УДК 539.3

О. Ф. Кривий

МІЖФАЗНІ КРУГОВІ ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРІ

Задачі про кругові абсолютно жорсткі включення довільної форми, які знаходяться в умовах повного зчеплення або гладкого контакту з різними трасверсально-ізотропними півпросторами, зведено до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Одержані розв'язки цих систем у явному вигляді, що дало можливість визначити поле напружень та зміщень в околі включень під довільним навантаженням. Одержано залежності поступальних і колових зміщень включень від рівнодійних навантажень, головних моментів та пружних властивостей півпросторів.

Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувались або двовимірними анізотропними середовищами [4, 6, 9, 17], або кусково-однорідними ізотропними просторами та осесиметричними задачами для трансверсально-ізотропних просторів [3, 8, 10, 12, 14–16, 18, 24, 25]. Що стосується загальніших випадків, зокрема кусково-однорідних анізотропних просторів, а також неосесиметричних задач для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних середовищ, то відомі лише чисельно-аналітичні результати [13, 20, 21, 24], які базуються на висновках праць [11, 22, 23] і містять здебільш наближені дані.

Нижче, використавши розривний розв'язок для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору [5, 19], задачі про кругові абсолютно жорсткі включення довільної форми, які знаходяться в умовах повного зчеплення або гладкого контакту з різними трансверсально-ізотропними півпросторами, звели до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) у просторі узагальнених функцій повільного зростання $S'(\mathbf{R}^3)$. Побудовано аналітичний розв'язок вказаних систем у просторі $S'(\mathbf{R}^3)$, що дало можливість отримати розв'язки поставлених задач для кругових включень довільної форми за будь-якого навантаження та визначити поведінку напружень в околі включень. Одержано залежність поступальних у напрямку відповідних осей і колових зміщень включень від виду їх взаємодії із середовищем та пружних характеристик півпросторів.

1. Формулювання та системи СІР задачі. Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає область Ω. До включення прикладене довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Розташування граней включення після деформації описують функції

$$\zeta_6^{\pm} = \zeta_6^0 + \vartheta_0^{\pm}(x,y), \zeta_k^{\pm} = \zeta_k^0, k = 4,5; (x,y) \in \Omega ;$$

$$\zeta_4^0 = \delta_1 - \varphi_z y, \quad \zeta_5^0 = \delta_2 + \varphi_z x, \quad \zeta_6^0 = \delta_3 + \varphi_y x + \varphi_x y , \tag{1}$$

$\vartheta_0^{\pm}(x,y)$ задають форму включення відповідно при $z = \pm 0$; $\delta_k, k = 1,2,3$; ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z – поступальні переміщення включення та кути повороту включення навколо відповідних осей. Розглянемо такі типи взаємодії включення із простором.

Задача А. Включення зчеплене з півпросторами. Тут відомі стрибки та суми переміщень:

$$\chi_4^{\pm}(x,y) = (1 \pm 1)\zeta_4^0, \chi_5^{\pm}(x,y) = (1 \pm 1)\zeta_5^0,$$

$$\chi_6^{\pm}(x,y) = \vartheta^{\pm}(x,y) + (1 \pm 1)\zeta_6^0,\ \vartheta^{\pm} = \vartheta_0^{+} \pm \vartheta_0^{-},\ \ (x,y) \in \Omega\ ; \tag{2}$$

$$\chi_k^{\pm}(x,y) = \langle w_k(x,y)\rangle^{\pm} = w_k(x,y,+0) \pm w_k(x,y,-0),\ k = \overline{1,6};$$

$$\vec{w} = \left\{w_k(x,y,z)\right\}_{k=\overline{1,6}} = \left\{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\right\}.$$

Враховуючи умови $\chi_k^{-}(x,y) = 0, k = \overline{1,6}\ (x,y) \notin \Omega$, які відображають факт з'єднання півпросторів поза включенням, поставлену задачу за допомогою співвідношень (25) з праці [5] зведемо до системи двовимірних СІР відносно стрибків напружень $\chi_k^{-}(x,y), (x,y) \in \Omega$, $k = 1,2,3$:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left\{q_{31}\frac{x-t}{r_0^2}\chi_1^{-} - q_{32}^{-}\chi_2^{-}\partial_1\frac{y-t}{r_0} - \left[q_{32}\frac{1}{r_0} - q_{32}^{-}\partial_2\frac{y-\tau}{r_0}\right]\chi_3^{-}\right\}dtd\tau = g_1(x,y),$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left\{q_{31}\frac{y-t}{r_0^2}\chi_1^{-} - q_{32}^{-}\chi_3^{-}\partial_1\frac{y-t}{r_0} - \left[q_{32}\frac{1}{r_0} - q_{32}^{-}\partial_1\frac{x-\tau}{r_0}\right]\chi_2^{-}\right\}dtd\tau = g_1(x,y),$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left\{\frac{q_{41}}{r_0}\chi_1^{-} - q_{42}\left[\frac{y-\tau}{r_0^2}\chi_2^{-} + \frac{x-t}{r_0^2}\chi_3^{-}\right]\right\}dtd\tau = \chi_6^{+} - q_{44}\chi_6^{+}. \tag{3}$$

Тут [5]

$$g_1 = -\chi_4^{+} - \frac{q_{34}}{2\pi}\iint_{\Omega}\chi_6^{-}\frac{x-t}{r_0^3}dtd\tau,\ g_2 = -\chi_4^{+} - \frac{q_{34}}{2\pi}\iint_{\Omega}\chi_6^{-}\frac{y-\tau}{r_0^3}dtd\tau,$$

$r_0 = \sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}$, $\partial_1 \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 \equiv \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 \equiv \dfrac{\partial}{\partial z}$, $q_{kn} q_{kn}^{\pm}$ – сталі, які виражають через коефіцієнти узагальненого закону Гука [7]. Величини δ_x, δ_y, δ_z, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ визначимо із таких шести рівнянь рівноваги:

$$\iint_{\Omega}\chi_k(x,y)\,dx\,dy = P_{4-k}, \qquad k = 1,2,3, \tag{4}$$

$$\iint_{\Omega}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\chi_1(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix}M_2\\M_1\end{pmatrix},\ \iint_{\Omega}(x\chi_2(x,y) - y\chi_3(x,y))\,dx\,dy = M_3. \tag{5}$$

Задача В. Грані включення знаходяться в умовах гладкого контакту з півпросторами. У цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень перетворюються в нуль: $\chi_k^{\pm}(x,y) = 0$, $k = 2,3$, а стрибки і суми нормальних зміщень визначає формула (2). Використовуючи друге, третє та шосте із співвідношень (25) з праці [5], для невідомих стрибків нормальних напружень і дотичних зміщень $\chi_k^{-}(x,y), (x,y) \in \Omega$, $k = 1,4,5$, отримаємо таку систему двовимірних СІР:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left\{q_{21}\chi_1^{-}\partial_2\frac{1}{r_0} - q_{23}^{-}\chi_4^{-}\partial_{12}^2\frac{1}{r_0} - \left[q_{23}\frac{1}{r_0^3} - q_{23}^{-}\partial_1^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_5^{-}\right\}dt\,d\tau = -q_{24}\partial_2\chi_6^{-},$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left\{q_{21}\chi_1^{-}\partial_1\frac{1}{r_0} - q_{23}^{-}\chi_5^{-}\partial_{12}^2\frac{1}{r_0} - \left[q_{23}\frac{1}{r_0^3} - q_{23}^{-}\partial_2^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_4^{-}\right\}dt\,d\tau = -q_{24}\partial_1\chi_6^{-},$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left\{\frac{q_{41}}{r_0}\chi_1^{-} - q_{43}\left[\chi_4^{-}\partial_1\frac{1}{r_0} + \chi_5^{-}\partial_2\frac{1}{r_0}\right]\right\}dt\,d\tau = \chi_6^{+} - q_{44}\chi_6^{-}. \tag{6}$$

Для визначення невідомих $\delta_3, \varphi_x, \varphi_y$ необхідно використати першу з умов (4) та першу і другу з умов (5).

2. Розв'язок задачі А. Нехай включення займає кругову область з центром у початку координат: $\Omega = \left\{\sqrt{x^2 + y^2} \le a\right\}$. Перейдемо до циліндричної системи координат (ρ, φ, z). Для цього позначимо

$$\left\{\xi_k^{\pm}(\rho, \varphi)\right\}_{k=\overline{1,6}} = \left\{\left\langle\sigma_z\right\rangle^{\pm}, \left\langle\tau_{z\varphi}\right\rangle^{\pm}, \left\langle\tau_{z\rho}\right\rangle^{\pm}, \left\langle u_\rho\right\rangle^{\pm}, \left\langle u_\varphi\right\rangle^{\pm}, \left\langle w\right\rangle^{\pm}\right\}$$

і введемо такі комплексні комбінації переміщень та напружень:

$$\tilde{\tau}^{\pm} = \xi_3^{\pm} + i\xi_2^{\pm}, \tilde{u}^{\pm} = \xi_4^{\pm} + i\xi_5^{\pm}, \tau^{\pm} = \chi_3^{\pm} + i\chi_2^{\pm}, u^{\pm} = \chi_4^{\pm} + i\chi_5^{\pm}. \tag{7}$$

Враховуючи зв'язок

$$\tau^{\pm}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = e^{i\varphi}\tilde{\tau}^{\pm}(\rho, \varphi),\ \ u^{\pm}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = e^{i\varphi}\tilde{u}(\rho, \varphi), \tag{8}$$

введемо нові невідомі функції

$$\nu_1^-(\rho, \varphi) = \chi_1^-(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),\ \ \nu_2^-(\rho, \varphi) = \tau^-(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)e^{-i\varphi}.$$

Останні розшукуватимемо у вигляді

$$\nu_k^-(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{k,-}(\rho)e^{in\varphi},\ n \ge 0, k = 1, 2, \tag{9}$$

$$V_n^{k,-} = \Phi_n\left[\nu_k^-\right] \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu_k^-(\rho, \varphi)e^{-in\varphi}d\varphi,\ V_{-n}^{1,-} = \overline{V}_n^{1,-},\ \ \overline{V}_{-n}^{2,-}(\rho) = \Phi_n\left[\overline{\nu}_2^-\right].$$

Справедливе твердження.

Теорема 1. Для того, щоб функції $\chi_k^-(x, y) \in S'(R^2), k = 1, 2, 3$ були розв'язками системи рівнянь (3), необхідно та достатньо, щоб при $n \ge 0$ справджувались в $S'(R^2)$ рівності ($\rho \in [0, a]$)

$$-2q_{31}W_{n+1,n}\left[V_n^{1,-}\right] + q_{32}^+W_{n+1,n+1}\left[V_n^{2,-}\right] - q_{32}^-W_{n+1,n-1}\left[\overline{V}_{-n}^{2,-}\right] = 2G_{1n},$$

$$2q_{31}W_{n-1,n}\left[V_n^{1,-}\right] + q_{32}^+W_{n-1,n-1}\left[\overline{V}_{-n}^{2,-}\right] - q_{32}^-W_{n-1,n+1}\left[V_n^{2,-}\right] = 2G_{2n},$$

$$2q_{41}W_{n,n}\left[V_n^{1,-}\right] - q_{42}^+W_{n,n+1}\left[V_n^{2,-}\right] + q_{32}^-W_{n,n-1}\left[\overline{V}_{-n}^{2,-}\right] = 2G_{3n}. \tag{10}$$

Тут введено такі позначення:

$$W_{k,n}[f] = \int_0^a f(\varsigma)W_{k,n}^*(\rho, \varsigma)\varsigma d\varsigma,\ W_{k,n}^*(\rho, \varsigma) = \int_0^\infty J_k(t\rho)J_n(t\varsigma)dt,$$

$$G_{1n} = 2i\phi_z\delta_{0,n} - q_{34}W_{n+1,n+1}\left[\rho^n\partial_\rho\rho^{-n}F_n^-\right],$$

$$G_{2n} = 2\overline{\Delta}_{xy}\delta_{1,n} - 2i\phi_z\delta_{0,n} + q_{34}W_{n-1,n+1}\left[\rho^n\partial_\rho\rho^{-n}F_n^-\right],$$

$$G_{3n} = q_{44}F_n^-(\rho) - F_n^+(\rho) - 2\delta_{0,n}\delta_z + \rho\delta_{1,n}\overline{\phi}_{yx},$$

$$\Delta_{xy} = \delta_x + i\delta_y, \phi_{yx} = \phi_y + i\phi_x,\ F_n^{\pm}(\rho) = \Phi_n\left[\vartheta^{\pm}\right],\ \partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial\rho},$$

$\delta_{k,n}$ – символ Кронекера.

Д о в е д е н н я. Перейдемо в системі (3) до полярних координат і застосуємо скінченне перетворення Фур'є. Тоді, враховуючи подання (7)–(9), а також [10]

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2s\rho\cos(\phi-\psi)+\varsigma^2}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-k(\phi-\psi)}\int_0^\infty J_k(t\rho)J_k(t\varsigma)dt,$$

теорему про згортку і співвідношення

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\varphi n}d\varphi}{\rho-\varsigma e^{\pm i\varphi}}=\pm W^*_{n\pm1,n}(\rho,\varsigma),$$

одержані контурним інтегруванням, після очевидних перетворень одержимо систему рівнянь (9). Доведення завершує те, що оператор Φ_n є ізоморфізмом в $S'(R^2)$.

Розглянемо систему (10) спочатку при $n=0$. Ввівши позначення

$$U_{10}=V_0^{1,-}(\rho),U_{k0}=0,5\left(V_0^{2,-}(\rho)+(-1)^k\bar{V}_0^{2,-}(\rho)\right),k=2,3; \tag{11}$$

$$a_1=q_{31},a_2=q_{42},b_1=q_{32},b_2=q_{41},b_3=q_{32}^+-q_{32}^-,$$

перепишемо (10) у вигляді

$$\begin{aligned}&-a_1W_{10}\left[U_{10}\right]+b_1W_{11}\left[U_{20}\right]=-q_{34}W_{11}\left[\partial_\rho F_0^-\right],\\&b_2W_{00}\left[U_{10}\right]-a_2W_{01}\left[U_{20}\right]=q_{44}F_0^-(\rho)-F_0^+(\rho)-2\delta_z,\\&b_3W_{11}\left[U_{30}\right]=4i\phi_z\rho.\end{aligned}\tag{12}$$

Введемо оператори

$$\Pi_k[f]=\rho^{k-1}\Im_*\left[\rho^{2-k}f\right],\Pi_k^*[f]=-\rho^{k-2}\partial_\rho\Im_*\left[\rho^{2-k}f\right],k=1,2,$$

$$\Im_*[f]=\int_\rho^a\frac{f(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}},\ \Im_0[f]=\int_0^\rho\frac{f(t)dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}},S_1[f]=\partial_\rho\Pi_1\int_0^\rho f(\rho)d\rho,S_2[f]=\Im_0[\rho f]$$

і перейдемо в системі (12) до нових невідомих функцій

$$\begin{aligned}&\eta_{10}(\rho)=\Pi_1\left[U_{10}\right],\eta_{k0}(\rho)=\Pi_2\left[U_{k0}\right],\\&U_{10}(\rho)=\pi^{-1}\Pi_1^*\left[\eta_{10}\right],U_{k0}(\rho)=\pi^{-1}\Pi_2^*\left[\eta_{k0}\right],k=2,3.\end{aligned}\tag{13}$$

Для цього застосуємо до першого і третього рівнянь системи (12) оператор S_1, до другого – оператор S_2 і продовжимо невідомі функції на проміжок $(0,-a]$: $\eta_{10}(-\rho)=\eta_{10}(\rho)$, $\eta_{k0}(-\rho)=-\eta_{k0}(\rho)$, $k=2,3,$. У результаті одержимо систему СІР

$$\mathbf{A}l_0[\vec{\eta}(t)]+\mathbf{B}l_1[\vec{\eta}(t)]=\mathbf{f}(\rho); \tag{14}$$

$$b_3l_0[\eta_{30}(t)]=f_3(\rho). \tag{15}$$

Тут введені позначення

$$l_0[f] = \int_{-a}^{a} f(t) \frac{sign(\rho - t) + sign(t)}{2} dt, \quad l_1[\vec{\eta}] = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \vec{\eta}(t) \ln \left| \frac{t}{\rho - t} \right| dt,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\eta} = \{\eta_k\}^2 = \{\eta_{10}, \eta_{20}\}, \eta_{30}, \mathbf{f} = \{f_k\}^2,$$

$$f_1 = -q_{34} F_0^-(\rho), \ f_2 = S_2 \left[q_{44} F_0^-(\rho) - F_0^+(\rho) \right] - 2\delta_z \rho, f_3(\rho) = 8i\phi_z \rho.$$

Безпосередньо із рівняння (15) знаходимо:

$$\eta_{30} = 8i\phi_z \rho b_3^{-1}. \tag{16}$$

Матричне рівняння (14) подамо у вигляді

$$\mathbf{M} l_0[\vec{\eta}(t)] + l_1[\vec{\eta}(t)] = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}(\rho). \tag{17}$$

Матриця $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ допускає розвинення

$$\mathbf{M} = \mathbf{SJS}^{-1}, \ \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \kappa_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \kappa_1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\kappa_j = a_j b_j^{-1}, \ \lambda_j = (-1)^{j+1} i\lambda_0, \ \lambda_0^2 = \kappa_1 \kappa_2,$$

при цьому для відомих комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів [1] виконується нерівність

$$0 \le \lambda_0 <`1. \tag{19}$$

З урахуванням (18) рівняння (17) подамо у вигляді

$$l_0[\mu_j(\rho)] + \lambda_j l_1[\mu_j(\rho)] = F_j(\rho), \ j = 1,2; \tag{20}$$

$$\vec{\mu} = \left\{\mu_j\right\}^2 = \mathbf{S}^{-1}\vec{\eta}, \mathbf{F} = \left\{F_j\right\}^2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\vec{f}.$$

Розв'язки рівнянь (20), згідно з умовою (19), слід розшукувати в класі функцій автоматичної обмеженості [2]:

$$\mu_j(\rho) = \Re_j[\partial_\rho F_j(\rho)], \ j = 1,2. \tag{21}$$

Тут введені позначення

$$\Re_j[f] = \frac{1}{\kappa_*} \left(f(\rho) - \frac{\lambda_j \omega_j(\rho)}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{\omega_j(t)} \frac{dt}{t - \rho} \right), \ \omega_j(\rho) = \left(\frac{a + \rho}{a - \rho} \right)^{\gamma_j},$$

$$\gamma_j = (-1)^{j+1} i\alpha_0, \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \lambda_0}{1 - \lambda_0}, \kappa_* = 1 - \lambda_0^2.$$

Враховуючи рівність $\vec{\eta} = \mathbf{S}\vec{\mu}$ і формули (13), (21), розв'язки системи (12) подамо у вигляді

$$U_{j0}(\rho) = \frac{1}{\pi} \sum_{k,m=1}^{2} \beta_{km}^{(1)} \Pi_j^* \left[\Re_k[\partial_\rho f_{3-m}(\rho)] \right], \ U_{30}(\rho) = \frac{8i\phi_z \rho b_3^{-1}}{\pi\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \tag{22}$$

$$\beta_{km}^{(j)} = s_{jk} s_{mk}^* b_{3-m}^{-1}, \ j, m, k = 1,2.$$

Нехай $n \geq 1$. Введемо нові невідомі функції

$$V_n^{1,*}(\rho) = \rho \mathrm{I}_a^{n-1}[\rho^{-n} V_n^{1,-}(\rho)],\ \ \bar{V}_{-n}^{2,*}(\rho) = \mathrm{I}_a^{n-1}[\rho^{-n+1}\bar{V}_{-n}^{2,-}(\rho)],$$

$$V_n^{2,*}(\rho) = \rho^2 \mathrm{I}_a^{n-1}\left[\rho^{-2n-1}\partial_\rho \left\{\rho^{2n}\mathrm{I}_a\left[\rho^{-n-1}V_n^{2,-}(\rho)\right]\right\}\right], \mathrm{I}_a[f] = \int\limits_\rho^a s f(s) ds\ .$$

Тоді, враховуючи властивості операторів Вебера–Соніна $W_{m,n}[f]$ [10] та застосовуючи до першого рівняння системи (10) оператор

$$\mathrm{I}_0[f(\rho)] = \tilde{\partial}_\rho \rho^2 \int\limits_0^\rho s^{-1} f(s) ds,\ \ \tilde{\partial}_\rho \equiv \frac{1}{\rho}\partial_\rho,$$

після очевидних перетворень одержимо:

$$a_1 W_{01}\left[U_{1n}\right] + b_1 W_{00}\left[U_{2n}\right] = Q_{1n}(\rho),$$

$$b_2 W_{11}\left[U_{1n}\right] + a_2 W_{10}\left[U_{2n}\right] = Q_{2n}(\rho),$$

$$b_3 W_{00}\left[U_{3n}\right] = Q_{3n}(\rho). \tag{23}$$

Тут введені позначення

$$U_{1n} = V_n^{1,*}(\rho),\ U_{kn} = 0,5\left(V_n^{2,*}(\rho) + (-1)^k \bar{V}_{-n}^{2,*}(\rho)\right), k = 2,3,$$

$$Q_{1n} = \mathrm{I}_0\left[\rho^2 \psi_{1,n}\right] - q_{34} W_{00}\left[\rho^n \mathrm{I}_a^{n-1}[\rho^{-2n-1}\partial_\rho \rho^n F_n^-(\rho)]\right],$$

$$Q_{2n} = \psi_{2,n} - q_{34} W_{00}\left[\rho^n \partial_\rho \rho^{-n} F_n^-(\rho)\right],$$

$$Q_{3n} = \rho\psi_{3,n} - W_{10}\left[\rho^n \partial_\rho \rho^{-n}\left(q_{44} F_n^-(\rho) - F_n^-(\rho)\right)\right],$$

$$\psi_{k,n}(\rho) = \left(1 - \delta_{n,1}\right)\sum_{j=1}^{n-2} \rho^{2j} c_{k,j}\left((2j)!\right)^{-1} + \delta_{n,1} c_{0,j},$$

$c_{0,1} = 0, c_{0,2} = 2\Delta_{xy}, c_{0,3} = \phi_{yx}$, $c_{k,j}$, $(j = 1,\ldots n-2, k = 1,2,3)$ - сталі, які визначають із умов $\tilde{\partial}_\rho^j \left\|\rho^{-1} U_{1n}, U_{2n}, U_{3n}\right\| = 0$.

Застосувавши до першого і третього рівнянь системи (23) оператор S_1, а до другого - оператор S_2, ввівши нові невідомі функції та продовживши їх на проміжок $(-a, 0)$

$$\eta_{1n}(\rho) = \Pi_2[U_{1n}(\rho)], U_{1n}(t) = \Pi_2^*[\eta_{1n}(\rho)],\ \eta_{1n}(-\rho) = -\eta_{1n}(\rho),$$

$$\eta_{kn}(\rho) = \Pi_1[U_{1n}(\rho)], U_{kn}(\rho) = \Pi_1^*[\eta_{kn}(\rho)],\ \eta_{1n}(-\rho) = \eta_{1n}(\rho), k = 1,2, \tag{24}$$

систему (23) зведемо до системи (14), (15), в якій

$$\vec{\eta} = \{\eta_{1n}(\rho), \eta_{2n}(\rho)\}, \eta_{30}(\rho) = \eta_{3n}(\rho), \tag{25}$$

$$\vec{f} = \{f_k(\rho)\}^2 = \{S_2[Q_{1n}], S_1[Q_{2n}]\},\ f_3(\rho) = S_2[Q_{3n}]. \tag{26}$$

Враховуючи формули (16), (21), (22), (24)–(26), розв'язок системи (23) подамо у вигляді

$$U_{jn} = \frac{1}{\pi} \sum_{k,m=1}^{2} \beta_{km}^{(j)} \Pi_{3-j}^{*} \left[\Re_k S_{3-m} \left[\partial_\rho Q_{3-m,n} \right] \right], \; j = 1,2, U_{3n} = \frac{1}{\pi b_3} \Pi_1^{*}[S_2[Q_{3n}]]. \quad (27)$$

Отже, співвідношення

$$V_0^{1,-}(\rho) = U_{10}, V_0^{2,-}(\rho) = U_{20} + U_{30}, \overline{V}_0^{2,-}(\rho) = U_{20} - U_{30},$$

$$V_n^{1,-}(\rho) = (-1)^{n-1} \rho^n \tilde{\partial}_\rho^{n-1}[\rho^{-1} U_{1n}], \; \overline{V}_{-n}^{2,-}(\rho) = (-1)^{n-1} \rho^{n-1} \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \left(U_{2n} + U_{3n} \right),$$

$$V_n^{2,-}(\rho) = (-1)^{n-1} \rho^n \partial_\rho \rho^{-n} \mathrm{I}_a \left[\rho^{2n} \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \rho^{-2} \left(U_{2n} + U_{3n} \right) \right], \; n > 0,$$

формули (22), (27) та розвинення (9) визначають стрибки напружень на включенні, що знаходиться в умовах повного зчеплення з півпросторами.

3. Розв'язок задачі B. Вважаючи область Ω круговою, перейдемо в системі (6) до полярних координат. Врахувавши співвідношення (8), введемо нові невідомі функції

$$\nu_1^-(\rho, \varphi) = \chi_1^-(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \; \nu_3^-(\rho, \varphi) = u^-(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) e^{-i\varphi}.$$

Останні розшукуватимемо у вигляді

$$\nu_k^-(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{k,-}(\rho) e^{in\varphi}, \; k = 1,3, n \geq 0, \quad (28)$$

$$V_n^{k,-} = \Phi_n \left[\nu_k^- \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu_k^-(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \; V_{-n}^{1,-} = \overline{V}_n^{1,-}, \; \overline{V}_{-n}^{3,-} = \Phi_n \left[\overline{\nu}_3^- \right].$$

Аналогічно теоремі 1 доводимо таке твердження.

Теорема 2. Для того, щоб функції $\chi_k^-(x, y) \in \mathrm{S}'(R^2), k = 1,4,5$ були розв'язками системи рівнянь (6), необхідно та достатньо, щоб при $n \geq 0$ справджувались в $\mathrm{S}'(R^2)$ рівності

$$\mathbf{B} W_{nn} [\mathbf{U}] = \mathbf{G}_n, \; \rho \in [0, a],$$

$$W_{nn} \left[U_{3n} \right] = G_{3n}. \quad (29)$$

Тут введено позначення

$$\mathbf{U} = \{ U_{1n}, U_{2n} \}, U_{1n} = V_n^{1,-}(\rho), U_{kn} = 0,5 \left(U_{3n}^{*}(\rho) + (-1)^k \overline{U}_{3n}^{*}(\rho) \right), k = 2,3,$$

$$U_{3n}^{*}(\rho) = \rho^{-n-1} \partial_\rho \rho^n V_n^{3,-}(\rho), \overline{U}_{3n}^{*}(\rho) = \rho^{n-1} \partial_\rho \rho^{1-n} \overline{V}_{-n}^{3,-}(\rho),$$

$$\mathbf{G}_n = \{ G_{1n}, G_{2n} \}, G_{1n} = 0,5 \tilde{c}_n^{+} \rho^n - q_{24} F_n^{-}(\rho),$$

$$G_{2n} = 2\delta_z \delta_{n,o} + \overline{\phi}_{yx} \delta_{n,1} \rho + F_n^{+}(\rho) - 2q_{44} F_n^{-}(\rho),$$

$$G_{3n} = \frac{\tilde{c}_n^{-} \rho^n}{\tilde{q}_{21}}, \; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} q_{21} & -q_{23} \\ q_{41} & -q_{43} \end{pmatrix}, \; \tilde{c}_n^{\pm} = c_n \pm \overline{c}_0 \delta_{n,0}, \; \tilde{q}_{21} = q_{23}^{-} - q_{23}^{+},$$

c_n – сталі, які визначають із умов

$$\int_0^a U_{3n}^{*}(\rho) \rho^{n+1} d\rho = 0, \; n = \overline{0, \infty}. \quad (30)$$

Для оператора W_{nn} існує обернений [10], який є ізоморфізмом в $S'(R^2)$ і допускає подання

$$W^*_{nn}[f] = \pi^{-1}\rho^{n-1}\partial_\rho \Im_* \left[\rho^{1-2n}\partial_\rho \Im_0\left[\rho^{n+1}f(\rho)\right]\right]. \tag{31}$$

Враховуючи (31), а також рівності

$$W^*_{nn}\left[\rho^n\right] = \frac{2\kappa_n\rho^n}{\pi\sqrt{a^2-\rho^2}}, \kappa_n = \frac{(2n+1)(2n)!!}{(2n+1)!!},\ \mathbf{B}^{-1} = \left\{b^*_{jm}\right\}^2,\ s_{j1} = \frac{b^*_{j2}q_{44} - b^*_{j1}q_{24}}{|B|},$$

розв'язок системи (29) подамо у вигляді

$$U_{jn}(\rho) = \frac{2}{\pi\sqrt{a^2-\rho^2}}\left\{0,5b^*_{j1}\kappa_n\tilde{c}^+_n\rho^n + b^*_{j1}\left(2\delta_z\delta_{n,0} + \overline{\phi}_{yx}\delta_{n,1}\rho\right)\right\} +$$

$$+ W^*_{nn}\left[b^*_{j1}F^+_n(\rho) - s_{j1}F^-_n(\rho)\right], j = 1,2,$$

$$U_{3n}(\rho) = \frac{2\tilde{q}_{21}\kappa_n\tilde{c}^-_n\rho^n}{\pi\sqrt{a^2-\rho^2}}. \tag{32}$$

Беручи до уваги тотожність $W^*_{n+1,n}(\rho,\varsigma) = \theta(\rho-\varsigma)\varsigma^n\rho^{-n-1}$, де $\theta(\rho-\varsigma)$ – функція Хевісайда, доводимо співвідношення

$$V^{1,-}_n(\rho) = U_{1n}, V^{2,-}_n = W_{n+1,n}\left[U_{2n} + U_{3n}\right], \overline{V}^{2,-}_0 = -W_{n-1,n}\left[U_{2n} - U_{3n}\right].$$

Формули (32) та розвинення (28) визначають стрибки нормальних напружень та дотичних зміщень на включенні, яке знаходиться в умовах гладкого контакту з півпросторами.

4. Осесиметричне включення. Кількість доданків у розвиненнях (9), (28) безпосередньо залежить від форми включень і, як правило обмежена. Нехай, наприклад, форма включення осесиметрична

$$\vartheta^\pm_0(x,y) = \vartheta_0(x^2+y^2),\ F^\pm_n(\rho) = \Phi_n\left[\vartheta^\pm\right] = \delta_{n,0}F^\pm(\rho),$$

тоді в розвиненнях (9), (28) залишаться по три доданки, якщо $n = -1, 0, 1$. Вирази для стрибків напружень для ***задачі A*** тут набудуть вигляду

$$\left\langle\sigma_z\right\rangle^- = \nu^a_1(\rho,\varphi) = -\frac{1}{\pi\rho}\partial_\rho\Im_*\left[\rho\eta^a_{10}\right] - \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi}\partial_\rho\Im_*\left[\rho\eta^a_{11}\right]\right\},$$

$$\left\langle\tau_{z\rho}\right\rangle^- + i\left\langle\tau_{z\varphi}\right\rangle^- = \nu^a_2(\rho,\varphi) = -\frac{1}{\pi\rho}\partial_\rho\Im_*\left[\eta^a_{20} + \eta^a_{30}\right] +$$

$$+\frac{\rho}{\pi}e^{i\varphi}\partial_\rho\rho^{-2}\Im_*\left[\rho\left(\eta^a_{21} + \eta^a_{31}\right)\right] - \frac{1}{\pi\rho}e^{-i\varphi}\partial_\rho\Im_*\left[\rho\left(\overline{\eta}^a_{21} - \overline{\eta}^a_{31}\right)\right]. \tag{33}$$

Тут введено позначення

$$\eta^a_{10} = -\frac{2\delta_z}{b_2\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Re}\omega_1(\rho) + \frac{1}{b_2}\operatorname{Re}\Re_1\left[\partial_\rho\Im_0\left[F^*\right]\right] + \frac{\lambda_0 q_{34}}{2a_1}\operatorname{Im}\Re_1\left[\partial_\rho F^-\right],$$

$$F^* = q_{44}F^-(\rho) - F^+(\rho), \eta^a_{30} = -\frac{i8\phi_z}{b_3}\rho, \eta^a_{31} = -\frac{\delta_{xy}}{b_3},$$

$$\eta^a_{20} = -\frac{2\delta_z\lambda_0}{a_2\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Im}\omega_1(\rho) + \frac{\lambda_0}{a_2}\operatorname{Im}\Re_1\left[\partial_\rho\Im_0\left[F^*\right]\right] - \frac{q_{34}}{b_1}\operatorname{Re}\Re_1\left[\partial_\rho F^-\right],$$

$$\eta_{10}^{a} = -\frac{2\delta_z}{b_2\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Re}\omega_1(\rho) + \frac{1}{b_2}\operatorname{Re}\Re_1\left[\partial_\rho\Im_0\left[F^*\right]\right] + \frac{\lambda_0 q_{34}}{2a_1}\operatorname{Im}\Re_1\left[\partial_\rho F^-\right],$$

$$\eta_{11}^{a} = \frac{2\overline{\phi}_{yx}}{b_2\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Re}\left\{\left(\rho + 2\rho\gamma_1\right)\omega_1(\rho)\right\} - \frac{\lambda_0\overline{\delta}_{xy}}{a_1\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Im}\omega_1(\rho),$$

$$\eta_{21}^{a} = \frac{2\lambda_0\overline{\phi}_{yx}}{a_2\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Im}\left\{\left(\rho + 2\rho\gamma_1\right)\omega_1(\rho)\right\} - \frac{\overline{\delta}_{xy}}{b_1\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Re}\omega_1(\rho).$$

Поступальні переміщення δ_z^a визначають із першої умови (4) і вони залежать від форми включення та рівнодійної P_1. Зокрема, для монетоподібного включення товщини h одержимо:

$$\delta_z^a = m_{31}\frac{P_3}{a} + h,\ m_{31} = \frac{-q_{41}\lambda_0}{8\pi\alpha_0}. \tag{34}$$

Для включення у вигляді еліпсоїда обертання навколо осі Z з півосями a, h, тобто $\vartheta^+ = 0, \vartheta^- = 2ha^{-1}\sqrt{a^2 - \rho^2}$, замість (34) матимемо:

$$\delta_z^a = m_{31}\frac{P_3}{a} + \frac{h}{a}\left(m_2 + am_3\right),\ m_2 = \frac{q_{34}}{2b_1}, m_3 = \frac{1}{2}q_{44}\alpha_0\lambda_0. \tag{35}$$

Інші поступальні та колові переміщення включення тут не залежать від його форми. Використавши умови (4) при $k = 2,3$ і умови (5), подамо їх у вигляді

$$\phi_z^a = m_{32}\frac{M_3}{a^3}, m_{32} = \frac{3b_3}{32},$$

$$\begin{pmatrix}\delta_x^a\\ \delta_y^a\end{pmatrix} = \frac{m_{11}}{a}\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\end{pmatrix} + \frac{m_{12}}{a^2}\begin{pmatrix}M_2\\ -M_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\phi_x^a\\ \phi_y^a\end{pmatrix} = \frac{m_{21}}{a^2}\begin{pmatrix}P_2\\ P_1\end{pmatrix} + \frac{m_{22}}{a^3}\begin{pmatrix}-M_1\\ M_2\end{pmatrix}. \tag{36}$$

Тут введено позначення

$$m_{11} = \frac{-l_1 n_{21}}{n_0}, m_{12} = \frac{l_2 n_{11}}{n_0}, m_{21} = \frac{l_1 n_{22}}{n_0}, m_{22} = \frac{-l_2 n_{12}}{n_0},$$

$$n_0 = n_{11}n_{21} - n_{12}n_{22}, n_{11} = \frac{a_1\alpha_0}{b_2\lambda_0}, n_{11} = 1 + \frac{b_1\lambda_0}{\pi b_3\alpha_0}, n_{21} = \frac{2}{3}\left(1 - 8\alpha_0^2\right),$$

$$n_{21} = -\frac{\pi a_2\alpha_0}{b_1\lambda_0}, l_1 = \frac{b_1\lambda_0}{2\pi\alpha_0}, l_2 = \frac{b_2\lambda_0}{4\pi\alpha_0}.$$

Стрибки нормальних напружень та дотичних переміщень для осесиметричного включення в **задачі B** можна подати у вигляді

$$\nu_1^b(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi b_{21}\sqrt{a^2 - \rho^2}}\left\{\frac{2(2\delta_z - b_{22}s_{21})}{b_{21}} + \frac{\rho}{\beta_2}\operatorname{Re}\left[\overline{\phi}_{yx}e^{i\varphi}\right]\right\} + s_{11}W_{00}^*\left[F^-(\rho)\right],$$

$$\nu_3^b(\rho,\varphi) = \frac{2s_{21}}{\pi\rho}\left\{\frac{f_*}{a}\left(a - \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) - L\left[F^-\right]\right\} + \frac{\phi_{yx}}{\pi\beta_1}e^{-i\varphi}\sqrt{a^2 - \rho^2}. \tag{37}$$

Тут введено позначення

$$\beta_1 = \frac{b_{21}^* + \tilde{q}_{23}}{4b_{21}^* b_{22}^*},\ \beta_2 = \frac{q_{23} + \tilde{q}_{23}}{q_{41}\tilde{q}_{23} + |B|},\ f_* = \int_0^a \frac{tF^-(t)\,dt}{\sqrt{a^2 - t^2}},\ L[f] = \Im_*\rho\partial_\rho\Im_0\rho[f].$$

Поступальні і колові переміщення включення визначимо із умов (4), (5):

$$\delta_z^b = \frac{-q_{41}}{8}\frac{P_3}{a} + \frac{f_*\beta_*}{2a},\ \begin{pmatrix}\phi_x^b\\ \phi_y^b\end{pmatrix} = \frac{3\beta_2}{2a^3}\begin{pmatrix}-M_1\\ M_2\end{pmatrix},\ \beta_* = b_{22}s_{21} + s_{11}b_{21}. \tag{38}$$

Вирази для поступальних та колових переміщень у разі однорідного трансверсально-ізотропного простору для обох задач для монетоподібного включення набудуть вигляду

$$\delta_z^a = \frac{-q_{41}}{8}\frac{P_3}{a} + h,\ \phi_z^a = \frac{3b_3}{32}\frac{M_3}{a^3},\ \begin{pmatrix}\delta_x^a\\ \delta_y^a\end{pmatrix} = \frac{b_1 + b_3}{b_1 b_3 a}\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\phi_x^a\\ \phi_y^a\end{pmatrix} = \frac{3q_{41}}{8a^3}\begin{pmatrix}-M_1\\ M_2\end{pmatrix},$$

$$\delta_z^b = \frac{-q_{41}}{8}\frac{P_3}{a},\ \begin{pmatrix}\phi_x^b\\ \phi_y^b\end{pmatrix} = \frac{3\beta_2}{2a^3}\begin{pmatrix}-M_1\\ M_2\end{pmatrix}. \tag{39}$$

Висновки. Побудовано розв'язок в явному вигляді задач про кругові включення довільної форми за будь-якого навантаження, які знаходяться в умовах повного зчеплення ***(задача А)*** або гладкого контакту ***(задача В)*** з різними трансверсально-ізотропними півпросторами. Як і для кусково-однорідного ізотропного простору, напруження для ***задачі А*** при $\rho \to a \pm 0$ мають кореневу асимптотику, підсилену осциляцією $(\alpha_0 \ne 0)$, яка зникає для однорідного простору $(\alpha_0 = 0)$. Для ***задачі Б*** ця асимптотика є коренева. Поступальні δ_x^a, δ_y^a та колові ϕ_x^a, ϕ_y^a зміщення для ***задачі А,*** як випливає із формул (36), залежать від рівнодійних напружень та головних моментів. Для ***задачі В***, формули (38) і за однорідного трансверсально-ізотропного простору для обох задач, формули (39), поступальні зміщення залежать тільки від відповідних напружень, а колові – тільки від відповідних моментів. Для обох задач за осьової симетрії включень зміщення δ_x^a, δ_y^a, ϕ_z^a, ϕ_z^a, ϕ_x^b, ϕ_y^b не залежать від форми включення. Для тонкого $(h = 0)$ кругового включення $\delta_z^a = \delta_z^b$. Слід також відмітити, що обидві задачі для осесиметричних включень будуть осесиметричні (не залежатимуть від кута φ) тільки за осесиметричного навантаження. Аналогічно можна розглядати й інші види контактної взаємодії включень із півпросторами.

1. *Александров К.С., Рыжова Т.В.* Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. –1961. – Т. 6, Вып.2. – С. 289–314.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
4. *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 23–35.
5. *Кривий О. Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // Там же. – 2007. – **50**, № 2. – С. 55–65.
6. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
8. *Монастирський Б., Качиньські А.* Контактна взаємодія двох пружних півпросторів з круговим концентратором// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 3. – С. 47–57.
9. *Назаров С. А.* Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности упругих полей и критерии разрушения при контакте берегов // Прикл. математика и механика. – 2005. – **69**, № 3. – С. 520–532.
10. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
11. *Свекло В. А.* Задача типа Бусинеска для анизотропного полупространства // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 5. – С. 908–913.

12. *Силованюк В. П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2000. – 298 с.
13. *Barber J. R., Ting T. C. T.* Three-dimensional solutions for general anisotropy // J. Mech. Phys. Solids. – 2007. – **55.** – P. 1993–2006.
14. *Bigoni D., Serkov S. K., Valentini M., Movchan A. B.* Asymptotic models of dilute composites with imperfectly bonded inclusions // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35,** № 24. – P. 3239–3258.
15. *Fabrikant V. I.* A new form of the Green function for a transversely isotropic body // Acta Mechanica. – 2004. – **167,** № 2. – P. 101–111.
16. *Hasegawa H., Kisaki M.* The stress field caused by a circular cylindrical inclusion in a transversely isotropic elastic solid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, № 6. – P. 825–831.
17. *Herrmann K. P., Loboda V. V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – **69**. – P. 317–335.
18. *Hu H. C.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Acta Phys. Sinica. – 1953. – **9,** № 2. – P. 130–144.
19. *Kryvyy O.* The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 387–398.
20. *Pan E.* Three-dimensional Green's functions in anisotropic elastic bimaterials with imperfect interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, № 2. – P. 180–190.
21. *Phan A. V., Gray L. J., Kaplan T.* Residue approach for evaluating the 3D anisotropic elastic Green's function: multiple roots // Eng. Anal. with Boundary Elements. – 2005. – **9**, № 6. – P. 570–576.
22. *Willis J. R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium // Int. J. Eng. Sci. – 1968. – **6**, № 5. – P. 253–263.
23. *Willis J. R.* The penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1972. – **25**. – P. 368–385.
24. *Xian-Fang Li, Tian-You Fan* The asymptotic stress feld for a rigid circular inclusion at the interface of two bondeddissimilar elastic half-space materials // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **40,** № 2. – P. 331–342.
25. *Yuan F. G., Yang S., Yang B.* Three-dimensional Green's functions for composite laminates // Ibid. – 2003. – **38**. – P. 8019–8035.

МЕЖФАЗНЫЕ КРУГОВЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Задачи о круговых абсолютно жестких включениях произвольной формы, находящихся в условиях полного сцепления или гладкого контакта с разными трансверсально-изотропными пространствами, сведены к системам двумерных сингулярных интегральных уравнений. Получены решения указанных систем в явном виде, что позволило определить поля напряжений и смещений в окрестности включений при произвольном нагружении. Получены зависимости поступательных и круговых перемещений включений от равнодействующих нагружений, главных моментов и упругих свойств полупространств.

THE INTERFACE CIRCULAR INCLUSIONS IN THE NON-UNIFORM TRANSVERSAL-ISOTROPIC SPACE

The tasks about the circular absolutely rigid inclusions of arbitrary form, which are under conditions of full cohesion or smooth contact with the non-uniform transversal-isotropic spaces, are reduces to systems of 2D singular integrated equations. The exact solution of indicated systems is obtained, which allows determining fields of tensions and displacements in vicinity of inclusions under the arbitrary loading. Had received the dependence of the onward and circular inclusion's displacement from the resultant loadings, main moments and elastic properties of semi spaces.

Одеська нац. морська академія, Одеса

Одержано
08.10.10