w^2)}{\beta_i(x,t)}e^{at}.$$

Встановимо коефіцієнт стиску оператора A, для чого отримаємо ряд оцінок. Нехай $w^1\in Q$, $w^2\in Q$, тоді справедливе співвідношення

$$\left|F_i[w^1](x,t)-F_i[w^2](x,t)\right|\le H\max\left\{\max_{j\in I_1,\tau}\frac{e^{a\chi_i(x,t)}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\max_{j\in I_2,\tau}\frac{e^{a\chi_i(x,t)}}{\alpha_j(k\tau,\tau)}\right\}\rho(w^1,w^2).$$

Якщо $\phi_i(\chi_i(x,t);x,t)=-k\chi_i(x,t)$, то виконується рівність

$$x+\int\limits_{t}^{\chi_i(x,t)}\lambda_i(\phi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau=-k\chi_i(x,t),$$

з якої виводимо нерівність $\chi_i(x,t)\le\dfrac{-x+\Lambda t}{\Lambda+k}$, де $\Lambda=\max\limits_{i,x,t}|\lambda_i(x,t)|$. Аналогічно для $\phi_i(\chi_i(x,t);x,t)=k\chi_i(x,t)$ отримуємо нерівність $\chi_i(x,t)\le\dfrac{x+\Lambda t}{\Lambda+k}$.

На основі одержаних співвідношень виводимо оцінку для оператора A^1

$$\left|A_i^1\left[w^1\right](x,t)-A_i^1\left[w^2\right](x,t)\right|\alpha_i(x,t)e^{-at}\le$$

$$\leq H\max\left\{\max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{-x+\Lambda t}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\quad \max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{-x+\Lambda t}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(k\tau,\tau)},\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{x+\Lambda t}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\quad \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{x+\Lambda t}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(k\tau,\tau)}\right\}\rho\left(w^1,w^2\right)+$$

$$+\int_0^t e^{a(\sigma-t)}d\sigma\, L\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)},\quad \max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}\rho\left(w^1,w^2\right)\leq$$

$$\leq H\max\left\{\max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\quad \max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)},\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\quad \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)}\right\}\rho\left(w^1,w^2\right)+$$

$$+\frac{L}{a}\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)},\quad \max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}\rho\left(w^1,w^2\right),$$

а також для оператора A^2

$$\left|A_i^2\left[w^1\right](x,t)-A_i^2\left[w^2\right](x,t)\right|\beta_i(x,t)e^{-at}\leq\left(L\max\left\{\max_{i,j\in I_1}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},\right.\right.$$

$$\left.\left.\max_{i,j\in I_2}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt,t)}\right\}+\int_{-kt}^{x}L\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\right)\rho\left(w^1,w^2\right).$$

Використавши ці оцінки, встановлюємо:

$$\rho\left(A\left[w^1\right],A\left[w^2\right]\right)\leq\max_{(x,t)\in V}\left\{H\max\left\{\max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\right.\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)},\quad \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\quad \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)}\right\}+$$

$$+\frac{L}{a}\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)},\quad \max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}+L\max\left\{\max_{i,j\in I_1}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},\right.$$

$$\left.\left.\max_{i,j\in I_2}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt,t)}\right\}+\int_{-kt}^{x}L\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\right\}\rho\left(w^1,w^2\right).$$

Підберемо функції α_i,β_i так, щоб коефіцієнт стиску оператора був меншим від одиниці. Нехай

$$\alpha_i(x,t)=\begin{cases}e^{p(kt-x)}, & i\in I_1,\\ e^{p(kt+x)}, & i\in I_2,\\ e^{p(kt-x)(kt+x)}, & i\in I_3,\end{cases}\qquad \beta_i(x,t)=\varepsilon e^{-p(kt+x)},\qquad i\in\{1,\mathbf{K},n\},$$

де p, ε – деякі додатні параметри.

Нехай виконуються припущення

$$p(\Lambda+k)\leq a,\qquad 2pkT(\Lambda+k)\leq a,$$

тоді правильні рівності

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)} = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{i\in I_2\cup I_3} \alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}} =$$

$$= \max_{(x,t)\in\overline{V}} \max\left\{e^{p(kt+x)}, e^{p(kt-x)(kt+x)}\right\} e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}} = 1.$$

Подібно дістаємо рівності

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)} = 1, \qquad \max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_1,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)} = 1,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_2,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)} = 1.$$

Також маємо співвідношення

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{i,j\in I_1} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{2pkt}} = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \varepsilon e^{-3pkt-px} = \max_t \varepsilon e^{-2pkt} = \varepsilon,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{i,j\in I_2} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt,t)} = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{2pkt}} = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \varepsilon e^{-3pkt-px} = \max_t \varepsilon e^{-2pkt} = \varepsilon,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \int_{-kt}^{x} \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)} dy \le \max_{(x,t)\in\overline{V}} \int_{-kt}^{x} \varepsilon e^{-p(kt+x)}\, dy = \max_{x,t}\left\{\varepsilon e^{-p(kt+x)}(x+kt)\right\} \le \varepsilon 2kT,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \int_{-kt}^{x} \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)} dy \le \max_{(x,t)\in\overline{V}} \int_{-kt}^{x} \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{\varepsilon e^{-p(kt+y)}}\, dy = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \int_{-kt}^{x} e^{p(y-x)}\, dy =$$

$$= \max_{(x,t)\in\overline{V}} \frac{1-e^{-p(kt+x)}}{p} \le \frac{1}{p}.$$

У підсумку одержимо нерівність

$$\rho\left(A\left[w^1\right], A\left[w^2\right]\right) \le \left(H + \frac{L}{a} \max_{(x,t)\in\overline{V}} \left\{\max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)}; \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\} + \right.$$

$$\left. + L\varepsilon + L\left(\varepsilon 2kT + \frac{1}{p}\right)\right) \rho\left(w^1, w^2\right).$$

Нехай p^*, ε^* – додатні значення, що задовольняють умову

$$L\varepsilon^* + L\left(\varepsilon^* 2kT + \frac{1}{p^*}\right) < \frac{1-H}{2},$$

а функції α_i^*, β_i^* є рівними відповідно функціям α_i, β_i при $p = p^*$, $\varepsilon = \varepsilon^*$. Позначимо

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \left\{\max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\alpha_j^*(y,\tau)}; \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\beta_j^*(y,\tau)}\right\}.$$

Насамкінець фіксуємо значення a^*, щоб задовольнити умови

$$p^*(\Lambda+k) \le a^*, \qquad 2p^* kT(\Lambda+k) \le a^*, \qquad \frac{LM}{a^*} < \frac{1-H}{2}.$$

Тоді оператор A є стискальним на елементах простору Q^*, що рівний простору Q з вибраними функціями $\alpha_i = \alpha_i^*, \beta_i = \beta_i^*$ та параметром $a = a^*$.

Таким чином, на основі теореми Банаха існує єдина нерухома точка оператора A в просторі Q^*, яка є узагальненим неперервним розв'язком задачі (1), (2).

Зауваження. Умову 4) теореми можна замінити слабшою

$$\max\left\{\max_{i\in I_2\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}\left|\mu_{is}^1(0)\right|+\sum_{s\in I_2}\left|\nu_{is}^1(0)\right|\right),\quad \max_{i\in I_1\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}\left|\mu_{is}^2(0)\right|+\sum_{s\in I_2}\left|\nu_{is}^2(0)\right|\right)\right\}<1.$$

Тоді виконане вище доведення встановлює розв'язність задачі на зменшеному часовому проміжку $[0, T_0]$. Проте отриманий розв'язок допускає продовження на весь часовий проміжок $[0, T]$, що доводять запропоновані раніше методи [5].

Зазначимо, що з умов теореми можна отримати умови розв'язності задачі на множині $\overline{V}_\infty=\left\{(x,t)\in R^2 : 0\le t<\infty,\quad -kt\le x\le kt\right\}$. Сформулюємо ці умови у вигляді наслідку.

Наслідок. Нехай виконуються такі умови:

1) $\lambda_i, a_{ik}, b_{ik}, f_i, c_{jk}, d_{jk}, g_j$ – неперервні на множині $\overline{V}_\infty$, а $\gamma_{ik}^1, \gamma_{ik}^2, \psi_{ik}, \sigma_i$ – на проміжку $[0,\infty)$;
2) функції λ_i є локально ліпшицевими на множині $\overline{V}_\infty$ за змінною x;
3) виконуються співвідношення

$$(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(kt,t)-k)\neq 0,\quad t\in[0,\infty),\quad i\in\{1,\mathbf{K},m\},$$

$$\det A(t)\neq 0,\quad t\in[0,\infty),\qquad \det(E-B)\neq 0,$$

4) існує нерівність

$$\max\left\{\max_{i\in I_2\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}\left|\mu_{is}^1(0)\right|+\sum_{s\in I_2}\left|\nu_{is}^1(0)\right|\right),\quad \max_{i\in I_1\cup I_3}\left(\sum_{s\in I_1}\left|\mu_{is}^2(0)\right|+\sum_{s\in I_2}\left|\nu_{is}^2(0)\right|\right)\right\}<1;$$

5) виконується умова погодження

$$\sum_{s\in I_1}\mu_{is}^1(0)\,\alpha_s^0+\sum_{s\in I_2}\nu_{is}^1(0)\,\alpha_s^0+\omega_i^1(0)=\sum_{s\in I_1}\mu_{is}^2(0)\,\alpha_s^0+\sum_{s\in I_2}\nu_{is}^2(0)\,\alpha_s^0+\omega_i^2(0),\quad i\in I_3.$$

Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв 'язок задачі (1), (2) на множині $\overline{V}_\infty$.

1. *Кирилич В. М., Филимонов А. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Матем. студії.– 2008 – 30, № 1. – С. 42–60.
2. *Кузнецов Н. Н.* О гиперболических системах линейных уравнений с разрывными коэффициентами // Журн. высш. математики и мат. физ. Дифф. уравнения. – 1963 – 3, № 2. – С. 299–313.
3. *Лапин Д. С., Филимонов А. М.* Смешанная задача для сингулярной квазилинейной гиперболической системы с одной пространственной переменной // Матем. заметки .– 2003 – 73, № 2. – С. 315–318.
4. *Марсден Дж. Е., Чорин А.* Математические основы механики жидкости. – М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. – 204 с.
5. *Мауленов О., Мышкис А. Д.* О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке // Изв. АН КазССР. Сер. Физ.-матем. – 1981. – № 5. – С. 25–29.

6. *Мельник З. О., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для двумерной гиперболической системы первого порядка с разрывными коэффициентами // Матем. сб. – 1965 – 68, № 4. – С. 632–638.
7. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 368 с.
8. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
9. *Botkin N. D., Hoffmann K.-H., Turova V.L.* Optimal control of ice formation in living cells during freezing // Appl. Math. Modelling – 2011. – 35. – P. 4044–4057.
10. *Botkin N. D., Ryazantseva E. A.* Structure of viability kernels for some linear differential games // J. Optim. Theory Appl. – 2010. – 147. – P. 42–57.
11. *Courant R., Lax P.* On nonlinear partial differential equations with two independent variables // Comm. Pure. Appl. Math. – 1949. – 2. –P. 255–273.

ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрена краевая задача для линейной гиперболической системы с регулярной и сингулярной частями в угловой области. С помощью метода характеристик и принципа сжимающих отображений установлены условия существования и единственности глобального обобщенного непрерывного решения задачи.

THE PROBLEM FOR SINGULAR HYPERBOLIC SYSTEM IN ANGULAR DOMAIN

A boundary problem is considered for the linear hyperbolic system with regular and singular parts in an angular domain. Applying the method of characteristics and principle of contractive mappings the conditions global solvability of the problem are established.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
15.09.11.