

ОСЕСИМЕТРИЧНІ НАПРУЖЕННЯ В СКІНЧЕННОМУ ПРУЖНОМУ ЦИЛІНДРІ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО ТИСКУ, РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНОГО ПО ЧАСТИНІ БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ

З використанням методу суперпозиції побудовано розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра, який стискається радіальними зусиллями, рівномірно розподіленими по смузі, що охоплює бічну поверхню. Для визначення коефіцієнтів розвинень компонентів тензора напружень у ряди Фур'є та Бесселя–Діні встановлено регулярну нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язано методом удосконаленої редуції. Розглянуто приклади розрахунку напруженого стану циліндра за вказаних умов, а також порівняно результати з відомими, зокрема, для нескінченно довгого циліндра.

Вступ. Побудова аналітичних розв'язків задач теорії пружності для тіл, навантажених кусково-сталими зусиллями, зустрічає певні ускладнення насамперед обчислювального характеру. Вони пов'язані з доволі повільною збіжністю розвинень вказаних зусиль у ряди (або надто повільним згаданням підінтегрального виразу інтегрального подання), що значно погіршує ефективність отриманих розв'язків, для знаходження яких потрібно врахувати велику кількість складових або значно розширювати проміжок інтегрування. Це призводить до суттєвих затрат комп'ютерного часу навіть за сучасного розвитку обчислювальної техніки. Одним з прикладів такого класу задач є осесиметрична задача теорії пружності для суцільного циліндра, що стискається радіальними зусиллями, рівномірно розподіленими по певній ділянці бічної поверхні. Наближений розв'язок цієї задачі з використанням теореми про мінімум роботи деформації подано у праці [10] для безмежно довгого циліндра, що обтискується канатом або пасом певного натягу. Там же з використанням інтеграла Фур'є цю задачу розв'язано для радіальних зусиль, розподілених по скінченній ділянці бічної поверхні. Однак побудований розв'язок містить сингулярність у зоні прикладання зусиль і тому його застосування доволі обмежене. Аналогічний розв'язок наведено у праці [13]. З використанням подання Папковича–Нейбера знайдено [12] розв'язки задачі для безмежного циліндра, навантаженого рівномірно розподіленими по напівбезмежній ділянці бічної поверхні нормальними зусиллями стиску або розтягу. Задачу ж про циліндр, що стискається нормальними зусиллями, прикладеними до скінченної ділянки поверхні, розв'язано шляхом суперпозиції таких розв'язків. Осесиметричні задачі теорії пружності для гідростатичного тиску, заданого на півбезмежній ділянці бічної поверхні, розглядали також автори [4, 11]. Аналітичний розв'язок задачі про навантаження циліндра сталими нормальними зусиллями по бічній поверхні подано у праці [15] разом із деякими експериментальними даними про напруження у циліндрі внаслідок посадки обтискуванням. Метод інтегрального перетворення Фур'є застосовували у дослідженнях [6, 16]. Наближений розв'язок про обтискання циліндра сталими нормальними зусиллями біля торця побудовано [17] з використанням інтеграла Фур'є. На противагу досить добре вивченій задачі для безмежно довгого циліндра, практично відсутні точні аналітичні розв'язки такого класу задач для циліндра скінченної довжини під дією рівномірно розподіленого нормального тиску на певній ділянці бічної поверхні.

Для побудови аналітичних розв'язків задач теорії пружності для обмежених тіл ефективно використовують метод суперпозиції [3], який для осесиметричної задачі у скінченному циліндрі полягає у використанні суми рядів Фур'є та Бесселя–Діні. Задоволення так побудованими компонентами

тензора напружень відповідних крайових умов призводить до необхідності розв'язувати нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, яка виражає залежність між коефіцієнтами вказаних рядів та прикладеними до поверхні циліндра зовнішніми зусиллями. Ефективність аналізу такої системи залежить від якості асимптотичного згасання коефіцієнтів розвинень зовнішніх зусиль у відповідні ряди. Як зазначалося вище, у разі кусково-сталих навантажень коефіцієнти таких розвинень згасають доволі повільно, що значно ускладнює розв'язування як вказаної нескінченної системи, так і задачі пружності загалом. Нижче розроблено спосіб поліпшення асимптотичного згасання членів, які включають коефіцієнти розвинень крайових умов, що значно підвищує ефективність методу суперпозиції для розв'язування такого класу задач.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу про визначення осесиметричного напруженого стану суцільного ізотропного циліндра скінченної довжини $r \leq a$, $|z| \leq h$, де r та z – безрозмірні радіальна та осьова координати, a та $2h$ – відповідно радіус і довжина твірної циліндра. За відсутності масових сил цю задачу описують рівняння рівноваги [5]

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \sigma_\theta, \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

та суцільності в напруженнях [1]

$$\begin{aligned} (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) &= r \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)), \\ 2(1 + \nu) \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= r \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) + \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ – компоненти тензора напружень; ν – коефіцієнт Пуассона.

Вважаємо торці циліндра $z = \pm h$ вільними від силових навантажень

$$\sigma_z(r, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = 0, \quad (3)$$

а бічну поверхню $r = a$ навантаженою лише нормальними зусиллями

$$\sigma_r(a, z) = f(z), \quad \tau_{rz}(a, z) = 0, \quad (4)$$

рівномірно розподіленими по її частині $|z| \leq h_0$:

$$f(z) = \begin{cases} -p, & |z| \leq h_0, \\ 0, & h_0 < |z| \leq h. \end{cases} \quad (5)$$

Тут p – стала величина в розмірності напружень, $h_0 < h$.

Ставимо за мету побудову аналітичних виразів для напружень, що задовольняють рівняння (1), (2) та крайові умови (3), (4).

Побудова розв'язку. Задля розв'язання задачі розвинемо функцію (5) у ряд Фур'є:

$$f(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \cos k_n z, \quad (6)$$

де $f_0 = -p \frac{h_0}{h}$; $f_n = 2p \frac{(-1)^{n+1}}{k_n h} \sin k_n h_0$; $k_n = \frac{\pi n}{h}$, а множник $(-1)^n$ вжито для

спрощення подальших викладок. Внаслідок парності цієї функції за осьовою координатою поставлена задача є симетрична відносно центрального поперечного перерізу циліндра $z = 0$. Враховуючи цей факт, вирази для напружень, знайдені за методом суперпозиції [3, 7], які дають змогу тотожно задовольнити рівняння (1), (2) та однорідні крайові умови (3), (4) для дотичних напружень, запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 6\nu B_0 + 2(2\nu - 1)D_0 + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h - \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} - \\
&\quad - h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{2\nu - 1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)} + \\
&\quad + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X_n}{k_n} \left[\left(k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} + 1 \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(2\nu - 2 - k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_1(k_n r)}{k_n r I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z, \\
\sigma_\theta &= 6\nu B_0 + 2(2\nu - 1)D_0 - h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{2\nu}{\lambda_j} \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\
&\quad + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{2\nu - 1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)} + \\
&\quad + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{X_n}{k_n} \left[\left(2 \frac{1 - \nu}{k_n} + a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_1(k_n r)}{r I_1(k_n a)} + (2\nu - 1) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z, \\
\sigma_z &= 6(1 - \nu)B_0 + 4(2 - \nu)D_0 - h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\
&\quad + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X_n}{k_n} \left[\left(2 - k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z, \\
\tau_{rz} &= h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[h \operatorname{cth} \lambda_j h \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} - \\
&\quad - a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} - r \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right] \sin k_n z, \tag{7}
\end{aligned}$$

де λ_j – додатні корені рівняння $J_1(\lambda a) = 0$, пронумеровані в порядку зростання; J_0, J_1 та I_0, I_1 – відповідно звичайні та модифіковані функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків; $B_0, D_0, Y_j, X_n, \{j, n\} = 1, 2, \dots$ – невідомі коефіцієнти, які слід знайти з умов (3) та (4) для нормальних напружень.

Підкорення виразів (7) для радіальних та осьових напружень відповідним крайовим умовам (3) та (4) з урахуванням (6) призводить до рівностей

$$6\nu B_0 + 2(2\nu - 1)D_0 = f_0, \quad 3(1 - \nu)B_0 + 2(2 - \nu)D_0 = 0, \tag{8}$$

що відповідають елементарним частинам напружень, та з використанням формул

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n^2}{(k_n^2 + \lambda^2)^2} \cos k_n z &= \frac{h}{4} \left(\frac{1}{\lambda} - h \operatorname{cth} \lambda h \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{sh} \lambda h} + \frac{zh}{4} \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{sh} \lambda h}, \\
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{(k^2 + \lambda_j^2)^2} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} &= \frac{ra}{4} \frac{I_1(kr)}{I_1(ka)} - \frac{a^2}{4} \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \frac{I_0(kr)}{I_1(ka)} + \frac{a}{2k} \frac{I_0(kr)}{I_1(ka)} -
\end{aligned}$$

до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} X_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = f_n, & n = 1, 2, \dots, \\ Y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = 0, & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

для коефіцієнтів $Y_j, X_n, \{j, n\} = 1, 2, \dots$. Тут

$$P_n = a^2 \left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) + 2 \frac{\nu - 1}{k_n^2}, \quad \Delta_j = \frac{h \operatorname{cth} \lambda_j h}{\lambda_j} + \frac{h^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j h}.$$

Таким чином, розв'язок задачі (1)–(4) у вигляді (7) зведено до розв'язання системи (9). У разі регулярності [3] цієї системи для її розв'язання застосовують метод удосконаленої редукції [7], що ґрунтується на використанні асимптотичної поведінки шуканих невідомих

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = G = \operatorname{const} \neq 0. \quad (10)$$

На основі виразу для f_n у розвиненні (6) нескладно встановити оцінку

$$f_n = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

у результаті чого система (9) виявляється нерегулярною через повільне згасання правих частин зі збільшенням номера.

Для подолання цієї перешкоди скористаємося підходом [14], застосованим для плоскої задачі теорії пружності у прямокутній області за заданих на її протилежних сторонах розривних навантажень. Уведемо у розгляд нові невідомі

$$x_n = X_n - G - \frac{I_1^2(k_n a) f_n}{a^2 (I_0^2(k_n a) - I_1^2(k_n a))}, \quad y_j = Y_j - G, \quad \{j, n\} = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Враховуючи вирази (10) та (11), нескладно виявити, що

$$x_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad y_j = o(1), \quad j \rightarrow \infty. \quad (13)$$

У результаті переходу у системі (9) до нових невідомих згідно з (12) із використанням формул

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + \lambda_j^2)^2} &= \frac{a^2}{4k^2} \left(\frac{I_0^2(ka)}{I_1^2(ka)} - 1 \right) - \frac{1}{k^4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(k_n^2 + \lambda^2)^2} &= \frac{h}{4\lambda^3} \left(\operatorname{cth} \lambda h + \frac{\lambda h}{\operatorname{sh}^2 \lambda h} - \frac{2}{\lambda h} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

отримуємо систему

$$\begin{cases} x_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + G \frac{2(1 + \nu)}{k_n^2} = \psi_n, & n = 1, 2, \dots, \\ y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + G \frac{2}{\lambda_j^2} = \varphi_j, & j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$\psi_n = \frac{1 - \nu}{k_n^2 a^2} \frac{2I_1^2(k_n a) f_n}{I_0^2(k_n a) - I_1^2(k_n a)}; \quad \varphi_j = \frac{4\lambda_j^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1^2(k_n a) f_n}{(I_0^2(k_n a) - I_1^2(k_n a))(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}. \quad (16)$$

Для відомих правих частин (16) системи рівнянь (15) справедлива оцінка

$$\psi_n = O(k_n^{-2}), n \rightarrow \infty, \quad \phi_j = O(\lambda_j^{-3/2}), j \rightarrow \infty,$$

внаслідок чого ця система виявляється регулярною і допускає застосування для її розв'язання алгоритму простої редукції. Згідно з цим алгоритмом під час практичних обчислень у системі (15) залишають $N + J$ перших рівнянь для скінченних послідовностей коефіцієнтів $x_n, n = 1, 2, \dots, N$ та $y_j, j = 1, 2, \dots, J$, поклавши згідно з оцінкою (13) $x_n \equiv 0, n > N$ та $y_j \equiv 0, j > J$. Однак для повного визначення шуканих невідомих потрібно встановити ще одне додаткове рівняння, яке дасть можливість знайти асимптотичне значення G . Для цього скористаємось підходом [8, 9]. Поділивши рівняння першої стрічки системи (15) на k_n^2 , а другої – на λ_j^2 і просумувавши результати у першому випадку по усіх n , а в другому – по j , з використанням формул (14) та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^4} = \frac{h^4}{90}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^4} = \frac{a^4}{192}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n^2} \cos(k_n z) = \frac{1}{4} \left(z^2 - \frac{h^2}{3} \right)$$

отримаємо два рівняння, сума яких має вигляд

$$(1 + \nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^4} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^4} + G \left(\frac{1 + \nu}{90} h^4 + \frac{a^4}{192} \right) = p h_0 \frac{h^2 - h_0^2}{12h} - \psi, \quad (17)$$

де $\psi = \frac{1 + \nu}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1^2(k_n a) f_n}{(I_0^2(k_n a) - I_1^2(k_n a)) k_n^4}$. Рівняння (17) є додатковим рівнянням

для знаходження величини G . Визначивши послідовності $\{x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_J, 0, 0, \dots\}$ та величину G на основі $N + J$ перших рівнянь системи (15) та рівняння (17), знаходимо з використанням формул (8), (12) напруження (7), що тотожно задовольняють вихідні рівняння (1), (2), однорідні крайові умови (3), (4) для дотичних напружень та з потрібною точністю, що забезпечується числами N та J , – крайові умови (3), (4) для нормальних напружень. Таким чином, розрахункові формули для напружень набувають вигляду [9]

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^* + \sigma_{\alpha}^{\{G\}}, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^* + \tau_{rz}^{\{G\}}, \quad \alpha = \{r, \theta, z\},$$

де

$$\sigma_r^{\{G\}} = G \left(\frac{1 + \nu}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{3} \right) + \frac{\nu}{8} (a^2 - r^2) \right), \quad \tau_{rz}^{\{G\}} = 0,$$

$$\sigma_{\theta}^{\{G\}} = G \left(\frac{\nu}{8} (a^2 - 3r^2) + \frac{1 + \nu}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \right), \quad \sigma_z^{\{G\}} = G \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{2} \right),$$

а вирази для $\sigma_{\alpha}^*, \alpha = \{r, \theta, z\}$ та τ_{rz}^* отримують з (7) підставленням

$$X_n = \frac{I_1^2(k_n a) f_n}{a^2 (I_0^2(k_n a) - I_1^2(k_n a))} + \begin{cases} x_n, n \leq N, \\ 0, n > N, \end{cases} \quad Y_j = \begin{cases} y_j, j \leq J, \\ 0, j > J. \end{cases}$$

Числовий приклад та обговорення. Розрахуємо напружений стан циліндра, використовуючи запропоновану методику. Насамперед зосередимо увагу на дослідженні впливу кількості рівнянь та невідомих в основній скінченній системі, що відповідає нескінченній системі (15), на точність задоволення нормальними напруженнями відповідних крайових умов. У таблиці подано значення величини G , обчисленої для $h_0 = 0.5$, коли діаметр циліндра дорівнює довжині твірної $a = h = 1$, для матеріалу $\nu = 1/3$, а також значення безрозмірних радіальних напружень σ_r / p на бічній поверхні циліндра $r = a$ для певних характерних значень z . Як бачимо, при

$N = J = 10$ досягається висока точність задоволення крайових умов, відповідні значення яких для радіальних напружень наведено у стрічці «КУ». Це свідчить на користь ефективності запропонованої методики.

N, J	G	$z = 0.0$	$z = 0.50$	$z = 1.00$
1	0.561	-0.999	-0.523	0.078
2	0.523	-1.022	-0.495	0.010
3	0.610	-0.990	-0.497	-0.002
4	0.620	-0.994	-0.500	-0.003
5	0.580	-1.003	-0.500	-0.001
10	0.583	-1.000	-0.500	-0.001
КУ		-1.000	-0.500	0.000

Розподіли безрозмірних радіальних (рис. 1а), колових (рис. 1б), осевих (рис. 1в) та дотичних (рис. 1г) напружень у циліндрі такої ж форми та за такого ж навантаження для $0 \leq z \leq h$.

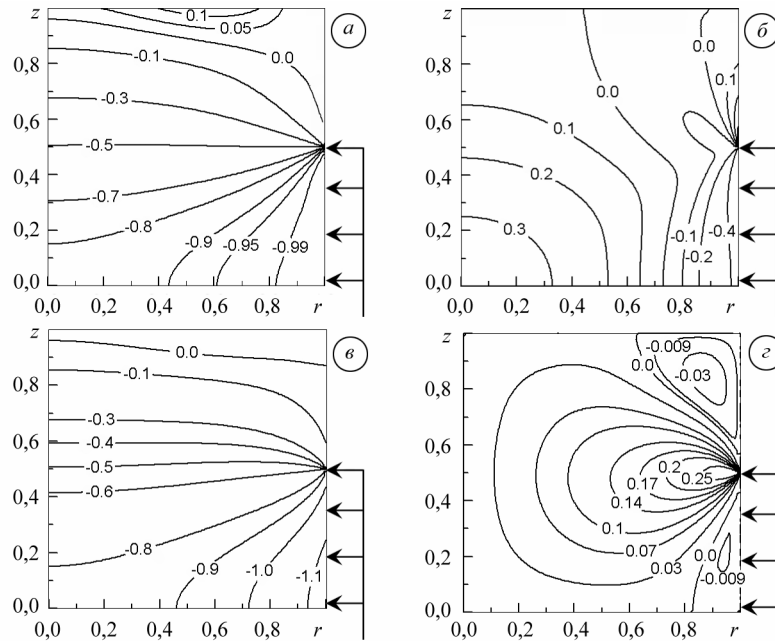


Рис. 1.

Внаслідок розривності крайових умов для радіальних напружень усі нормальні компоненти тензора напружень є розривні на бічній поверхні циліндра для тих самих значень осової координати. Проте з віддаленням від бічної поверхні вони неперервні.

Порівняно радіальні (рис. 2а) та осеві (рис. 2б) напруження для скінченного $a = h = 1$ та нескінченного циліндрів того ж радіуса та навантаженого тими ж зусиллями. Напруження для нескінченного циліндра розраховано за формулами

$$\frac{\sigma_r}{p} = \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty \frac{(sI_0(s) + (2(1-\nu) + s^2r^2)I_1(s))I_1(sr) - sr(sI_0(s) + I_1(s))I_0(sr)}{2s(\nu-1)I_1^2(s) + s^3(I_0^2(s) - I_1^2(s))} \sin h_0s \cos sz ds,$$

$$\frac{\sigma_z}{p} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(sI_0(s) - 2I_1(s))I_0(sr) - srI_1(s)I_1(sr)}{2(\nu-1)I_1^2(s) + s^2(I_0^2(s) - I_1^2(s))} \sin h_0s \cos sz ds,$$

отриманими за результатами праці[2].

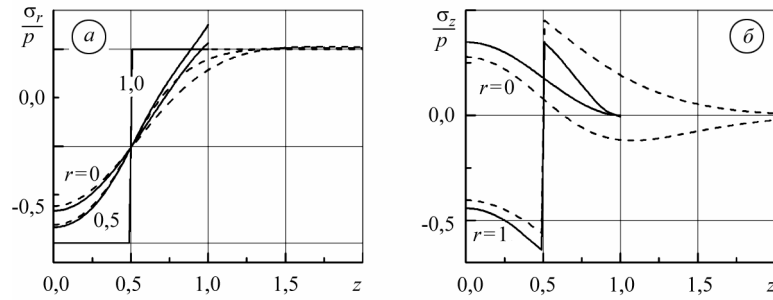


Рис. 2.

За таких умов радіальні напруження у скінченному циліндрі відрізняються від напружень у нескінченному з наближенням до торців. Причому на бічній поверхні обидва випадки збігаються внаслідок задоволення крайових умов. З віддаленням від бічної поверхні вздовж радіуса відмінність між напруженнями для обох циліндрів посилюється, досягаючи 3% на осі $r = 0$. Осьові напруження для скінченного та нескінченного циліндрів є відмінні і на бічній поверхні. На торцях скінченного циліндра вони дорівнюють нулю внаслідок задоволення відповідних крайових умов, у той час як у нескінченному циліндрі при $z = h$ не дорівнюють нулю. Це вказує на те, що для розглянутих параметрів задачі застосування формул для нескінченного циліндра, щоб розрахувати напруження у скінченному, призводить до неадекватних результатів, особливо з наближенням до торцевих зон. Проте очевидно, що зі збільшенням довжини твірної скінченного циліндра його напружений стан буде як у нескінченному, того ж радіуса. Виявлено, що при $a = 1$ та $h_0 = 0.5$ напруження у скінченному та нескінченному циліндрах практично збігаються вже при $h = 3$.

Висновки. Метод суперпозиції застосовано для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для суцільного ізотропного циліндра, що навантажений радіальними зусиллями, рівномірно розподіленими по частині бічної поверхні. Запропоновано підхід до поліпшення асимптотичної поведінки вільних членів безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь, яку отримано через задоволення компонентами тензора напружень крайових умов. У результаті одержано регулярну нескінченну систему з правими частинами, які швидко згасають зі збільшенням номера. Це дає змогу, застосовуючи алгоритм удосконаленої редукції для зведення нескінченної системи до основної скінченної, досягати високої точності у задоволенні крайових умов за невеликої кількості рівнянь та невідомих в основній системі. За такого підходу значно спрощуються розрахункові формули для напружень, що відкриває надійний шлях для розрахунку та аналізу напруженого стану скінченного циліндра за кусково-сталого нормального навантаження бічної поверхні.

Роботу виконано за підтримки спільного наукового проекту НАН України – Російського фонду фундаментальних досліджень № 0110U004143.

1. Вігак В. М., Токовий Ю. В. Точний розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
2. Вігак В., Токовий Ю., Ясінський А. Побудова розв'язків квазістатичних осесиметричних задач пружності та термопружності в напруженнях для довгого циліндра // Машинознавство. – 2004. – № 7. – С. 12–16.
3. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.

4. Коган Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму // Прикл. математика и механика. – 1956. – **10**, вып. 2. – С. 236–247.
5. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. шк., 1975. – 526 с.
6. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 493 с.
7. Мелешко В. В. Теплові напруження у прямокутних пластинах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 34 – С. 140–164.
8. Мелешко В., Папков С., Токовий Ю. Нескінченні системи лінійних алгебричних рівнянь у задачах пружної рівноваги тіл скінченних розмірів // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. математика, механіка. – 2010. – Вип. 23. – С. 51–57.
9. Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р. Осесимметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – Р. 120–137.
10. Фепплъ А., Фепплъ Л. Сила и деформация. Прикладная теория упругости. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – Т.2. – 408 с.
11. Хрусталеv А. Ф., Коган Б. И. Об одной граничной задаче для бигармонического уравнения, встречающейся в теории упругости // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 3. – С. 241–247.
12. Barton M. V. The circular cylinder with a band of uniform pressure on a finite length of the surface // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1941. – **8**, № 3. – P. A97-A104.
13. Freunedthal A. Verbundstützen für hohe Lasten // Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons. – 1933. – **40**. – S. 1–132.
14. Meleshko V. V. Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett solution revisited // J. Elasticity. – 1995. – **40**, № 3. – P. 207–238.
15. Rankin A. W. Shrink-fit stresses and deformations // J. Appl. Mech. Trans ASME. – 1944. – **11**. – P. A77-A85.
16. Tranter C. J., Craggs J. W. The stress distribution in a long circular cylinder when discontinuous pressure is applied to the curved surface // Phil. Mag. 7. – 1945. – **36**, № 255. – P. 241–250.
17. Tranter C. J., Craggs J. W. Stresses near the end of a long cylindrical shaft under non-uniform pressure loading // Phil. Mag. 7. – 38, № 278. – P. 214–225.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОНЕЧНОМ УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПО УЧАСТКУ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С использованием метода суперпозиции построено решение осесимметричной задачи теории упругости для сплошного конечного цилиндра, сжимаемого радиальными усилиями, равномерно распределенными по полосе, охватывающей боковую поверхность. Для определения коэффициентов разложения компонентов тензора напряжений в ряды Фурье и Бесселя–Дини получена регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, к решению которой применен метод усовершенствованной редукции. Рассмотрены примеры расчетов напряженного состояния цилиндра при указанных условиях, результаты которых сравнены с известными в литературе, в частности для бесконечно удлиненного цилиндра.

AXISYMMETRIC STRESSES IN A FINITE ELASTIC CYLINDER UNDER NORMAL PRESSURE UNIFORMLY DISTRIBUTED OVER SOME PART OF THE LATERAL SURFACE

By making use of the method of superposition, a solution to the axisymmetric problem of elasticity for a solid finite cylinder, which is pressurized by radial tractions uniformly distributed over a part of the lateral surface, is constructed. For determination of the coefficients in decompositions of the stress-tensor components into Fourier and Bessel series, the regular infinite system of linear algebraic equations is obtained and solved by means of the advanced reduction algorithm. Numerical examples are discussed and compared with results for an infinite cylinder under the same loading.