

РУХ РІДИНИ НАВКОЛО СКІНЧЕННОГО ВИХРОВОГО ЛАНЦЮЖКА

Розглянуто дві вихрові структури, кожна з яких складається з розташованих на одній прямій точкових вихорів. Вихорі мають однакову інтенсивність та розташовані на однаковій відстані один від одного. Перша структура має три вихори, друга – п'ять. Досліджено рух структур та побудовано лінії течії рідини.

Вступ. Першим найпростішим прикладом руху системи точкових вихорів є задача про рух двох вихорів, яку розглянув Г. Гельмгольц у 1902 р. Перші експерименти з вивчення вихрових явищ у рідині виконані у 1906 р. Зазвичай рухомим тілом був циліндр. За достатньо великої швидкості руху поза циліндром, по чергово справа та зліва, починають утворюватися вихори. Спочатку вони віддаляються від тіла з деякою швидкістю, яка поступово зменшується, а відстань між вихорами дещо збільшується. Аналогічні досліди виконували Карман, Рубах та ін.

Розглянуто [2, 4, 6] рух нескінченних лінійних систем точкових вихорів. Наведено [1] рівняння руху нестисливої рідини для плоскопаралельної течії. Досліджено [5] рух вихорів у деяких скінченних системах.

Три вихори. Розглянемо ланцюжок, що складається з трьох точкових вихорів, які знаходяться один від одного на однаковій відстані a та мають однакову інтенсивність χ . Комплексний потенціал руху рідини поза вихором інтенсивності χ , центр якого знаходиться в точці z_0 , можна відшукати за рівнянням

$$\omega = i\chi \ln(z - z_0).$$

Нехай наша система має такий вигляд: центральний вихор розташовано у початку координат, решту – по обидва боки від нього. Комплексний потенціал руху рідини навколо такої системи

$$\omega_3 = i\chi \ln(z) + i\chi \ln(z \pm a). \quad (1)$$

Для знаходження швидкості вихорів скористаємось теоремою Кельвіна. Спочатку визначимо швидкість вихору, що знаходиться в початку координат. Крайні вихорі, діючи на нього, продукують швидкості $V_0^a = \chi/2\pi a$ та $V_0^{-a} = -\chi/2\pi a$, рівні за абсолютними значеннями, але протилежні за напрямком. Таким чином, загальна швидкість $V_0 = 0$ і центральний вихор перебуває у стані спокою. За теоремою Кельвіна швидкість кожного з двох інших вихорів $V_a = \chi/2\pi a + \chi/4\pi a$, але вони також матимуть протилежний напрям. Отже, про рух системи можна сказати таке: центральний вихор знаходитиметься в стані спокою, а крайні обертатимуться навколо нього по коловій траєкторії з радіусом a . При цьому швидкість їх обертання буде V_a і вони розташовуватимуться на одній прямій.

Розглянемо стійкість системи. Змістимо вихор, що знаходиться в початку координат, на деяку величину l по осі x в додатному напрямку. Його швидкість під дією двох інших

$$V_0^1 = \frac{\chi}{2\pi(a-l)} - \frac{\chi}{2\pi(a+l)} = \frac{2\chi l}{2\pi(a^2 - l^2)}.$$

Після зміщення вихор набуває швидкості і віддалятиметься від початкового положення. Розглянемо швидкості інших вихорів. Вихор, що знаходиться у точці $(a, 0)$, матиме швидкість

$$V_a^1 = \frac{\chi}{2\pi(a-l)} + \frac{\chi}{4\pi a},$$

а вихор у точці $(-a, 0)$ –

$$V_{-a}^1 = \frac{\chi}{2\pi(a+l)} + \frac{\chi}{4\pi a}.$$

За відхилення вихорів система не повертається у вихідне положення, а вихори все більше віддаляються від початкових координат. Також показано [3], що з відхиленням будь-якого з вихорів на деяку координату (x, y) , чи зі зміщенням всіх вихорів системи за певним законом, зі збільшенням часу відхилення також постійно зростатимуть. Тому можна стверджувати, що задана система точкових вихорів знаходиться у стані нестійкої рівноваги. За будь-якого відхилення система не повертається в початкове положення, а розвалюється.

Розглянемо рух рідини під дією такої системи вихорів. Згідно з виразом для комплексного потенціалу (1) можна записати рівняння функції течії рідини, створеної заданою системою:

$$2i\psi = \omega(z) - \bar{\omega}(\bar{z}). \quad (2)$$

З рівняння (2) отримуємо вираз для сімейства ліній течії:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\chi}{4\pi} \ln((x-a)^2 + y^2) + \frac{\chi}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + \\ & + \frac{\chi}{4\pi} \ln((x+a)^2 + y^2) - \frac{3\chi}{8\pi} (x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (3)$$

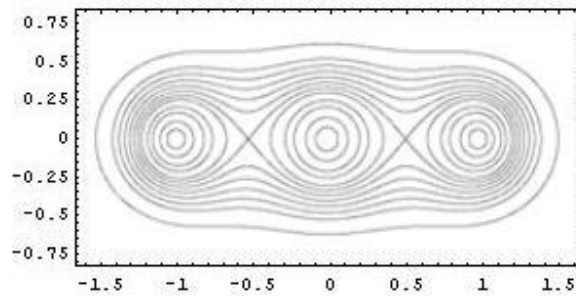


Рис. 1. Миттєві лінії течії.

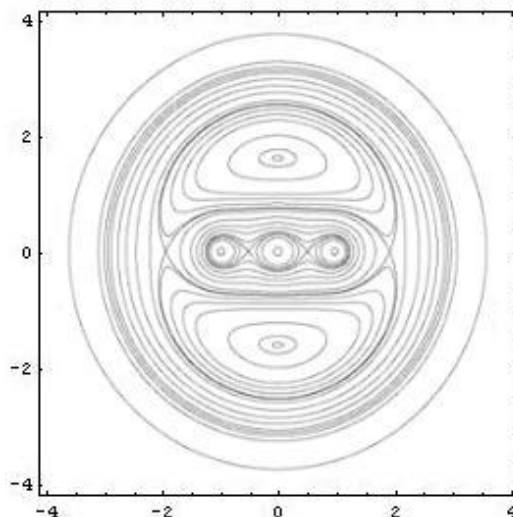


Рис. 2. Повна картина руху рідини.

На рис. 1 зображено миттєві лінії течії рідини безпосередньо біля структури. Як бачимо, кожен з вихорів має т. зв. власну атмосферу. Це певний об'єм рідини, що рухається навколо вихору по замкнутій траєкторії. Також маємо замкнену сепаратрису у вигляді потрійної вісімки, в точках перетину якої швидкість руху рідини нульова. Поза сепаратресою рідина рухається навколо всієї структури. Рис. 2 ілюструє рух рідини, спричинений заданою вихровою структурою. Над і під структурою утворюються дві нові миттєві вихрові структури, кожна з яких має свою атмосферу та сепаратрису з початковою структурою. В точках перетину цих сепаратрис швидкість також нульова.

Загальні рівняння руху рідини навколо структури можна подати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \quad (4)$$

де $\psi(x, y, t)$ – функція течії рідини, визначена за співвідношенням (3).

П'ять вихорів. Розглянемо ланцюжок, що складається з п'яти точкових вихорів, які знаходяться один від одного на однаковій відстані a та мають однакову інтенсивність χ . Розташування системи таке саме, як для трьох вихорів. Комплексний потенціал руху рідини навколо такої системи можна обрахувати як

$$\omega_5 = i\chi \ln(z) + i\chi \ln(z \pm a) + i\chi \ln(z \pm 2a). \quad (5)$$

Проаналізуємо швидкість такого ланцюжка. Аналогічно до попереднього випадку можемо показати, що центральний вихор знаходиться у спокої. Інші обертаються навколо нього по орбітах, що за формою нагадують пелюстки. Система знаходиться у стані нестійкої рівноваги, за будь-якого відхилення одного чи декількох вихорів не повертається в початкове положення, а все більше віддаляється від нього.

Розглянемо рух рідини під дією такої системи вихорів. Використовуючи співвідношення (2) та (5), отримуємо рівняння для ліній течії рідини:

$$\psi = \frac{\chi}{4\pi} \ln((x \pm a)^2 + y^2) + \frac{\chi}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + \frac{\chi}{4\pi} \ln((x \pm 2a)^2 + y^2) - \frac{25\chi}{96\pi} (x^2 + y^2). \quad (6)$$

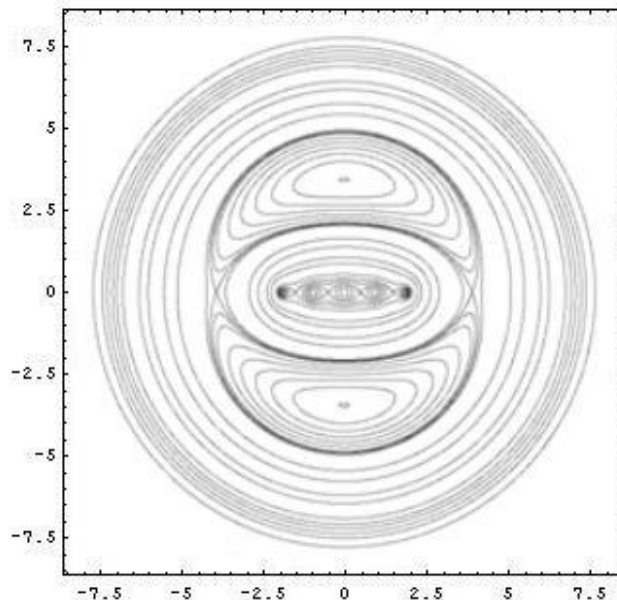


Рис. 3. Лінії течії для п'яти вихорів.

На рис. 3 відтворено миттєві лінії течії рідини навколо заданої вихрової структури. Як бачимо, кожен з вихорів має свою атмосферу. Три центральні вихори мають замкнену сепаратрису та атмосферу. Інша замкнена сепаратриса притаманна двом крайнім вихорам з атмосферою трьох центральних. Аналогічно до попереднього випадку маємо дві новоутворені миттєві вихрові структури з власними атмосферами та сепаратрисами з початковою структурою. У всіх точках перетину сепаратрис швидкість руху рідини нульова. Загальні рівняння руху рідини можна записати зі співвідношень (4) та (6).

Висновки. Розглянуто дві скінченні конфігурації вихрових ланцюжків. Досліджено стійкість та рух вихорів. Отримано рівняння для визначення комплексного потенціалу рідини навколо заданих вихрових структур та рівняння ліній течій рідини. Побудовано графічне зображення ліній течій рідини.

1. Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М. Динамическая адвекция // Нелинейная динамика. – 2010. – 6, № 3. – С. 521–530.
2. Вилля Г. Теория вихрей. – Л., М.: ОНТИ, 1936. – 266 с.
3. Косткин К. К. Стійкість вихрового ланцюжка // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. – 2010. – № 2. – С. 57–60.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз, 1963. – 1. – 584 с.
5. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – К.: Наук. думка, 1993. – 283 с.
6. Милн – Томсон Л. М. Теор. гидромеханика. – М.: Мир, 1964. – 660 с.

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ОКОЛО КОНЕЧНОЙ ВИХРЕВОЙ ЦЕПОЧКИ

Рассмотрены две вихревые структуры, каждая из которых состоит из расположенных на одной прямой точечных вихрей. Вихри имеют одинаковую интенсивность и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Первая структура состоит из трех вихрей, вторая – из пяти. Исследовано движение структур и построены линии течения жидкости.

MOVEMENT OF FLUIDS NEAR THE FINIT VORTEX CHAIN

Considered two of the vortex structure, each of which consists of lying on a straight line vortices. Vortices have the same intensity and are located at equal distances from each other. The first structure consists of three vortices, the second has five. Considered the motion of the structures and construct a flow lines.

Київський нац. ун-т
ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
25.10.10