УДК 393.3

В. С. Попович, В. В. Янішевський

МЕТОД ЛІНЕАРИЗУВАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ У ЗАДАЧАХ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

На прикладі визначення температурного поля для півбезмежної термочутливої пластини з теплообміном проілюстровано розроблений метод лінеаризувальних параметрів стосовно знаходження температурних полів у тонкостінних термочутливих елементах конструкцій з теплообміном, а також компонент напружено-деформованого стану, спричинених знайденим розподілом температури.

Вступ. За нехтування перетворенням механічної енергії у теплову визначення термопружного стану тіла зводять до попереднього розв'язання відповідної задачі теплопровідності. Якщо виходити з моделі термочутливого тіла (теплові і механічні характеристики матеріалу залежать від температури), то компоненти термопружного стану можна визначити з крайової задачі для системи рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами [7, 22]. Для її розв'язання переважно використовують різні варіанти методу збурень [4, 7, 12, 22, 23]. В результаті компоненти термопружного стану знаходять у вигляді швидкозбіжних рядів, члени яких визначають з послідовності відповідних крайових задач для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Характерною її особливістю є те, що у формулюванні кожної наступної крайової задачі послідовності міститься розв'язок попередньої.

У той же час відповідна задача для визначення розподілу температури є нелінійна [5, 7, 8, 18, 22]. Її точний розв'язок можна знайти, коли на поверхні тіла задати температуру або тепловий потік за умови, що матеріал володіє т. зв. простою тепловою нелінійністю (коефіцієнт теплопровідності λ_t і об'ємна теплоємність c_v залежать від температури, а їх відношення (коефіцієнт температуропровідності $a = \lambda_t / c_v$) – неістотно і його можна вважати сталим [1, 5, 7, 8, 18, 22]). Для цього достатньо скористатись перетворенням Кірхгофа [7, 18, 22]. У результаті отримуємо відповідну лінійну крайову задачу на змінну Кірхгофа, розв'язок якої можна знайти класичними методами (розділення змінних, інтегральних перетворень тощо). Поступаючи аналогічно, можна відшукати розв'язок задачі теплопровідності для кристалічних тіл, теплові характеристики яких пропорційні кубу абсолютної температури за умов суто променевого теплообміну з довкіллям [1, 8].

У разі складного теплообміну (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) перетворення Кірхгофа лінеаризує задачу теплопровідності лише частково. В крайовій задачі на змінну Кірхгофа нелінійним буде і рівняння, отримане з рівняння теплопровідності (через залежність коефіцієнта температуропровідності від змінної Кірхгофа), і гранична умова, одержана з умови складного теплообміну (через нелінійний вираз температури на поверхні тіла). Завдяки такій локалізації нелінійностей її аналітико-числовий розв'язок можна знайти методом послідовних наближень, у якому за m-не наближення вибрано розв'язок певної лінійної задачі [7, 13, 15, 20, 23].

За простої нелінійності матеріалу ця задача істотно спрощується. Відповідне рівняння на змінну Кірхгофа стає лінійним і при заданні на поверхні тіла умови конвективного теплообміну для побудови її аналітично-числового розв'язку можна використати простіші і ефективніші підходи. Вони передбачають побудову розв'язку рівняння на змінну Кірхгофа з деякою лінійною умовою, що містить т. зв. „лінеаризувальний параметр" [2, 3, 10–12, 14 17, 19, 21]. Після знаходження її розв'язку цей параметр шляхом ітерації підбирають так, щоб з заданою точністю задовольнялась нелінійна умова, отримана з умови конвективного теплообміну. Маючи вираз змінної Кірхгофа та конкретну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, встановлюємо формулу для обчислення температури через цю змінну.

Зауважимо, що багато дослідників, розглядаючи задачі термопружності для тіл з простою тепловою нелінійністю за наявності конвективного теплообміну на їх поверхнях і прагнучи отримати аналітичні вирази температурного поля, недостатньо обґрунтовано лінеаризували нелінійну умову, одержану з умови конвективного теплообміну, шляхом заміни нелінійного виразу температури на поверхні тіла на змінну Кірхгофа. Тут же на прикладі задачі термопружності для півбезмежної тонкої пластини з теплообміном зроблена спроба внести ясність у питання згаданої лінеаризації та отримати на цій основі коректні результати.

Математична модель задачі теплопровідності. Розглянемо півбезмежну пластину товщиною 2δ, яка через поверхню $x = 0$ нагрівається шляхом конвективного теплообміну з середовищем температури t_x. Через бокові поверхні $z = \pm\delta$ пластина взаємодіє з довкіллям, температура якого t_c, за тим самим законом. Початкова температура пластини t_p. При цьому коефіцієнт теплообміну через торець $x = 0$ дорівнює α_x, а через бокові поверхні рівний α_z. Матеріал пластини термочутливий і володіє т. зв. простою нелінійністю, тобто коефіцієнт температуропровідності незначно залежить від температури і приймається за сталу величину a_0.

Неусталене температурне поле такої пластини визначаємо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right) = c_\nu(t)\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{1}$$

за таких граничних і початкових умов:

$$\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial x} - \alpha_x(t - t_x)\right]_{x=0} = 0, \tag{2}$$

$$\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial z} \pm \alpha_z(t - t_c)\right]_{z=\pm\delta} = 0, \tag{3}$$

$$t\big|_{x=\infty} = t_p, \tag{4}$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_p. \tag{5}$$

Розв'язання задачі теплопровідності. Подаємо $\lambda_t(t)$ і $c_\nu(t)$ у вигляді $\lambda_t(t) = \lambda_{t0}\cdot\lambda_t^*(t)$, $c_\nu(t) = c_{\nu 0}\cdot c_\nu^*(t)$, де λ_{t0} та $c_{\nu 0}$ – опорні значення коефіцієнтів теплопровідності і об'ємної теплоємності відповідно (значення цих характеристик за початкової температури t_p), а $\lambda_t^*(t)$ та $c_v^*(t)$ – функції, що описують залежність цих характеристик від температури ($\lambda_t^*(t_p) = c_v^*(t_p) = 1$).

Вибравши за відлікову деяку температуру t_0, введемо безрозмірні температури $\{T,\ T_p,\ T_x,\ T_c\} = \{t,\ t_p,\ t_x,\ t_c\} / t_o$ та здійснимо перехід до них у виразах, що описують залежність від температури теплових характеристик. Ввівши змінну Кірхгофа [7, 8, 18, 22]

$$\theta = \int_{T_p}^{T} \lambda_t^*(T')dT' \tag{6}$$

та врахувавши зауваження щодо простої нелінійності матеріалу пластини, з задачі (1)–(5) отримаємо таку крайову задачу на змінну θ:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a_0}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\alpha_x}{\lambda_{t0}}(T(\theta) - T_x)\right]_{x=0} = 0, \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial z} \pm \frac{\alpha_z}{\lambda_{t0}}(T(\theta) - T_c)\right]_{z=\pm\delta} = 0, \tag{9}$$

$$\theta\big|_{x=\infty} = 0, \tag{10}$$

$$\theta\big|_{\tau=0} = 0. \tag{11}$$

Тут $T(\theta)$ – вираз для температури через змінну Кірхгофа, який для конкретної залежності $\lambda_t^*(T)$ знаходимо з рівняння (6). Наприклад, якщо ця залежність лінійна $\lambda_t^*(T) = 1 + k \cdot \overline{T}$, де k – деяка стала, $\overline{T} = T - T_p$, то рівняння (6) набуває вигляду $\theta = \overline{T} + k\overline{T}^2 / 2$. Розв'язавши його відносно $\overline{T}$, знаходимо:

$$T(\theta) - T_p = \frac{\sqrt{1 + 2k\theta} - 1}{k}. \tag{12}$$

Зауважимо, що з двох можливих знаків перед коренем квадратним вибраний знак „+", за якого за спрямування k до нуля (нетермочутливий матеріал) отримуємо фізично коректний результат: $\theta = T - T_p$.

Якщо присутній в (12) корінь квадратний розвинути в ряд та обмежитись двома його членами, то отримаємо $T(\theta) = \theta + T_p$. Якщо скористатися таким наближенням, то з умов (8), (9) дістанемо лінійні умови. Як показано раніше [7, 11, 12], така лінеаризація в певних випадках може призвести навіть до фізично некоректних результатів. З огляду на це лінеаризуємо нелінійний вираз $T(\theta)$ шляхом його заміни лінійним

$$T(\theta) - T_p = (1 + \kappa)\theta, \tag{13}$$

який містить деякий поки що невідомий („лінеаризувальний") параметр κ.

Враховуючи сказане, присутні у граничних умовах (8), (9) нелінійні вирази шуканої температури на торцевій та бокових поверхнях пластини замінимо такими лінійними виразами:

$$\begin{aligned} T(\theta)\big|_{x=0} &= (1 + \kappa_x)\,\theta\big|_{x=0} + T_p, \\ T(\theta)\big|_{z=\pm\delta} &= (1 + \kappa_z)\,\theta\big|_{z=\pm\delta} + T_p. \end{aligned} \tag{14}$$

Тоді з граничних умов (8), (9) отримаємо лінійні умови

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0} - \frac{\alpha_x}{\lambda_{t0}}\left((1 + \kappa_x)\,\theta\big|_{x=0} - (T_x - T_p)\right) = 0, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=\pm\delta} \pm \frac{\alpha_z}{\lambda_{t0}}\left((1 + \kappa_z)\,\theta\big|_{z=\pm\delta} - (T_c - T_p)\right) = 0, \tag{16}$$

які, крім вхідних даних задачі, містять два довільних (лінеаризувальних) параметри κ_x і κ_z.

Якщо ввести безрозмірні координати $\bar{x} = \frac{x}{\delta}$, $\bar{z} = \frac{z}{\delta}$, час $\mathrm{Fo} = \frac{a_0 \tau}{\delta^2}$ та критерії Біо $\mathrm{Bi}_z = \frac{\alpha_z \delta}{\lambda_{t0}}$, $\mathrm{Bi}_x = \frac{\alpha_x \delta}{\lambda_{t0}}$, то задача (7), (10), (11), (15), (16) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} - \mathrm{Bi}_x^* \left(\theta|_{\bar{x}=0} - T_x^*\right) = 0, \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}}\right|_{\bar{z}=\pm 1} \pm \mathrm{Bi}_z^* \left(\theta|_{\bar{z}=\pm 1} - T_c^*\right) = 0, \tag{19}$$

$$\theta|_{\bar{x}=\infty} = 0, \tag{20}$$

$$\theta|_{\mathrm{Fo}=0} = 0. \tag{21}$$

Тут $T_x^* = \frac{T_x - T_p}{1 + \kappa_x}$; $T_c^* = \frac{T_c - T_p}{1 + \kappa_z}$; $\mathrm{Bi}_x^* = \mathrm{Bi}_x \left(1 + \kappa_x\right)$; $\mathrm{Bi}_z^* = \mathrm{Bi}_z \left(1 + \kappa_z\right)$.

З огляду на тонкість пластини усереднимо змінну Кірхгофа θ за її товщиною, як температуру тонкої пластини в працях [8, 9].

Тоді, врахувавши симетрію задачі відносно площини $\bar{z} = 0$, отримаємо, що $\theta = \theta_c$, де $\theta_c = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \theta d\bar{z}$. В результаті усереднення з рівняння (17) з використанням граничних умов (19) одержимо рівняння для визначення усередненого θ:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} - \mathrm{Bi}_z^* \left(\theta - T_c^*\right) = \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}}. \tag{22}$$

Усереднення граничних (18), (19) та початкової (21) умов не змінює їх вигляду.

Застосувавши до рівняння (22) та граничних умов (18), (19) перетворення Лапласа [23] за часовою координатою, врахувавши початкову умову (21), отримаємо таку крайову задачу на знаходження зображення Лапласа змінної Кірхгофа:

$$\frac{d^2 \hat{\theta}}{d\bar{x}^2} - \left(\mathrm{Bi}_z^* + s\right)\hat{\theta} = \frac{\mathrm{Bi}_z \left(T_c - T_p\right)}{s}, \tag{23}$$

$$\left.\frac{d\hat{\theta}}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} - \mathrm{Bi}_x^* \left(\hat{\theta}\Big|_{\bar{x}=0} - \frac{T_x^*}{s}\right) = 0, \tag{24}$$

$$\hat{\theta}\Big|_{\bar{x}=\infty} = 0, \tag{25}$$

де $\hat{\theta} = \int_0^\infty \theta e^{-s\mathrm{Fo}} d\mathrm{Fo}$; s – параметр перетворення Лапласа.

Для спрощення викладок вважаємо, що $T_c = T_p$. Тоді розв'язок рівняння (23) має вигляд $\hat{\theta} = C_1 e^{\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}_z^* + s}} + C_2 e^{-\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}_z^* + s}}$, де C_1 та C_2 – сталі інтегрування. З умови (25) слідує, що $C_1 = 0$, а після знаходження сталої C_2 зображення Лапласа змінної Кірхгофа набуває вигляду

$$\hat{\theta} = \frac{\mathrm{Bi}_x(T_p - T_x)}{s(\mathrm{Bi}_x^* + \sqrt{\mathrm{Bi}_z^* + s})} e^{-\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}_z^* + s}} . \tag{26}$$

Для знаходження θ виконаємо в (26) обернене перетворення Лапласа, скориставшись табличними даними [24]. Тоді

$$\theta(\mathrm{Fo}, \bar{x}, \kappa_x, \kappa_z) = \frac{\mathrm{Bi}_x(T_p - T_x)}{(\mathrm{Bi}_x^*)^2 - \mathrm{Bi}^*}\left(\frac{\mathrm{Bi}_x^*}{2}\left[e^{-\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}_z^*}} erfc\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} - \sqrt{\mathrm{Bi}_z^*\mathrm{Fo}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + e^{\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}_z^*}} erfc\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} + \sqrt{\mathrm{Bi}_z^*\mathrm{Fo}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}} e^{-\frac{\bar{x}^2}{4\mathrm{Fo}} - \mathrm{Bi}_z^*\mathrm{Fo}} -$$

$$- \frac{\sqrt{\mathrm{Bi}_z^*}}{2}\left[e^{-\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}_z^*}} erfc\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} - \sqrt{\mathrm{Bi}_z^*\mathrm{Fo}}\right) - e^{\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}_z^*}} erfc\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} + \sqrt{\mathrm{Bi}_z^*\mathrm{Fo}}\right)\right] +$$

$$\left. + e^{-\mathrm{Bi}_z^*\mathrm{Fo}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}} e^{-\frac{\bar{x}^2}{4\mathrm{Fo}}} - \mathrm{Bi}_x^* e^{\bar{x}\mathrm{Bi}_x^* + \mathrm{Bi}_x^{*2}\mathrm{Fo}} erfc\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{Fo}} + \sqrt{\mathrm{Bi}_x^*\mathrm{Fo}}\right)\right]\right).$$

За знайденою змінною Кірхгофа розподіл температури визначимо за формулою (12).

Присутні у виразі температури невідомі “лінеаризувальні параметри” знаходимо, задовольняючи, з заданою нами точністю, нелінійні граничні умови (8) і (9). З них отримаємо систему трансцендентних рівнянь для визначення параметрів κ_x та κ_z

$$\begin{cases} k(1 + \kappa_x)^2 \,\theta|_{\bar{x}=0} + 2\kappa_x = 0, \\ k(1 + \kappa_z)^2\theta + 2\kappa_z = 0, \end{cases} \tag{27}$$

де перше рівняння отримане з рівності $k^{-1}\left(\sqrt{1 + 2k\theta} - 1\right)\Big|_{\bar{x}=0} = (1 + \kappa_x)\theta|_{\bar{x}=0}$, а друге – з рівності $k^{-1}\left(\sqrt{1 + 2k\theta} - 1\right) = (1 + \kappa_z)\theta$.

Система рівнянь (27) є нелінійна. Для знаходження її розв’язку за конкретного значення Fo та $\bar{x}$ використовуємо метод Ньютона, за перше наближення якого вибираємо $\kappa_{z0} = 0$, $\kappa_{x0} = 0$.

Побудова розв’язку задачі термопружності. Знайдений залежний від часу Fo та координати $\bar{x}$ розподіл температури спричинить у пластині певний напружено-деформований стан. Його визначатиме переміщення u_0 в напрямку осі Ox, яке знаходять з рівняння [7, 8]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G(t)}{1 - \nu(t)}\frac{\partial u_0}{\partial x} - G(t)\frac{1 + \nu(t)}{1 - \nu(t)}\Phi(t)\right) = 0 , \tag{28}$$

де $\Phi(t) = \int\limits_{t_p}^{t} \alpha_t(t)dt$ – суто теплова деформація, а $\alpha_t(t)$, $G(t)$ і $\nu(t)$ – відповідно залежні від температури температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини. Пластину вважаємо вільною від зовнішніх навантажень, а отже, зусилля $N_x|_{x=0} = 0$. Ця умова, записана через переміщення, має вигляд

$$\left[J_1\frac{\partial u_0}{\partial x} + J_2\frac{\partial u_0}{\partial x} - J_3\right]_{x=0} = 0 , \tag{29}$$

де $J_1 = 2\delta\frac{\nu(t)G(t)}{1 - \nu(t)}$; $J_2 = 2\delta G(t)$; $J_3 = 2\delta G(t)\frac{1 + \nu(t)}{1 - \nu(t)}\Phi(t)$.

Враховуючи вирази $J_i\,(i = 1,2,3)$, умову (29) запишемо так:

$$\left[\frac{G(t)}{1-\nu(t)}\frac{\partial u_0}{\partial x} - G(t)\frac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)}\Phi(t)\right]_{x=0} = 0. \qquad (30)$$

Відповідні компоненти тензора напружень через переміщення u_0 обчислимо за формулами

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G(t)\left(\dfrac{\nu(t)}{1-\nu(t)}+1\right)\dfrac{\partial u_0}{\partial x} - 2G(t)\dfrac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)}\Phi(t), \\ \sigma_{yy} = 2G(t)\left(\dfrac{\nu(t)}{1-\nu(t)}\right)\dfrac{\partial u_0}{\partial x} - 2G(t)\dfrac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)}\Phi(t), \quad \sigma_{xy} = 0, \end{cases} \qquad (31)$$

і вони повинні задовольняти рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \qquad (32)$$

Інтегруючи рівняння (28), отримуємо:

$$\frac{G(t)}{1-\nu(t)}\frac{\partial u_0}{\partial x} - G(t)\frac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)}\Phi(t) = c, \qquad (33)$$

де c – довільна стала.

З граничної умови (30) знаходимо, що $c = 0$. Тоді з рівності (33) маємо:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = (1+\nu(t))\Phi(t). \qquad (34)$$

Врахувавши вираз (34), формули (31) запишемо так:

$$\sigma_{yy} = -2G(t)(1+\nu(t))\Phi(t), \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \qquad (35)$$

Подамо механічні характеристики у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де функції $\chi^*(T)$ описують залежність характеристик від безрозмірної температури:

$$\begin{aligned} &G(t) = G_0(1 + k_{G1}\overline{T} + k_{G2}\overline{T}^2 + k_{G3}\overline{T}^3), \\ &\nu(t) = \nu_0(1 + k_{\nu 1}\overline{T} + k_{\nu 2}\overline{T}^2 + k_{\nu 3}\overline{T}^3), \\ &\alpha_t(t) = \alpha_{t0}(1 + k_{\alpha 1}\overline{T} + k_{\alpha 2}\overline{T}^2), \end{aligned} \qquad (36)$$

а G_0, ν_0 і α_{t0} – опорні значення відповідних параметрів. Тепер вираз для суто теплової деформації $\Phi(t)$ набуде вигляду

$$\Phi(t) = \alpha_{t0} t_0 \left(\overline{T} + k_{\alpha 1}\overline{T}^2 / 2 + k_{\alpha 2}\overline{T}^3 / 3\right),$$

а отже,

$$\sigma_{yy} = -2G_0 G^*(T)\left(1 + \nu_0 \nu^*(T)\right)\alpha_{t0} t_0 \left(\overline{T} + k_{\alpha 1}\overline{T}^2 / 2 + k_{\alpha 2}\overline{T}^3 / 3\right).$$

Вводячи безрозмірне напруження $\sigma_y = \dfrac{\sigma_{yy}}{2G_0 \alpha_{t0} t_0}$, маємо:

$$\sigma_y = -G^*(T)\left(1 + \nu_0 \nu^*(T)\right)\left(\overline{T} + k_{\alpha 1}\overline{T}^2 / 2 + k_{\alpha 2}\overline{T}^3 / 3\right).$$

Числові дослідження. Числово досліджували знайдене температурне поле та спричинені ним напруження у пластині зі сталі У12 при $t_x = 673\text{K}$ і $t_p = 273\text{K}$. Відлікове значення температури t_0 приймаємо рівним t_x. На основі експериментальних табличних даних [6] коефіцієнт теплопровідності сталі подамо у вигляді лінійної залежності, а механічні характеристики – як залежності (36).

Після знаходження методом найменших квадратів коефіцієнтів k, $k_{\alpha 1}$, $k_{\alpha 2}$, k_{G1}, k_{G2}, k_{G3}, $k_{\nu 1}$, $k_{\nu 2}$, $k_{\nu 3}$ вирази цих характеристик набудуть вигляду

$$\lambda_t(t) = 47.8\left(1 - 0.366\overline{T}\right),$$

$$G(t) = 0.794 \cdot 10^{11}(1 - 0.27\overline{T} + 0.21\overline{T}^2 + 0.59\overline{T}^3),$$

$$\nu(t) = 0.282(1 + 0.199\overline{T} - 1.291\overline{T}^2 + 2.36\overline{T}^3),$$

$$\alpha_t(t) = 11.68 \cdot 10^{-6}(1 + 1.33\overline{T} - 0.65\overline{T}^2),$$

а суто теплова деформація

$$\Phi(t) = t_0 11.68 \cdot 10^{-6}\left(\overline{T} + 1.33\overline{T}^2 / 2 - 0.65\overline{T}^3 / 3\right).$$

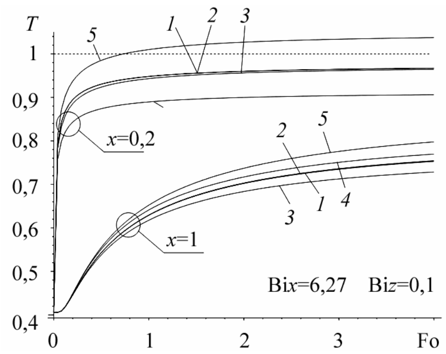

Рис. 1.

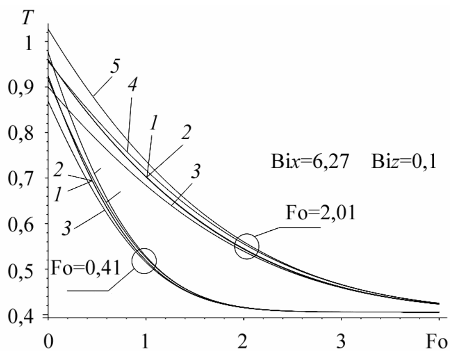

Рис. 2.

Побудовано (рис. 1 і 2) залежності неусталеного температурного поля T, а також (рис. 3–6) напруження σ_y від безрозмірних часу Fo та координати $\overline{x}$. Для порівняння на рис. 1 і 2 наведені графіки таких самих залежностей температури для нетермочутливого тіла за середніх (криві *3*) та опорних (криві *4*) значень теплових характеристик. Середні значення знайдено за формулою

$$\chi_c = \frac{1}{T_x - T_p}\int_{T_p}^{T_x} \chi(T)dT,$$

де $\chi(T)$ – апроксимоване значення характеристики. Також подано залежності температури T від часу Fo, обчислені на основі розв'язків отриманих з використанням одного ($\kappa_x = \kappa_z$, криві *1*) та двох (криві *2*) лінеаризувальних параметрів. Криві *5* відповідають температурі термочутливого тіла за нульових значень цих параметрів.

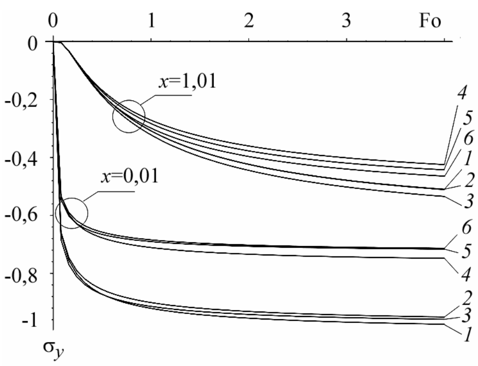

Рис. 3.

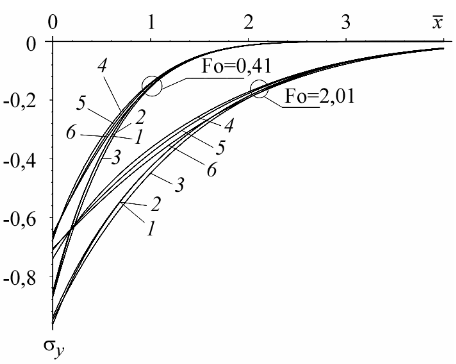

Рис. 4.

На рис. 3–6 криві *1* відповідають термочутливому тілу, коли всі термомеханічні характеристики залежні від температури; криві *2–4* – відповідно коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву і коефіцієнт лінійного розширення опорний (рис. 3 і 4) або середній (рис. 5 і 6) (інші без змін); криві *5* – всі механічні характеристики опорні або середні (лише коефіцієнт теплопровідності залежить від температури). Криві *6* – нетермочутливе тіло, коли всі теплові та механічні характеристики дорівнюють їх опорним або середнім значенням.

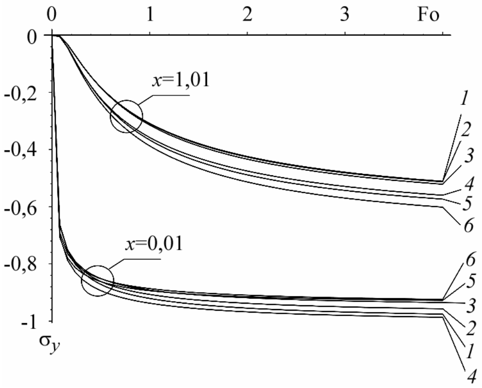

Рис. 5.

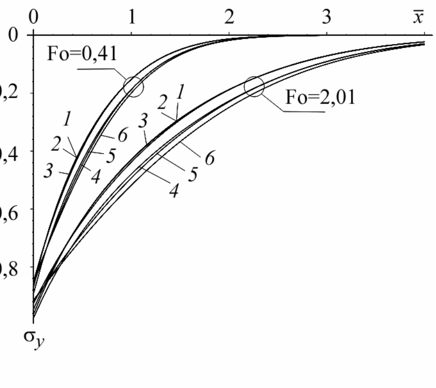

Рис. 6.

Висновки. Розв'язанням нестаціонарної задачі теплопровідності для термочутливої тонкої півбезмежної пластини з теплообміном проілюстровано метод лінеаризувальних параметрів для побудови розв'язків задач теплопровідності тонкостінних елементів конструкцій. Зауважимо, що тут перетворення Кірхгофа лише частково лінеаризує як саме рівняння, так і граничні умови. Для отримання її аналітичного розв'язку необхідна додаткова лінеаризація.

Під час дослідження температурного поля встановлено, що достатньо використати один лінеаризувальний параметр, який обчислюють з умови конвективного теплообміну на торці пластини. Як видно з рис. 1 і 2, необґрунтована лінеаризація призводить до фізично некоректних результатів, оскільки в певний момент часу температура торця пластини стає вищою, ніж гріючого середовища. За нехтування температурною залежністю модуля зсуву (тоді він дорівнює опорному його значенню), який в даному діапазоні температур змінюється на 3.7%, напруження відрізняються на 5%, а нехтуючи температурну залежність коефіцієнта Пуассона, який змінюється на 15%, отримаємо відмінність напружень менше відсотка, а температурну залежність коефіцієнта лінійного розширення, який змінюється на 56%, до 20%.

Встановлено, що розбіжності між температурами, знайденими за залежних від температури характеристик та їх опорних значень, є менші, ніж знайдені за залежних від температури характеристик та їх середніх значень. Під час дослідження напружень, навпаки, розбіжності між напруженнями, знайденими за залежних від температури характеристик та середніх їх значень, є менші, ніж знайдені за залежних від температури характеристик та їх опорних значень.

1. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.

2. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Напружений стан термочутливої пластини в центрально-симетричному температурному полі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 2. – С. 5–12.

3. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Там же. – 2001. – **37**, № 6. – С. 39–44.
4. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
6. *Марочник* сталей и сплавов / Под ред. В. Г. Сорокина. – М.: Машиностроение, 1989. – 640 с.
7. *Моделювання* та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т.3: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
8. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
9. *Попович В. С.* Моделирование тепловых полей в тонких термочувствительных пластинах // Моделирование и оптимизация сложных механических систем. –К.: Ин-т кибернетики, 1991. – С. 70–75.
10. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Нестаціонарна задача теплопровідності для термочутливого простору зі сферичною порожниною // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 100–104.
11. *Попович В. С.* О решении задач теплопроводности термочувствительных тел, нагреваемых путем конвективного теплообмена // Там же. – 1988. – Вып. 28. – С. 83–86.
12. *Попович В. С.* О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих термочувствительных тел // Там же. – 1989. – Вып. 29. – С. 51–55.
13. *Попович В. С.* Побудова розв'язків задач термопружності термочутливих тіл при конвективно-променевому теплообміні // Доп. НАН України. – 1997. – № 11. – С. 69–73.
14. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Розв'язування нестаціонарних задач теплопровідності для термочутливих тіл при конвективному теплообміні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 2. – С. 148–152.
15. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю., Вовк О. М.* Термопружний стан термочутливої порожнистої кулі за умов конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 39–48.
16. *Попович В. С., Сулим Г. Т.* Центрально-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла // Там же. – 2004. – **40**, № 3. – С. 62–68.
17. *Попович В. С., Федай Б. Н.* Осесимметричная задача термоупругости многослойной термочувствительной трубы // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 1. – С. 97–103.
18. *Carslaw, H. S., Jaeger, J. C.* Conduction of heat in solids Clarendon. – Oxford, 1959. – 430p.
19. *Kushnir, R. M., Popovych, V. S., Harmatiy, H. Yu.,* Solution of quasi-static thermoelasticity problem for thermosensitive bodies under a convective heat exchange // Proc. of 5th Intern. Congress on Thermal Stresses and Related Topics (Blacksburg, VA, USA, 08–11 June, 2003). – Virginia Tech., 2003.–Vol. 1. – P. MM–3–2–1 – MM–3–2–4.
20. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Thermostressed state of thermal sensitive sphere under complex heat exchange wit the surroundings. // Proc. 7^{th} Int. Congress on Thermal Stresses, Taipei, Taiwan, 4–7 June 2007., Vol. 1. – P. 369–372.
21. *Kushnir R. M., Popovych V. S., Tokovyy Yu. V.* Method for construction of analytical-numerical solutions to the thermoelasticity problems for thermosensitive solids // Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media: VI Pol.–Ukr. Sci. Conf. – Warsaw, 2005. – P. 72–73.
22. *Noda, N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties, Thermal Stresses I, North-Holland, Amsterdam, 1986. – P. 391–483.
23. *Popovych V. S., Kushnir R. M., Vovk O. M.* The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange // J. Engng Math. – 2008, № 2–4. – P. 375–369.
24. *Prudnikov A. V., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.* Direct Laplace transforms. Integrals and Series. – New York, 1992, Vol. 4. – 331p.

25. *Prudnikov A. V., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.* Inverse Laplace transforms. Integrals and Series. – New York, 1992, Vol. 5. – 595p.

МЕТОД ЛИНЕАРИЗИРУЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

На примере определения температурного поля для полубесконечной термочувствительной пластины с теплообменом проиллюстрирован разработанный метод линеаризующих параметров для определения температурных полей в тонкостенных термочувствительных элементах конструкций с теплообменом, а также определены компоненты напряженно-деформированного состояния, вызванного найденным распределением температуры.

THE LINEARIZATION PARAMETERS METHOD IN THERMOELASTICITY PROBLEMS OF THIN-WALLED THERMOSENSITIVE CONSTRUCTIONAL ELEMENTS

By the example of determining the temperature field in a half-infinite thermosensitive plate under heat exchange, we illustrate the method of linearized parameters developed for determining the temperature field in thin-walled structures as well as the stressed-strained state caused by the found temperature distribution.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.10.10