

ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ЗА НЕЗАДАНИХ ДІЛЯНОК ЇХНЬОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Сформульовано плоску контактну задачу теорії пружності для тіл складної форми, що взаємодіють із системою жорстких штампів. Побудовано умови контакту та методика їх розв'язування, коли сумарні розміри областей, які контактують, значно менші ніж розміри областей, де контакт відсутній. Досліджено контактну взаємодію періодичних штампів з півплощиною та контуром отвору кругової форми. На основі цих розрахунків знайдено зв'язок між розподілами напружень під штампами періодичної та відповідної гладкої форм. Наближено змодельована контактна взаємодія системи роликів штампів з внутрішньою поверхнею зовнішнього кільця у радіальному роликовому підшипнику під вертикальним навантаженням з урахуванням сил тертя.

Вступ. Розв'язування плоских контактних задач теорії пружності для тіл складної форми найчастіше зводиться до розгляду нелінійних інтегральних рівнянь [3, 4]. Зазначимо, що ці рівняння є нелінійні через невизначену область контакту, яка в свою чергу може складатися з довільної кількості ділянок, межі яких невідомі. До таких задач належать досить актуальні на сьогодні задачі, в яких, крім складних форм штампів, потрібно ще й врахувати їх шорсткість або шорсткість основи, на яку вони тиснуть. Вплив хвилястості в контактних задачах досліджено раніше [1–3]. Такі задачі розв'язували різними методами (в основному числовими): Б. А. Галанов зводив їх до системи рівнянь Гамерштейна, А. Сіньйоріні вперше подав контактну задачу як варіаційну з обмеженнями у вигляді нерівностей. Далі цей підхід розвинули в працях [2–4, 6]. Аналітичними методами досліджували контактні задачі з незаданими ділянками контакту [1, 5].

Загальне формулювання задачі. Нехай задано систему m жорстких штампів, межі яких опишемо функціями $f^1(x, y) = 0, \dots, f^m(x, y) = 0$. Вважатимемо, що рівняння для межі тіла в області контакту має вигляд $g(x, y) = 0$. Покладемо, що до кожного штампа прикладені сили, головні вектори та моменти яких відповідно дорівнюють $(P_x^1, P_y^1), \dots, (P_x^m, P_y^m)$ і M^1, \dots, M^m . Розглядатимемо також випадок, коли до тіла прикладені зосереджені сили $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Умови контакту. Для запису умов контакту візьмемо до уваги те, що після деформування межові точки пружного тіла, що знаходяться в області контакту, для кожного j -го штампа задовольнятимуть рівняння границі штампа з урахуванням його зміщення в напрямках координатних осей Ox та Oy відповідно на деякі відстані D_x^j та D_y^j та його повороту на деякий кут θ^j . Тобто рівняння штампів після зміщень та повороту матимуть вигляд

$$f^j(\xi + \eta\theta^j + D_x^j, -\xi\theta^j + \eta + D_y^j) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad (1)$$

де $\xi = x + u + U_P$, $\eta = y + v + V_P$, де (u, v) – сумарні переміщення, зумовлені дією всіх штампів; (U_P, V_P) – сумарні переміщення, зумовлені дією всіх зосереджених сил. Всі переміщення разом з величинами D_x^j , D_y^j та θ^j вважатимемо малими. Підставивши значення ξ та η в рівняння (1), одержимо умову контакту

$$f^j (x + u(x, y) + U_p(x, y) + (y + v(x, y) + V_p(x, y)) \theta^j + D_x^j, - (x + u(x, y) + U_p(x, y)) \theta^j + y + v(x, y) + V_p(x, y) + D_y^j) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Нехай рівняння для межі тіла параметризовано: $x = g_1(\alpha)$, $y = g_2(\alpha)$. Тоді умову (2) можна переписати у вигляді

$$f_1^j(\alpha) \tilde{u}(\alpha) + f_2^j(\alpha) \tilde{v}(\alpha) = -\tilde{f}^j(\alpha) - f_1^j(\alpha) \tilde{U}_p(\alpha) - f_2^j(\alpha) \tilde{V}_p(\alpha) - D_x^j f_1^j(\alpha) - D_y^j f_2^j(\alpha) + \theta^j f_3^j(\alpha) + \delta^j(\alpha), \quad j = \overline{1, m}; \quad (3)$$

де $\tilde{f}^j(\alpha) = f^j(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$, $f_1^j(\alpha) = f_x^j(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$, $f_2^j(\alpha) = f_y^j(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$, $f_3^j(\alpha) = g_1(\alpha) \cdot f_2^j(\alpha) - g_2(\alpha) \cdot f_1^j(\alpha)$; $\tilde{u}(\alpha) = u(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$, $\tilde{v}(\alpha) = v(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$, $\tilde{U}_p(\alpha) = U_p(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$, $\tilde{V}_p(\alpha) = V_p(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$; $\delta^j(\alpha) = o(\tilde{u}, \tilde{v})$ – додатковий член, який має другий порядок малості відносно переміщень.

Визначення переміщень (u, v) . Приймемо, що відомий фундаментальний розв'язок, тобто відомі переміщення в будь-якій точці границі заданого пружного тіла, спричинені довільними зосередженими силами. Тоді переміщення межі цього тіла можна записати так:

$$\begin{cases} \tilde{u}(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{11}(\alpha, \xi) d\xi + \int_{\Omega} \tau(\xi) K_{12}(\alpha, \xi) d\xi, \\ \tilde{v}(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{21}(\alpha, \xi) d\xi + \int_{\Omega} \tau(\xi) K_{22}(\alpha, \xi) d\xi; \end{cases} \quad (4)$$

де σ – нормальні контактні напруження, τ – відповідні дотичні контактні напруження; функції K_{ij} , $i, j = \overline{1, 2}$ визначаємо за допомогою фундаментального розв'язку; $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$, Ω_k – область зміни параметра, яка відповідає k -ій ділянці контакту.

Вважаємо, що діє закон Кулона–Амонтона $\tau = \rho\sigma$, де ρ – коефіцієнт тертя. Тоді співвідношення (4) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{u}(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{\tilde{u}}(\alpha, \xi) d\xi, \\ \tilde{v}(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{\tilde{v}}(\alpha, \xi) d\xi; \end{cases} \quad (5)$$

де $K_{\tilde{u}}(\alpha, \xi) = K_{11}(\alpha, \xi) + \rho K_{12}(\alpha, \xi)$, $K_{\tilde{v}}(\alpha, \xi) = K_{21}(\alpha, \xi) + \rho K_{22}(\alpha, \xi)$.

Побудова інтегральних рівнянь та додаткових рівностей. Після підставлення співвідношень (5) в умову контакту (3) при нехтуванні величинами δ^j одержимо лінеаризовані умови контакту у вигляді інтегральних рівнянь

$$\int_{\Omega} \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi = F^j(\alpha) - D_x^j f_1^j(\alpha) - D_y^j f_2^j(\alpha) + \theta^j f_3^j(\alpha), \quad j = \overline{1, m}; \quad (6)$$

де $J^j(\alpha, \xi) = f_1^j(\alpha) K_{\tilde{u}}(\alpha, \xi) + f_2^j(\alpha) K_{\tilde{v}}(\alpha, \xi)$, $F^j(\alpha) = -\tilde{f}^j(\alpha) - f_1^j(\alpha) \tilde{U}_p(\alpha) - f_2^j(\alpha) \tilde{V}_p(\alpha)$.

Для знаходження $3m$ невідомих D_x^j , D_y^j , θ^j , $j = \overline{1, m}$, систему інтегральних рівнянь (6) доповнимо додатковими $3m$ рівностями, які побудуємо з умов рівноваги штампів:

$$\begin{cases} \int_{\Omega^j} \sigma(\xi) \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{x}}\right) ds = P_x^j, \quad \int_{\Omega^j} \sigma(\xi) \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{y}}\right) ds = P_y^j, \\ \int_{\Omega^j} \sigma(\xi) \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{x}}\right) y ds = M^j, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей, а також числового алгоритму її розв'язування. Умови контакту (6) є нелінійними інтегральними рівняннями, оскільки наперед невідома область контакту (вона може складатися з великої і наперед не визначеної кількості ділянок). Для розв'язування такої задачі використаємо підхід Сін'яоріні. Ввівши в розгляд сукупність прогнозованих областей D^j , що покривають області Ω^j , і загальну прогнозовану область D , що покриває область Ω , побудуємо альтернативну систему інтегральних рівнянь та нерівностей:

$$\begin{cases} \int_D \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi + D_x^j f_1^j(\alpha) + D_y^j f_2^j(\alpha) - \theta^j f_3^j(\alpha) = F^j(\alpha), \sigma(\alpha) < 0, \\ \int_D \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi + D_x^j f_1^j(\alpha) + D_y^j f_2^j(\alpha) - \theta^j f_3^j(\alpha) \leq F^j(\alpha), \sigma(\alpha) = 0, \\ \int_{D^j} \sigma(\xi) \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{x}}\right) ds = P_x^j, \quad \int_{D^j} \sigma(\xi) \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{y}}\right) ds = P_y^j, \\ \int_{D^j} \sigma(\xi) \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{x}}\right) y ds = M^j, \quad j = \overline{1, m}; \end{cases} \quad (7)$$

де $D = \bigcup_{k=1}^m D^k$, D^j – прогнозована область, що охоплює область контакту Ω^j .

Тут знехтувано величини δ^j та прийнято на кожній множині D^j , що $\sigma(\xi) = 0$ при $\xi \notin \Omega^j$.

Далі, як і в працях [3, 4], побудуємо числовий алгоритм розв'язування задачі (7). Суть цього алгоритму полягає в тому, що спочатку за допомогою методу механічних квадратур систему інтегральних рівнянь та нерівностей (7) перетворюємо в систему лінійних рівнянь та нерівностей відносно невідомих контактних напружень у вузлових точках, що покривають прогнозовану область контакту. Розв'язування цієї системи зведемо до відповідної задачі квадратичного програмування (ЗКП) [4].

Модифікація побудованого алгоритму. Алгоритм дає змогу знаходити розподіли контактних напружень, коли область контакту в них може складатися з декількох довільно розташованих ділянок. Досить часто в таких задачах сумарний розмір ділянок, в яких контакт відсутній, значно більший за розмір ділянок контакту. Для цього випадку модифікуємо алгоритм [2–4] так, щоб зменшити кількість вузлових точок, а отже, і розмірність відповідної ЗКП. Ітеративний алгоритм розв'язування цієї задачі зводиться до такого. Спочатку розв'яжемо відповідну задачу для вибраної кількості вузлових точок, що покривають рівномірно всю прогнозовану область контакту. Далі на основі одержаного розв'язку, знайдемо межі всіх ділянок прогнозованого контакту (у першому наближенні). На наступному кроці вузлові точки з невідомими контактними напруженнями вибираємо тільки на знайдених ділянках. При цьому внаслідок згущення вузлових точок підвищується точність розрахунків.

Альтернативну систему лінійних рівнянь та нерівностей запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} = F_v \text{ при } \sigma_v < 0, \\ \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} \leq F_v \text{ при } \sigma_v = 0, \\ \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^1 \sigma_n = P, \quad \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^2 \sigma_n = M, \quad v = n'_1, \dots, m'_1, n'_2, \dots, m'_2, \dots, n'_S, \dots, m'_S; \end{array} \right. \quad (8)$$

де S – кількість ділянок контакту; n'_1, n'_2, \dots, n'_S та m'_1, m'_2, \dots, m'_S – індекси у згрупованій сукупності вузлових точок розбиття лівих та правих меж ділянок контакту.

Систему (8) далі зведемо до задачі квадратичного програмування, тобто знайдемо мінімум величини

$$Y = \sum_{k=1}^S \sum_{v=n'_k}^{m'_k} C_v \left(\left(\sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} - F_v \right) \sigma_v \right)$$

за умов

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} \leq F_v, \\ v = n'_1, \dots, m'_1, n'_2, \dots, m'_2, \dots, n'_S, \dots, m'_S, \\ \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^1 \sigma_n = P, \quad \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^2 \sigma_n = M, \\ \sigma_n \leq 0, \quad n = n'_1, \dots, m'_1, n'_2, \dots, m'_2, \dots, n'_S, \dots, m'_S; \end{array} \right.$$

Далі знайдемо розв'язки побудованої ЗКП. За необхідності вказаний вище процес уточнення ділянок контакту і напружень повторюємо на наступних ітераціях.

Контактні напруження під штампами, форми яких задають за допомогою періодичної на деякому проміжку функції. Нехай форму штампа (рис. 1а) задає періодична функція

$$f_{um}(x) = \begin{cases} r \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^2} \right), & |x - x_0| \leq \Lambda, \\ r \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Lambda}{r} \right)^2} \right), & \Lambda < |x - x_0| \leq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (9)$$

де r – радіус кругових дуг, $x_0 = a^* + \frac{T}{2} + \left[\frac{x - a^*}{T} \right] T$. Тут $[x]$ – ціла частина від x , $\Lambda \in \left(0; \frac{T}{2} \right]$ – деяка стала величина.

Розподіли розрахованих відносних контактних напружень $p(x) = \sigma(x)/2G$ під таким штампом за відносних значень головного вектора сили $Q = -P/2Gr = 0.0075$ та різних значень коефіцієнта тертя зображено на рис. 1б та в. Кружечками тут позначено значення усереднених зусиль на кожному періоді, які обчислюють за формулою

$$Q_s = \frac{-1}{2GT} \int_{L_s} \sigma(t) dt, \quad (10)$$

де L_s – s -та ділянка контакту.

На цьому рисунку зображено також відповідні відносні контактні напруження $\tilde{p}(x) = \tilde{\sigma}(x)/2G$, які виникають під плоским штампом [1, 2]. Як

бачимо, в центральних ділянках контакту усереднені напруження (кружечки) практично збігаються із відповідними під плоским штампом. Дещо більші відхилення спостерігаємо на крайніх ділянках.

На кожній ділянці знайдено розподіли під окремими фрагментами штампа (які вибираємо на різних періодах), прикладений до якого головний вектор сил дорівнює $\tilde{\sigma}(M_j)T$, де M_j - центральна точка на j -му періоді.

Отримані розподіли відносних контактних напружень зображено на рис. 1 штрих-пунктирними лініями. Одержані напруження під фрагментами штампа практично збігаються із результатами розрахунків під суцільним штампом. Отже, в таких задачах з достатньою для практики точністю знаходження розподілу напружень під суцільним періодичним штампом можна звести до відшукування розподілів під системою ізольованих штампів за відповідно вибраного навантаження, що на нього діє.

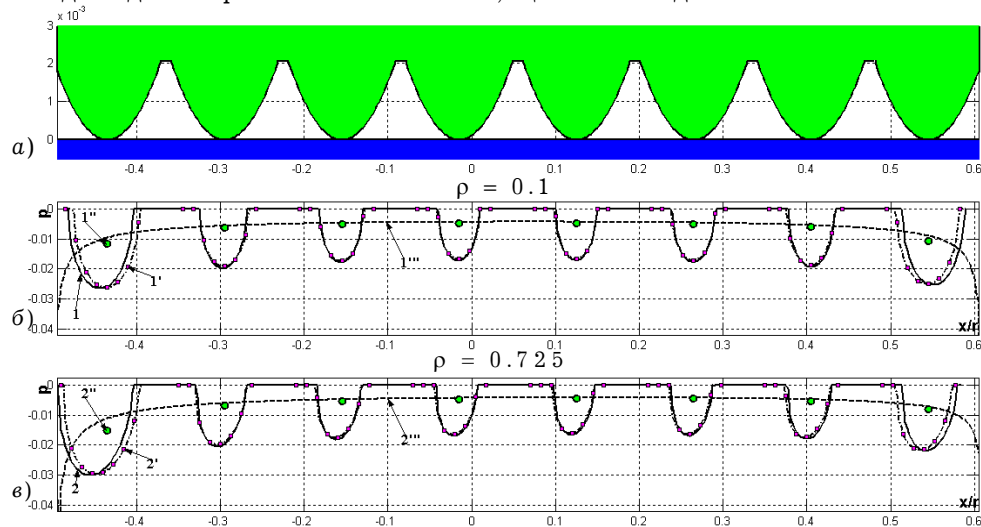


Рис. 1. Розподіли напружень під штампом, форму якого задає функція (9).

Контактні напруження під плоским штампом із закругленими кряями на хвилястій поверхні. Форму цього штампа задамо рівнянням

$$f_{um}(x) = R \left(1 - \sqrt[m]{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^m} \right) \text{ при } \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1, \quad (11)$$

де R - радіус кривизни.

Шорсткість поверхні тіла часто наближено описують хвилястістю за допомогою косинусоїди [1, 2], тому межу тіла задамо функцією

$$g_\varepsilon(x) = A \cos(kx).$$

Розрахунки виконані при $m = 8$, $A = 4 \cdot 10^{-5}$, $k = 60$ та $b = -a = 3\pi R/20$. Форму штампа та межі тіла ілюструє рис. 2.

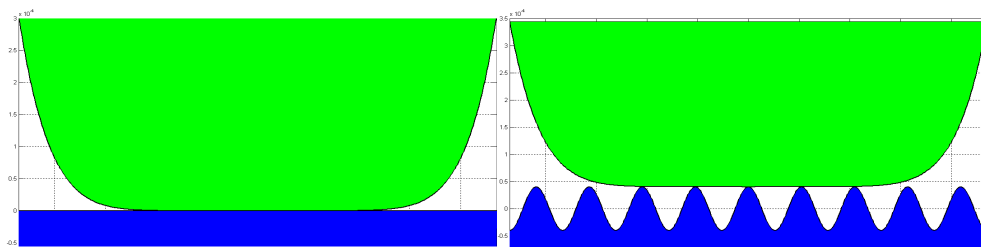


Рис. 2. Штмп, форму якого задає функція (11) на різних поверхнях.

На рис. 3 за різних значень коефіцієнта тертя та головного вектора сили кривими 1–4 відповідають розподіли відносних напружень на шорсткій поверхні, а кривими 1'–4' – на гладкій поверхні. Непарні криві – відносні значення головного вектора сили $Q_1 = 0.0004$, а парні – $Q_2 = 0.0008$.

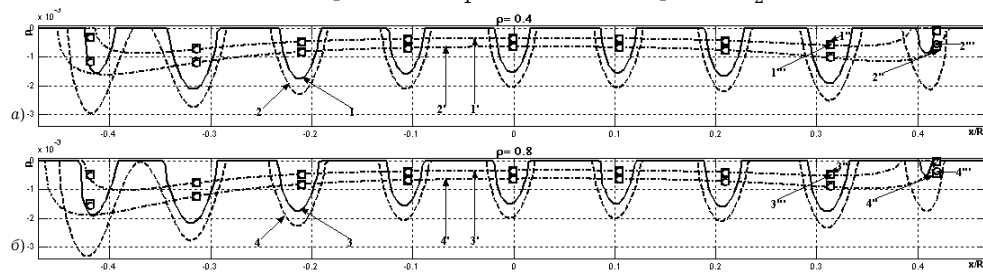


Рис. 3. Розподіли напружень під штапом, форму якого задає функція (11)

Розраховані значення усереднених зусиль для хвилястої поверхні під кожним фрагментом штампа практично збігаються із напруженнями у відповідній точці, які знаходять розглядаючи гладкий штамп.

Моделювання контактної взаємодії у радіальному роликовому підшипнику. Розглянемо задачу про наближене визначення контактних напружень на внутрішній поверхні зовнішнього кільця у радіальному роликовому підшипнику (рис. 4). Умови контакту тут побудуємо із відомих співвідношень [4]. Розподіли відносних контактних напружень за різних значень коефіцієнта тертя та при $Q = 0.01$ наведено на рис. 4б та в. Тут криві 1–2 описують розподіли напружень під роликовими штампамі, а криві 1'–2' – під гладким (великим) круговим штапом, розміри якого збігаються з розмірами отвору. Криві 1''–2'' – усереднені зусилля під кожним роликом окремо. Видно, що ці значення майже збігаються з напруженнями у відповідних точках під великим круговим штапом.

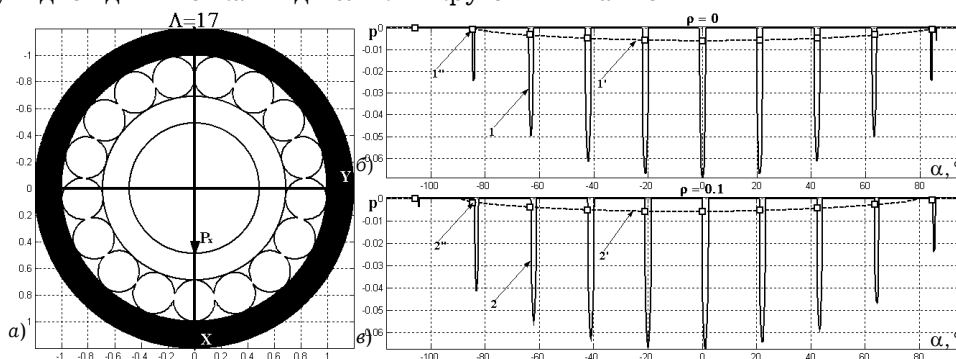


Рис. 4. Розподіли напружень на внутрішній поверхні зовнішнього кільця у радіальному роликовому підшипнику.

Отже, таку задачу можна звести до відшукування напружень під системою однакових роликових штампів.

Висновки. Розроблений алгоритм визначення контактних напружень під штапами складної форми дає можливість знаходити розподіли з довільною і наперед невизначеною кількістю ділянок їхньої взаємодії. Якщо відома кількість ділянок контакту, то розв'язування таких задач аналітичними методами достатньо складне та проблематичне, оскільки для знаходження меж областей контакту потрібно розв'язувати досить громіздку (яку не завжди можна побудувати) систему трансцендентних рівнянь. Запропоновано модифікований підхід до розв'язування контактних задач, за яким можна істотно зменшити обсяг обчислень, коли дискретні ділянки

контакту мають малі розміри порівняно з розмірами штамп. Ефективність методу проілюстровано під час розгляду контактної взаємодії гладкої півплощини зі штампом періодичної форми та напівнескінченного тіла, обмеженого хвилястим контуром, з майже плоским штампом із закрутленими краями. Досліджено контактні напруження у підшипнику, що складається з 17 роликів.

1. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. Коцюба А. Ю., Лавренчук С. В. Комп'ютерне моделювання контактної взаємодії жорсткого штамп складної форми та півплощини з урахуванням сил тертя // Наукові нотатки. – 2010. – Вип. 27. – С. 151–159.
4. Максимович В. М., Коцюба А. Ю. Числовий алгоритм визначення контактних напружень під штампом складної форми для пластини з круговим отвором // Машинознавство. – 2007. – №10 (124) – С. 10–15.
5. Мартыняк Р. М., Чумак К. А. Термоупругость контактной пары при наличии шероховатости на локальном участке сопряженных поверхностей // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 32–38.
6. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М.: Физматлит, 2001. – 670 с.

ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ПРИ НЕЗАДААННЫХ УЧАСТКАХ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Сформулирована общая постановка плоской контактной задачи теории упругости для тел сложной формы, что взаимодействуют с системой жестких штампов. Построены условия контакта и методика их решения для случая, когда суммарные размеры контактирующих областей значительно меньше, нежели области, где контакт отсутствует. Исследовано контактное взаимодействие периодических штампов с полуплоскостью и контуром отверстия круговой формы. На основе этих расчетов обнаружена связь между распределениями напряжений под штампами периодической и соответствующей гладкой форм. Приближенно смоделировано контактное взаимодействие системы роликовых штампов с внутренней поверхностью внешнего кольца в радиальном роликовом подшипнике при вертикальной нагрузке с учетом сил трения.

FLAT CONTACT TASKS OF THEORY OF STRAIN FOR THE BODIES OF DIFFICULT FORM AT THE UNSET AREAS OF THEIR CO-OPERATION

The general statement is formulated for the flat contact task of theory of strain for the bodies of difficult form, which co-operate with the system of hard stamps. The terms of contact and method of their solving are built for a case, when total sizes of areas, which are in a contact, are considerably less by comparison to the areas, where the contact is absent. The contact co-operation of the periodic stamps with half-area and the contour of opening of circular form are investigated. On the basis of these calculations is found out the connection between the distribution of tensions under the stamps of periodic and proper smooth forms. The close design of the contact co-operation of the system of roller stamps is conducted with the internal surface of the external ring in the radial roller bearing at the vertical loading taking into account of forces of friction.