УДК 539.3

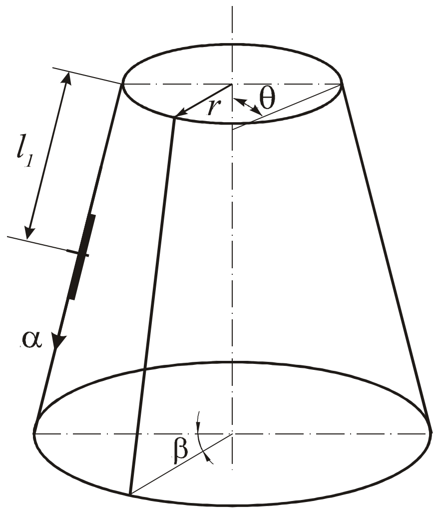
С. В. Зарицький

АЛГОРИТМ ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ ЗАМКНУТОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Задачу про напружено-деформований стан замкнутої ізотропної конічної оболонки, ослабленої поздовжньою наскрізною тріщиною, із використанням аналітично-числового методу та сплайн-функцій зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Напружено-деформований стан та граничну рівновагу оболонок з тріщинами вивчали здебільш на основі методу інтегральних рівнянь [1, 2, 4, 5]. Значно менше досліджень виконали числовими методами [5]. Тут пропонуємо аналітично-числовий підхід, який ґрунтується на методі дисторсій у теорії тонких оболонок з тріщинами [3].

Формулювання задачі. Розглянемо замкнуту конічну ізотропну оболонку завтовшки $2h$ і завдовжки $2L$, яка ослаблена наскрізною тріщиною $|\alpha| \le l$, $\beta = 0$, де α – відстань точки від початку координат вздовж твірної конуса, β – кут, утворений довільною і початковою меридіальними площинами (див. рисунок). Головні кривини серединної поверхні $k_1 = 0$, $k_2 = \dfrac{1}{R}$. Радіус кривини паралелі r зв'язаний з головним радіусом R кривини поверхні співвідношенням



$$r = R \sin\theta. \tag{1}$$

Квадрат диференціала довільної кривої на поверхні $ds^2 = d\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2\theta \, d\beta^2$, звідки знаходимо коефіцієнти A і B першої квадратичної форми:

$$A = 1, \; B = \alpha\cos\theta. \tag{2}$$

Беручи до уваги те, що кут, який утворює вісь із твірною оболонки, рівний $\dfrac{\pi}{2} - \theta$, знаходимо:

$$k_2 = \frac{1}{\alpha} tg\theta. \tag{3}$$

Для кутів повороту серединної поверхні маємо відомі з літератури співвідношеня

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{\alpha\cos\theta}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{\alpha} tg\theta. \tag{4}$$

Виходячи із подання тензора повної деформації e_{ij} у вигляді [2]

$$e_{ij} = e^s_{ij} + e^0_{ij}, \tag{5}$$

запишемо співвідношення, які зв'язують зусилля і моменти із компонентами тензора деформації:

$$\begin{aligned}
&N_1 = D_1\left[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - (\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0)\right],\\
&N_2 = D_1\left[\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 - (\varepsilon_2^0 + \nu\varepsilon_1^0)\right],\\
&S = \frac{1}{2}D_1(1-\nu)(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0),\\
&M_1 = D_2\left[\kappa_1 + \nu\kappa_2 - (\kappa_1^0 + \nu\kappa_2^0)\right],\\
&M_2 = D_2\left[\kappa_2 + \nu\kappa_1 - (\kappa_2^0 + \nu\kappa_1^0)\right],\\
&H = D_2(1-\nu)(\kappa_{12} - \kappa_{12}^0).
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут e_{ij}^0 – компоненти тензора дисторсій [3]; $e_{ij}^{(s)}$ – компоненти тензора пружної деформації, які зв'язані з компонентами тензора власних напружень узагальненим законом Гука.

Виражаючи деформації через переміщення, за відомими формулами отримуємо фізичні співвідношення

$$\left.\begin{aligned}
&N_1 = D_1\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\nu}{\alpha}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial\beta} + u + wtg\theta\right) - (\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0)\right],\\
&N_2 = D_1\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial\beta} + u + wtg\theta\right) + \nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right],\\
&S = D_1\frac{(1-\nu)}{2}\left[\frac{1}{\alpha\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{v}{\alpha} - \varepsilon_{12}^0\right],\\
&M_1 = -D_2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{\nu}{\alpha^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta} - \sin\theta\frac{\partial v}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + (\kappa_1^0 + \nu\kappa_2^0)\right],\\
&M_2 = -D_2\left[\frac{1}{\alpha^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta} - \sin\theta\frac{\partial v}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + (\kappa_2^0 + \nu\kappa_1^0)\right],\\
&H = D_2(1-\nu)\left[-\frac{1}{\alpha\cos\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{v}{\alpha}\right)tg\theta - \kappa_{12}^0\right],
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

де $D_1 = \dfrac{2Eh}{1-\nu^2}$, $\quad D_2 = \dfrac{2}{3}\dfrac{Eh^3}{1-\nu^2}$.

Враховуючи, що зусилля і моменти зберігають неперервність у кожній точці оболонки, а у функціях, які описують переміщення u, v, w і кути повороту ϑ_1, ϑ_2, виникають стрибки за переходу через лінію тріщини (розрив першого роду), на основі алгебри диференціювання розривних функцій отримаємо вирази для ε_{ij}^0, κ_{ij}^0 через стрибки переміщень та кутів повороту. Якщо тріщина розміщена вздовж лінії $\beta = 0 \quad |\alpha| \le 1$, то:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}^0 = 0\,,\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{B}[v(\alpha)]\delta(\beta)\,,\ \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{B}[u(\alpha)]\delta(\beta)\,,\\
&\kappa_{11}^0 = 0\,,\\
&\kappa_{22}^0 = -\frac{1}{B}\left\{[\vartheta_2(\alpha)]\delta(\beta) + \frac{1}{B}[w(\alpha)]\frac{\partial}{\partial\beta}\delta(\beta)\right\}\\
&\kappa_{12}^0 = -\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}[w(\alpha)] - \frac{k_1}{B}[u(\alpha)]\right\}\delta(\beta).
\end{aligned} \tag{8}$$

Тут $[f(\alpha)] = f^+(\alpha,+0) - f^-(\alpha,-0)\forall\alpha : \alpha \in l$, $2l$ – довжина тріщини, $[f(\alpha)] = 0\forall\alpha : \alpha \notin l$, $f - u, v, w, \vartheta_2$.

Система рівнянь рівноваги конічної оболонки в переміщеннях з урахуванням тріщини має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2\alpha^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-\frac{u}{\alpha^2}+\frac{1+\nu}{2\alpha\cos\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta\partial\alpha}-\frac{3-\nu}{2\alpha^2\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\nu\frac{tg\theta}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-$$

$$-\frac{tg\theta}{\alpha^2}w=\frac{D_1(\nu-1)}{B}[v(\alpha)]\delta(\beta)+D_1\nu\alpha\left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}([v(\alpha)])\delta(\beta)-\frac{1}{\alpha B}[v(\alpha)]\delta(\beta)\right),$$

$$\frac{1+\nu}{2\cos\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\alpha}+\frac{3-\nu}{2\alpha\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{1-\nu}{2}\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{1-\nu}{2\alpha}v+$$

$$+\frac{tg\theta}{\alpha\cos\theta}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{h^2tg\theta}{3\alpha^3\cos\theta}\left[\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\alpha^2(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+\alpha(4\nu-1)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}-2\nu\frac{\partial w}{\partial\beta}\right]+$$

$$+\frac{h^2tg^2\theta}{3\alpha^3}\left[2\alpha^2(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-2(1-2\nu)\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha}-v\right)\right]=$$

$$=D_1\frac{\alpha}{B^2}[v(\alpha)]\frac{\partial\delta(\beta)}{\partial\beta}-D_2\frac{\alpha^2k_2}{B^2}\left[[\vartheta_2(\alpha)]\frac{\partial\delta(\beta)}{\partial\beta}\right],$$

$$-tg\theta(\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{u}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{tg\theta}{\alpha}w)-\frac{h^2}{3}(\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+\frac{1}{\alpha^3\cos^4\theta}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+$$

$$+\frac{2}{\alpha\cos^2\theta}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+2\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}-\frac{2}{\alpha^2\cos^2\theta}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{4}{\alpha^3\cos^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha})+$$

$$+\frac{h^2tg\theta}{2\alpha^3\cos\theta}(\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^3 v}{\partial\beta^3}+(2-\nu)\alpha^2\frac{\partial^3 v}{\partial\alpha^2\partial\beta}-3\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+4\frac{\partial v}{\partial\beta})=-\alpha D_1\nu\frac{1}{B}[v(\alpha)]\delta(\beta)-$$

$$-2D_2\nu\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}[\vartheta_2(\alpha)]\delta(\beta)-\alpha D_2\nu\frac{1}{B}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}[\vartheta_2(\alpha)]\delta(\beta)+D_2\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}[\vartheta_2(\alpha)]\delta(\beta)-$$

$$-\frac{\alpha}{B^2}D_2\frac{1}{B}[\vartheta_2(\alpha)]\frac{\partial^2\delta(\beta)}{\partial\beta^2}, \tag{9}$$

де $c^2=\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}$.

Враховуючи 2π-періодичність напружено-деформованого стану оболонки з тріщиною та вважаючи, що навантаження симетричне відносно лінії $\beta=0$, розв'язок системи (9) шукаємо у вигляді

$$u(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}u_n^*(\alpha)\cos(n\beta);$$

$$v(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}v_n^*(\alpha)\sin(n\beta); \tag{10}$$

$$w(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}w_n^*(\alpha)\cos(n\beta).$$

Підставивши ці співвідношення в систему (9) і прирівнявши коефіцієнти біля косинусів та синусів, одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Доповнивши цю систему граничними умовами на контурі тріщини та торцях оболонки, отримаємо повну систему звичайних диференціальних рівнянь на функції $u_n^*(\alpha)$, $v_n^*(\alpha)$, $w_n^*(\alpha)$ для розв'язку задачі.

Розв'язок системи будуємо з використанням методу сплайн-функцій. Невідомі функції u_n^*, v_n^* та w_n^* подамо так:

$$u_i^*(x)=u_i^{(0)}+u_i^{(1)}(x-x_i)+\frac{1}{2}u_i^{(2)}(x-x_i)^2+\frac{1}{6}u_i^{(3)}(x-x_i)^3,$$

$$v_i^*(x)=v_i^{(0)}+v_i^{(1)}(x-x_i)+\frac{1}{2}v_i^{(2)}(x-x_i)^2+\frac{1}{6}v_i^{(3)}(x-x_i)^3, \tag{11}$$

$$w_i^*(x) = w_i^{(0)} + w_i^{(1)}(x - x_i) + \frac{1}{2} w_i^{(2)}(x - x_i)^2 + \frac{1}{6} w_i^{(3)}(x - x_i)^3 +$$
$$+ \frac{1}{24} w_i^{(4)}(x - x_i)^4 + \frac{1}{120} w_i^{(5)}(x - x_i)^5, x = \alpha/\alpha_0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Стрибки переміщення та кута повороту запишемо у вигляді

$$[v] = \sqrt{1 - (x/l)^2}\,\phi_1(x),$$
$$[\theta_2] = \sqrt{1 - (x/l)^2}\,\phi_2(x), \tag{12}$$

де $\phi_i(x) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(i)} T_n(x)$, $A_n^{(i)} = \frac{2 - \delta_{on}}{N} \sum_{k=1}^{N} \phi_i(x_k)\cos(nt_k)$, $x_k = \cos(t_k)$, $t_k = \frac{2k-1}{2N}\pi$, $x \le 1$, δ_{on} – символ Кронекера, $T_n(x)$ – многочлени Чебишева першого роду.

Подання (12) не забезпечує рівності нулю стрибків $[v]$ та $[\theta_2]$ поза тріщиною. Тому уявно розіб'ємо оболонку з тріщиною на три частини: середня $|\alpha| \le l$ і дві крайні $l < |\alpha| \le L$. При цьому на лініях $|\alpha| = l$ повинні виконуватись умови ідеального механічного контакту:

$$u = 0, \; v = 0, \; w = 0, \; \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0. \tag{13}$$

Таким чином, система ключових рівнянь у середній частині оболонки має вигляд (9), а в крайніх

$$L_{i1}u + L_{i2}v + L_{i3}w = 0, \; i = 1, 2, 3, \tag{14}$$

Отже, підставивши подання (10) з урахуванням (11), (12) у системи диференціальних рівнянь (9), (14) і задовольнивши відповідні граничні умови на торцях оболонки, умови (13) та граничні умови на берегах тріщини

$$N_2^0 + N_2 = N_2^{(1)}, M_2^0 + M_2 = M_2^{(1)}$$

(N_2^0, M_2^0 – відповідно нормальне зусилля та згинний момент на лінії тріщини в оболонці без тріщини, викликані зовнішнім навантаженням; $N_2^{(1)}$, $M_2^{(1)}$ – ці ж силові параметри, прикладені до берегів тріщини), зведемо задачу до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Висновок. На основі запропонованого аналітично-числового підходу задачу про напружено-деформований стан замкнутої конічної оболонки з тріщиною зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь. Цей підхід доцільно використовувати до оболонок, для яких невідомий фундаментальний роз'язок ключових рівнянь і відповідно не можна звести задачу до інтегральних рівнянь.

1. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонки з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
2. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.
3. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трешинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
4. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка. – 1988. – 617 с. (Механика разрушения и прочность материалов: в 4-х т. Т. 2).
5. *Справочник* по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. *Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 560 с.

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Задача о напряженно-деформированном состоянии замкнутой изотропной конической оболочки, ослабленной продольной сквозной трещиной, на основании метода дисторсий и сплайн-функций сведена к системе линейных алгебраических уравнений.

ALGORITHM OF INVESTIGATION OF LIMIT EQUILIBRIUM OF A CLOSED CONIC SHELL WITH LONGITUDINAL CRACK

A problem on the stress-strain state of a closed isotropic conical shell weakened by a longitudinal through crack is reduced to a system of linear algebraic equation using the analytical-numerical method and spline functions. The numerical analysis of disturbed efforts and moments in the vicinity of a crack tip versus boundary conditions is carried out.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
08.11.10