УДК 534.222.2

Ю. М. Дудзінський[1], О. М. Петрищев[2]

ПОШИРЕННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ У РІДИНІ З КАВІТАЦІЄЮ

Запропоновано систему рівнянь, що описує поширення акустичних хвиль у рідині в умовах кавітації. Отримано вирази для енергії й потоку енергії звукової хвилі в середовищі з кавітаційними бульбашками, а також критерій, що характеризує розбіжність між ідеальною рідиною й рідиною з розвинутою кавітацією. Розглянуто задачу про поширення плоскої хвилі з урахуванням втрат за наявності бульбашок.

Вступ. Потужне звукове поле в рідині породжує парогазові порожнини (бульбашки), які під дією цього поля можуть зростати, захлопуватися (колапс) і викликати такі ефекти, як випромінювання шуму в широкій смузі частот, руйнування поверхні твердих тіл (ерозія), звуколюмінісценція, ініціювання електрохімічних реакцій тощо. Ці ефекти характеризують фізичне явище, яке називають акустичною кавітацією. Гідродинамічна кавітація супроводжується утворенням і руйнуванням парогазових бульбашок у місцях локального зниження тиску за обтікання тіл рідиною. Відрізняється вона тільки способом виникнення і має багато спільного з акустичною кавітацією. Загалом акустичну кавітацію можна описати так. У фазі розрідження акустичної хвилі з мікроскопічних бульбашок (зародки кавітації) утворюється розрив у вигляді порожнини, що заповнюється насиченою парою й газом. У фазі стиску пара конденсується, а газ всередині бульбашки піддається сильному адіабатичному стиску. У момент колапсу досягають високих значень тиск (□ 10^8 Па) і температура (□ 10^5 К) газу, що породжує в околі бульбашки пружний імпульс високого тиску й випромінювання світла (звуколюмінісценція) [2, 6, 7].

Більшість теоретичних праць присвячена моделюванню руху одинокої бульбашки, однак експериментальні дослідження свідчать, що в рідинах існує кавітаційна область − сукупність великої кількості взаємодіючих бульбашок різних розмірів. Зацікавлюють важливі задачі поширення звуку в двофазних середовищах: рідина з бульбашками газу й (або) пари, область розвинутої кавітації в ультразвуковому технологічному устаткуванні, верхні шари океану, кільватерний шлейф, кріогенні рідини тощо. Кавітаційна порожнина під час падіння на неї акустичної хвилі робить вимушені коливання й при цьому частково поглинає звукову енергію завдяки в'язкості та теплопровідності, а частково розсіює падаючу хвилю − вторинне випромінювання. За наявності в рідині великої кількості парогазових бульбашок кожна з них перебуває в полі як падаючої, так і розсіяних хвиль від сусідніх бульбашок. Створюється вторинне поле багаторазового розсіювання. Вивчення особливостей цього хвильового поля часто єдиний спосіб отримати інформацію про фізичні властивості середовища [3, 9].

Формулювання задачі й основні рівняння. У праці [5] вперше запропоновано систему рівнянь гідродинаміки, що задовільно описує рух рідини з кавітацією. Однак там не враховували стисливість рідини без кавітації, що може призвести до істотних похибок. Нижче розглянемо деякі питання, пов'язані з поширенням звукових хвиль у рідині з кавітацією. Скористаємось системою рівнянь

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\,,$$

$$\rho = \frac{\rho_{\text{рід}}}{1 + b\left(R^3 - R_0^3\right)},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0,$$

$$p = p_{\text{кр}} - \rho_0\left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{Rc_0}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{R}^2\right)\right],$$

$$p = p\left(\rho_{\text{рід}}\right), \tag{1}$$

де $b = \frac{4}{3}\pi n$, n – кількість зародків кавітації в одиниці об'єму рідини без кавітації; R_0 – рівноважний радіус зародків; R – радіус кавітаційних бульбашок у даний момент часу t; $\rho_{\text{рід}}$ – густина ідеальної рідини за наявності збурення, викликаного звуковою хвилею; ρ_0 – рівноважна густина рідини без кавітації; p, ρ, $\mathbf{u}$ – відповідно тиск, густина та швидкість рідини з кавітаційними порожнинами; $p_{\text{кр}}$ – критичний тиск, за якого починається розвиток кавітації; c_0 – швидкість звуку в рідині на межі з кавітаційною порожниною за тиску $p = p_{\text{кр}}$. Якщо замінити $\rho_{\text{рід}}$ на ρ_0, то перші чотири рівняння (1) відповідатимуть системі, запропонованій раніше [6].

Визначимо енергію звукової хвилі в середовищі з кавітаційними бульбашками, тобто в середовищі, яке описує система рівнянь (1). Енергія одиниці об'єму

$$E = \rho\varepsilon + \frac{\rho u^2}{2}, \tag{2}$$

де ε – внутрішня енергія одиниці маси. Подамо змінні ε і ρ у вигляді

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon', \ \rho = \rho_0 + \rho', \tag{3}$$

де ε_0, ρ_0 – рівноважні значення внутрішньої енергії одиниці маси та густини рідини; ε', ρ' – їхні збурення, обумовлені звуковою хвилею.

2. Розв'язання задачі. Підставивши (3) у формулу (2) з урахуванням того, що член $\rho' u^2/2$ є величина третього порядку малості маємо з точністю до членів другого порядку включно:

$$E = \rho_0\varepsilon_0 + \rho'\varepsilon_0 + \frac{\rho_0 u^2}{2} + \rho'\varepsilon' + \rho_0\varepsilon'. \tag{4}$$

Оскільки рух частинок середовища у звуковій хвилі адіабатичний, то можна покласти [2]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{p}{\rho^2}d\rho; \qquad \varepsilon' = \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{p}{\rho^2}d\rho. \tag{5}$$

Із третього й четвертого рівнянь системи (1) та співвідношень (5) отримуємо:

$$\varepsilon' = \int_{\rho_0}^{\rho_{\text{рід}}}\frac{p}{\rho_{\text{рід}}^2}d\rho_{\text{рід}} - \frac{b}{\rho_0}p_{\text{кр}}\left(R^3 - R_0^3\right) + \frac{3}{2}bR^3\dot{R}^2 - \frac{2}{c_0}bR^3\dot{R}^3. \tag{6}$$

Використовуючи величину $\rho' = \rho'_{\text{рід}} - \rho_0 b\left(R^3 - R_0^3\right)$, із співвідношень (4), (6) дістаємо вираз для приросту енергії:

$$dE=\rho_0\int\limits_{\rho_0}^{\rho_{\text{рід}}}\frac{p\,d\rho_{\text{рід}}}{\rho_{\text{рід}}^2}-bp_{\text{кр}}\left(R^3-R_0^3\right)+\frac{3}{2}\rho_0 bR^3\dot{R}^2-\frac{2}{c_0}\rho_0 bR^3\dot{R}^3+$$
$$+\left[\rho'_{\text{рід}}-\rho_0 b\left(R^3-R_0^3\right)\right]\varepsilon_0++\left[\rho'_{\text{рід}}-\rho_0 b\left(R^3-R_0^3\right)\right]\times$$
$$\times\left[\int\limits_{\rho_0}^{\rho_{\text{рід}}}\frac{p\,d\rho_{\text{рід}}}{\rho_{\text{рід}}^2}-b\frac{p_{\text{кр}}}{\rho_0}\left(R^3-R_0^3\right)-\frac{3}{2}bR^3\dot{R}^2\left(1-\frac{4}{3}\frac{\dot{R}}{c_0}\right)\right]+\frac{\rho_0 u^2}{2} \tag{7}$$

Оскільки співвідношення $\rho' << \rho_0$ виконується з точністю до членів другого порядку включно, то приріст енергії звукової хвилі в рідині з кавітацією такий:

$$dE=\rho'_{\text{рід}}w_0+\frac{c^2(\rho'_{\text{рід}})^2}{2\rho_0}-bp_{\text{кр}}\left(R^3-R_0^3\right)+\frac{3}{2}\rho_0 bR^3\dot{R}^2-2\frac{\rho_0}{c_0}bR^3\dot{R}^3-$$
$$-\rho_0 b\left(R^3-R_0^3\right)\varepsilon_0-\rho_0 b\left(R^3-R_0^3\right)\rho'_{\text{рід}}\frac{p_0}{\rho_0^2}+\frac{\rho_0 u^2}{2}, \tag{8}$$

де w_0 – рівноважне значення ентальпії в рідині.

Перший і шостий члени у співвідношенні (8) – приріст енергії, обумовлений зміною маси двофазної рідини в одиниці об'єму. Під час обчислення повної енергії всього об'єму рідини, яку розраховують інтегруванням енергії в одиничному об'ємі, ці члени випадають, тому що вся кількість рідини із часом залишається незмінною. Отже, повна енергія рідини, пов'язана зі звуковою хвилею, така:

$$E=\int\limits_V\left[\frac{c^2}{2}\frac{(\rho'_{\text{рід}})^2}{\rho_0}-bp_{\text{кр}}\left(R^3-R_0^3\right)+\frac{3}{2}\rho_0 bR^3\dot{R}^2-\right.$$
$$\left.-2\frac{\rho_0}{c_0}bR^3\dot{R}^3-\rho_0 b\left(R^3-R_0^3\right)\rho'_{\text{рід}}\frac{p_0}{\rho_0^2}+\frac{\rho_0 u^2}{2}\right]dV, \tag{9}$$

де підінтегральний вираз можна розглядати як густину звукової енергії в рідині з кавітаційними порожнинами.

Перший член підінтегрального виразу (9) – потенціальна енергія звукової хвилі в одиниці об'єму ідеальної рідини. Другий, третій, четвертий і п'ятий члени описують зміну енергії в одиниці об'єму двофазної рідини, що викликана звуковою хвилею й обумовлена бульбашками. Другий член – робота, витрачена на розширення порожнин. Третій – кінетична енергія руху рідини, зумовлена розширенням і колапсом кавітаційних порожнин. Четвертий – енергія звукових хвиль, яку випромінюють пульсівні порожнини. П'ятий – потенціальна енергія двофазної рідини, обумовлена стисливістю бульбашок в ідеальній рідині. І, нарешті, шостий член – кінетична енергія рідини у звуковій хвилі.

Обчислимо густину потоку енергії в рідині з бульбашками. За означенням [2]

$$I=\rho u\left(w+\frac{u^2}{2}\right), \tag{10}$$

де w – значення ентальпії в збуреній рідині. Оскільки рух у хвилі адіабатичний, то можна покласти

$$w=w_0+\left(\frac{p}{\rho}-\frac{p_0}{\rho_0}\right)+\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{p\,d\rho}{\rho^2}. \tag{11}$$

Підставимо співвідношення (11) у формулу (10), врахуємо третє й четверте рівняння системи (1) і знехтуємо член $\rho u^3/2$ як величину третього порядку малості. Після обчислень, подібних до виконаних вище, отримуємо густину потоку енергії у звуковій хвилі за кавітації:

$$I = \rho\,\mathbf{u}\,w_0 + p'\mathbf{u} + b\left(R^3 - R_0^3\right)p_0\,\mathbf{u} -$$

$$-\mathbf{u}\,p_{\text{кр}}b\left(R^3 - R_0^3\right) + \frac{3}{2}\,\mathbf{u}\,\rho_0\,bR^3\dot{R}^2 - \frac{2\,\mathbf{u}}{c_0}\,b\rho_0R^3\dot{R}^3\,, \tag{12}$$

де ρ' – тиск у звуковій хвилі.

Усереднюючи вираз (12) за часом, знайдемо середній повний потік енергії через розглянуту замкнуту поверхню:

$$\oiint\left(\overline{p'\,\mathbf{u}} + b\left(R^3 - R_0^3\right)p_0\,\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}\,b\left(R^3 - R_0^3\right)p_{\text{кр}}} + \frac{3}{2}\,\overline{\mathbf{u}\,b\rho_0R^3\dot{R}^3} - \frac{2u}{c_0}\,b\,\rho_0R^3\dot{R}^3\right)ds. \tag{13}$$

Інтеграл від першого члена усередненого виразу (12) дорівнює нулеві, оскільки загальна кількість рідини в усьому об'ємі незмінна. У загальному випадку закон збереження енергії має вигляд [5]

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\,\rho\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon\right)} = -\overline{\vec{\nabla}\left[\rho\,\mathbf{u}\left(\frac{u^2}{2} + w\right)\right]}, \tag{14}$$

де риска зверху означає усереднення за часом. Для отримання закону збереження звукової енергії в рідині з кавітацією необхідно підставити в рівняння (14) підінтегральні вирази (9) і (13).

Проаналізуємо систему рівнянь (1). Підставивши третє її рівняння у друге та врахувавши четверте і п'яте рівняння, отримуємо:

$$3\,bR^2\,\frac{dR}{dt} + \frac{\left[1 + b\left(R^3 - R_0^3\right)\right]}{C^2}\left[\frac{dR}{dt}\,\frac{d^2R}{dt^2} + R\,\frac{d^3R}{dt^3} + 3\,\frac{dR}{dt}\,\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{R\,c_0}\,\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{R}^2\right)\right\}\right] =$$

$$= \rho_{\text{рід}}\left[1 + b\left(R^3 - R_0^3\right)\right]\cdot\vec{\nabla}\,\mathbf{u}\,. \tag{15}$$

Перший член у лівій частині виразу (15) характеризує стисливість рідини з кавітаційними бульбашками, обумовлену тільки зміною об'єму порожнин. Другий член визначає стисливість у холодній рідині.

Нехай T – деякий характерний час (півперіод у звуковій хвилі); $\overline{R}$ – характерний радіус бульбашки (розмір, до якого вона виростає за час T під час розширення). Можливі два граничні випадки. Нехай перший член у лівій частині виразу (15) набагато більший за другий:

$$\frac{3\,b\overline{R^3}}{T} >> \frac{\overline{R^2}}{c^2T^2}\text{, або } 3\,b\,c^2T^2\overline{R} >> 1.$$

Тоді стисливість суцільної рідини можна знехтувати порівняно зі стисливістю рідини з кавітаційними бульбашками, що обумовлено зміною об'єму порожнин. При цьому $\rho_{\text{рід}} \equiv \rho_0$, тобто рух двофазної рідини описуватимуть перші чотири рівняння системи (1). Цей випадок розглянув Когарко [4].

Нехай тепер перший член у лівій частині співвідношення (15) набагато менший за другий:

$$\frac{3\,b\overline{R^2}}{T} << \frac{\overline{R^2}}{c^2T^2}\text{, або } 3\,bc^2T^2\overline{R} << 1\,.$$

Цей випадок характерний тим, що можна знехтувати стисливість рідини в умовах кавітації, яка пов'язана зі зміною об'єму бульбашок, порівняно зі стисливістю вихідної рідини. Тоді $\rho \equiv \rho_{\text{рід}}$, тобто у системі рівнянь (1) можна опустити третє й четверте рівняння. Рух рідини у звуковій хвилі описуватиме система рівнянь вихідної рідини, тобто перше, друге і п'яте рівняння.

Розглянемо поширення плоскої звукової хвилі за умови $3\,b\,c^2T^2R < 1$ з урахуванням втрат у ній, обумовлених кавітацією. Використаємо як густину енергії й густину потоку енергії підінтегральні вирази (9) і (13). Застосувавши співвідношення (14) та знехтувавши члени вищих порядків малості, отримуємо рівняння

$$\overline{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\rho_0 bR^3\dot{R}^2\right)} = -\frac{d}{dx}\overline{p'u}. \tag{16}$$

Окрім того,

$$I = \overline{p'u} = \frac{\overline{(p')^2}}{\rho c}; \qquad R \approx \sqrt{\frac{2}{3\,\rho_0}\sqrt{\overline{(p')^2}}\,t}\,.$$

Відомо [8], що

$$b = a\left(I - I_{\text{п}}\right); \qquad I > I_{\text{п}},$$

де $a = \text{const}$; $I_{\text{п}}$ – інтенсивність виникнення кавітації (порога кавітації). Тоді

$$\overline{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\rho_0 R^3\dot{R}^2\right)} \approx 2\frac{c^{5/4}aT^2}{\rho_0^{1/4}}\left(I - I_{\text{п}}\right)\left(I^{5/4} - I_{\text{п}}^{1/4}\right) \approx 2\frac{c^{5/4}aT^2I_{\text{п}}^{1/4}}{\rho_0^{1/4}}\left(I - I_{\text{п}}\right)^2 = k\left(I - I_{\text{п}}\right)^2,$$

де $k = 2\dfrac{c^{5/4}aT^2I_{\text{п}}^{1/4}}{\rho_0^{1/4}}$. Отже,

$$\frac{dI}{dx} = -k\left(I - I_{\text{п}}\right)^2. \tag{17}$$

Проінтегруємо рівняння (17) за умови, що в площині $x = 0$ середня густина потоку звукової енергії дорівнює I_0. Отримуємо усереднену густину потоку звукової енергії у вихідній хвилі залежно від координати x в одновимірній кавітаційній області

$$I(x) = I_{\text{п}} + \frac{I_0 - I_{\text{п}}}{1 + kx\left(I_0 - I_{\text{п}}\right)} \tag{18}$$

за умов $I_0 > I_n$.

Висновки.

- Отримано критерій (16), що характеризує розходження між ідеальною рідиною й рідиною з розвинутою кавітацією.
- Отримано аналітичний вираз для густини потоку енергії у плоскій хвилі, що поширюється з втратами у рідині з кавітаційними порожнинами.
- Вираз (18) повністю відповідає результатам праці [1], які отримані на основі феноменологічної теорії одновимірної кавітаційної області з використанням експериментально заміряних величин.

1. *Акуличев В. А., Розенберг Л. Д.* О некоторых соотношениях в кавитационной области // Акуст. журн. – 1965. – **11**, № 3. – С. 287–293.

2. *Дудзинский Ю. М.* Ближнее поле осесимметричного гидродинамического излучателя // Акуст. вісник. – 2004. – **7**, № 4. – С. 48–51.
3. *Дудзінський Ю. М.* Моделі акусто-гідродинамічних сенсорів порога кавітації рідини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 4. – С. 199–204.
4. *Когарко Н. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости // Докл. АН СССР. – 1961. – **137**, № 6. – С. 1331-1333.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. – М.: ГТТИ, 1954. – 500 с.
6. *Мощные* ультразвуковые поля / Под ред. Л. Д. Розенберга. – М.: Наука, 1968. – 650 с.
7. *Физические* основы ультразвуковой технологии / Под ред. Л. Д. Розенберга. – М: Наука, 1970. – 800 с.
8. *Mession D., Sette D., Wanderlingh F.* Statical approach to ultrasonic cavitation // J. Acoust. Soc. America. – 1963. – **35**, № 10. – P. 1575–1583.
9. *Mettin R., Luther S., Ohl C.-D., Lauterborn W.* Acoustic Cavitation Structures and Simulations by a Particle Model // Ultrason. Sonochem. – 1999. – **6.** – P. 25–29.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ С КАВИТАЦИЕЙ

Предложена система уравнений, которая описывает распространение акустических волн в жидкости в условиях кавитации. Получены выражения для энергии и потока энергии звуковой волны в среде с кавитационными пузырьками. Найден критерий, характеризующий различие между идеальной жидкостью и жидкостью с развитой кавитацией. Рассмотрена задача о распространении плоской бегущей волны с учетом потерь при наличии пузырьков.

DISTRIBUTION OF ACOUSTIC WAVES IN LIQUID WITH CAVSTATIONS

The system of equalizations, which describes distribution of acoustic waves in a liquid in the conditions of cavitations, is offered. Expressions for energy and stream of energy of sound wave in an environment with cavitations' bubbles are given. A criterion, characterizing distinction between an ideal liquid and liquid with developed cavitations, is given. A task about distribution of flat progressing wave taking into account losses at presence of bubbles is considered.

[1]Одеський нац. політехнічний ун-т, Одеса;
[2]Наці. технічний ун-т України
«Київський політехнічний інститут», Київ

Одержано
12.08.10