

ЗГИН ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ З УРАХУВАННЯМ ЗАКРИТТЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН

У двовимірній постановці розглянуто задачу про контактну взаємодію берегів колінеарних тріщини за згину пологої сферичної оболонки на пружній основі. Закриття тріщин описано за допомогою моделі контакту вздовж лінії в одній з лицьових поверхонь. Досліджено вплив пружної основи, кривини поверхні, взаємодії та закриття дефектів на напружений стан і граничну рівновагу оболонки.

З огляду на широке застосування тонкостінних елементів конструкцій задачі механіки пластин та оболонок з тріщинами завжди зацікавлюють дослідників. Огляд праць на цю тематику наведений у монографіях [1–5].

Важливий клас конструктивно-нелінійних задач виникає за розгляду контакту берегів тріщини, який слід враховувати, оцінюючи граничну рівновагу тонкостінних елементів конструкцій. Раніше закриття поодинокі тріщини за згину сферичної оболонки вивчали за теоріями Кірхгофа–Лява [6], Тимошенка [7] і з урахуванням пружної основи [8]. Взаємодія колінеарних дефектів у пластині на пружній основі та пологій сферичній оболонці з урахуванням контакту берегів описана в працях [9, 10]. Відомий аналіз впливу пружної основи на напружений стан сферичної оболонки з розрізами за умов розтягу [2, 11].

Ця робота є продовженням таких досліджень і має на меті оцінити вплив контакту берегів колінеарних тріщин на напружений стан та граничну рівновагу пологої сферичної оболонки під час згину на пружній основі.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропну сферичну оболонку радіусом R і завтовшки $2h$ з двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки $2l$, які розташовані вздовж меридіана на відстані $2d$ між їхніми центрами. Оболонка перебуває у нормальному гладкому контакті із пружною основою Вінклера. До країв тріщин прикладено самозрівноважене рівномірно розподілене згинне навантаження $m = \text{const}$. Решта поверхонь оболонки вільна від навантаження. Дослідимо вплив пружної основи, кривини поверхні, розташування та закриття дефектів на напружений стан і граничну рівновагу оболонки.

Вважаючи оболонку у зоні збурення напруженого стану пологою, введемо систему декартових координат $Oxyz$ з центром посередині правого розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. Напружено-деформований стан оболонки поза розрізом опишемо рівняннями теорії пологих оболонок на вінклеровій основі:

$$\Delta\phi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\phi + \frac{k}{D}w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 / L.$$

Тут ϕ – функція напружень; w – прогин оболонки; $B = 2Eh$; $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; k – коефіцієнт жорсткості основи; Δ – оператор Лапласа; $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$ – сукупність розрізів.

Враховуючи симетрію задачі відносно осі абсцис, на підставі гіпотези Кірхгофа запишемо крайові умови контакту на розрізах [12, 13]:

$$[u_y] = h \mid [\theta_y] \mid \geq 0, \quad M_y = -m + hN_y \operatorname{sgn}[\theta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L. \quad (1)$$

На безмежності напруження відсутні:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0; M_x = M_{xy} = M_y = 0; Q_x^* = Q_y^* = 0, (x, y) \rightarrow \infty. (2)$$

У формулах (1), (2) $[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки; $[\theta_y]$ – стрибок кута повороту нормалі; N_{ij} – мембранні зусилля; M_{ij} – моменти, Q_i^* – узагальнені поперечні сили.

Інтегральні рівняння задачі. Для побудови розв'язку сформульованої задачі скористаємось методом сингулярних інтегральних рівнянь. Ураховуючи, що тріщини перебувають в однакових умовах, запишемо інтегральні подання сил та моментів на правому розрізі через похідні від стрибків переміщення і кута повороту нормалі [2, 3]:

$$\begin{aligned} N_y(x, 0) &= \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \{ K_{11}^0(\xi, x) [u_y]'(\xi) - K_{13}^0(\xi, x) a [\theta_y]'(\xi) \} d\xi, \\ M_y(x, 0) &= \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \{ K_{31}^0(\xi, x) [u_y]'(\xi) - K_{33}^0(\xi, x) a [\theta_y]'(\xi) \} d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

де $K_{ij}^0(\xi, x) = K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d)$; $a = h / \sqrt{3(1 - \nu^2)}$;

$$\begin{aligned} K_{11}(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2A}{z} \left(\frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) + \frac{1}{2} + \gamma|z| \operatorname{ker}'(\gamma|z|) \right); \\ K_{13}(z) = K_{31}(z) &= -\frac{2\sqrt{A}(1-\nu)}{z} \left(\frac{2}{\gamma^2 z^2} + \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{ker}'(\gamma|z|) + \operatorname{kei}(\gamma|z|) \right) - \\ &- 2\sqrt{A}\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|); \\ K_{33}(z) &= \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left(\frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) \right) - \\ &- 2(1-\nu^2)\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma|z|) dz; \end{aligned}$$

$z = \xi - x$, $\gamma^4 = (k/D)^4 + B/(DR^2)$, $A = 1/(1 + kR^2/B)$, $\operatorname{ker}(\dots)$, $\operatorname{kei}(\dots)$ – функції Кельвіна.

Підставляючи вирази (3) у крайові умови (1) та виключаючи $[u_y]$, приходимо до сингулярного інтегрального рівняння для знаходження знако-сталого за припущенням стрибка повороту нормалі [9, 10]

$$\begin{aligned} \frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l \{ 3(1-\nu^2) K_{11}^0(\xi, x) + 2 \operatorname{sgn} m \sqrt{3(1-\nu^2)} K_{13}^0(\xi, x) + \\ + K_{33}^0(\xi, x) \} [\theta_y]'(\xi) d\xi = m, \quad x \in (-l, l). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут враховано, що $\operatorname{sgn}[\theta_y] = -\operatorname{sgn} m$ [12].

На кінцях розрізу розв'язок рівняння слід підпорядкувати умові

$$[\theta_y](\pm l) = 0. \quad (5)$$

Якщо контакт берегів не враховувати, то, підставивши інтегральні подання (3) у класичні умови $N_y = 0$, $M_y = -m$, $x \in (-l, l)$, отримаємо систему інтегральних рівнянь [3]

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \{ K_{11}^0(\xi - x) [\bar{u}_y]'(\xi) - K_{13}^0(\xi - x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \} d\xi = 0,$$

$$\frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \{ \mathcal{K}_{31}(\xi - x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \mathcal{K}_{33}(\xi - x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \} d\xi = -m, \quad x \in (-l, l) \quad (6)$$

з додатковими умовами

$$[\bar{u}_y](\pm l) = 0, \quad [\bar{\theta}_y](\pm l) = 0. \quad (7)$$

Аналіз результатів. Числові розв'язки задач (4)–(7) отримали методом квадратур при $\nu = 0.3$. Для задачі з контактом за знайденим $[\theta_y]$ визначили розкриття тріщини за першою із формул (1), потім за регулярним виразом

$$N_y(x, 0) = -\frac{|m|}{h} \frac{\kappa}{1 + \kappa} \left\{ 1 - \frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l [\mathcal{K}_{33}(\xi, x) - (3 - 2\nu - \nu^2) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_{11}(\xi, x) + \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \operatorname{sgn} m \sqrt{3(1 - \nu^2)} \mathcal{K}_{13}(\xi, x) \right] \frac{[\theta_y]'(\xi)}{m} d\xi \right\},$$

де $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$, обчислювали контактну реакцію у будь-якій точці правого розрізу.

Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів визначали так :

$$K_N^\pm = m \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x), \\ K_M^\pm = \pm(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x).$$

Із енергетичного критерію руйнування за умов комбінованого розтягу та згину оболонок [2]

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \frac{3(1 + \nu)}{3 + \nu} \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma_*,$$

де γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу, знайшли граничне навантаження m_* , за якого починається розповсюдження тріщини.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\mathcal{K}_N = hK_N / |m| \sqrt{l}$ та моментів $\mathcal{K}_M = K_M / m\sqrt{l}$ і руйнівного навантаження $m_* = |m_*| / m^0$ ($m^0 = 2h^2 \sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$) від параметра взаємного розташування дефектів $\rho = l/d$ будували за фіксованих значень параметрів кривини оболонки $\lambda_R = l(3(1 - \nu^2))^{1/4} / \sqrt{Rh}$ та жорсткості пружної основи $\lambda_k = l(k/D)^{1/4}$ (рис. 1). Суцільні лінії – результати для внутрішніх, а штрихові – для зовнішніх вершин розрізів. Темними та світлими маркерами позначено результати з урахуванням закриття тріщин, коли береги змикаються відповідно у внутрішній ($m > 0$) та зовнішній ($m < 0$) лицьових поверхнях оболонки. Хрестоподібними маркерами позначено класичні результати без урахування контакту.

Закриття тріщини призводить до збільшення коефіцієнта інтенсивності зусиль та зменшення коефіцієнта інтенсивності моментів, при цьому руйнівне навантаження зазвичай є більше, однак за малих значень λ_k залежно від знака навантаження m_* може мати як більші, так і менші значення порівняно з класичним результатом. У припущенні контакту берегів характерна немонотонна залежність коефіцієнтів інтенсивності та руйнівного навантаження від параметра розташування ρ , однак із ростом λ_k ця тенденція зменшується. В окремих випадках при $\lambda_R = 0$ отримуємо результа-

ти для колінеарних тріщин у пластині на пружній основі [9], а при $\lambda_k = 0$ – у сферичній оболонці, вільній від в'язей [10].

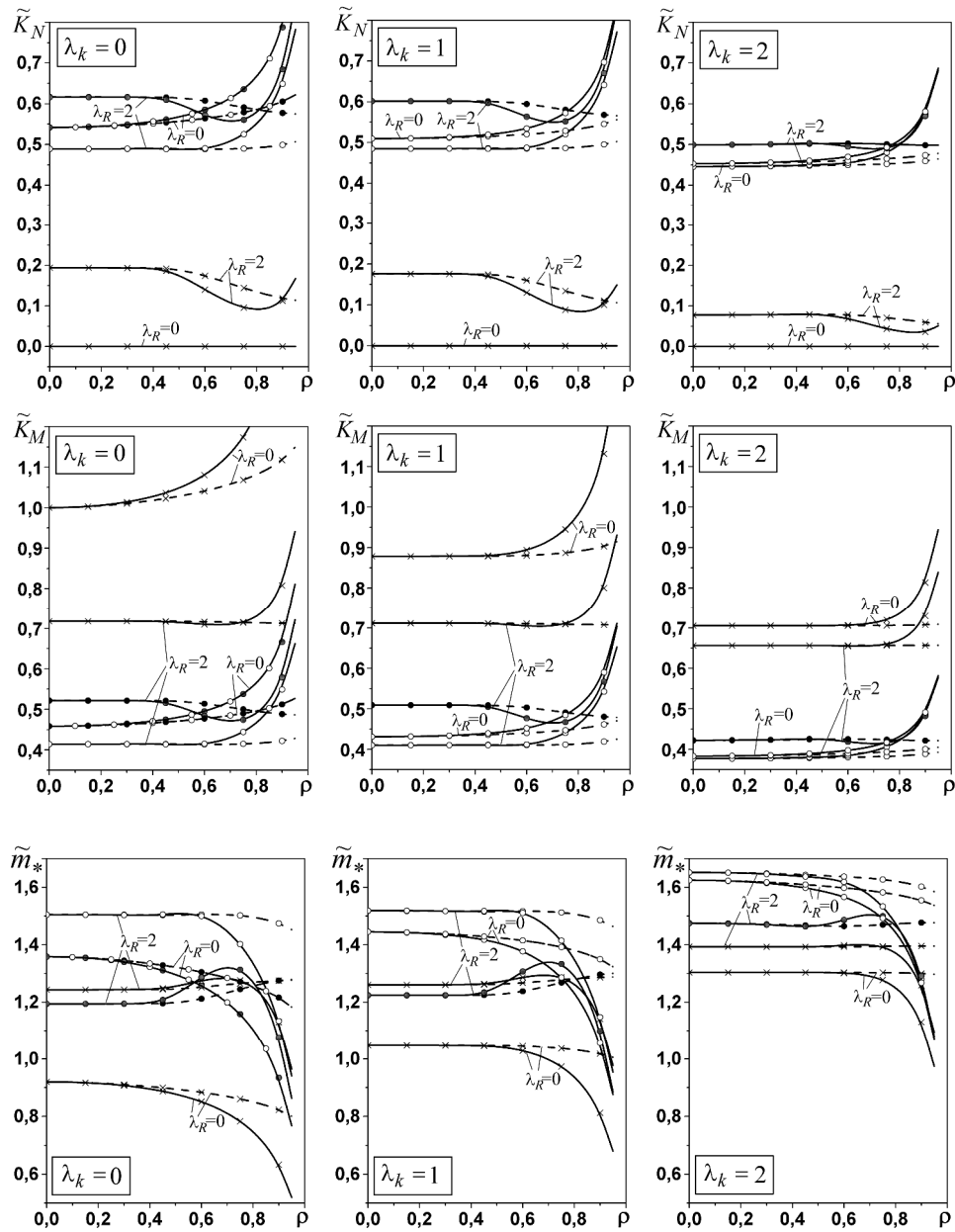


Рис. 1.

Результати обчислення контактної реакції для фіксованих значень λ_k , λ_R та ρ вздовж правої тріщини ($t = x/l$) наведені на рис. 2. Графіки зліва ліпсують залежність від кривини, а справа – від відносної віддалі між розрізами. Із ростом параметрів кривини оболонки та жорсткості основи контактна взаємодія берегів тріщин послаблюється, причому вплив параметра λ_R є на порядок більший. Залежність контактної реакції від ρ немонотонна.

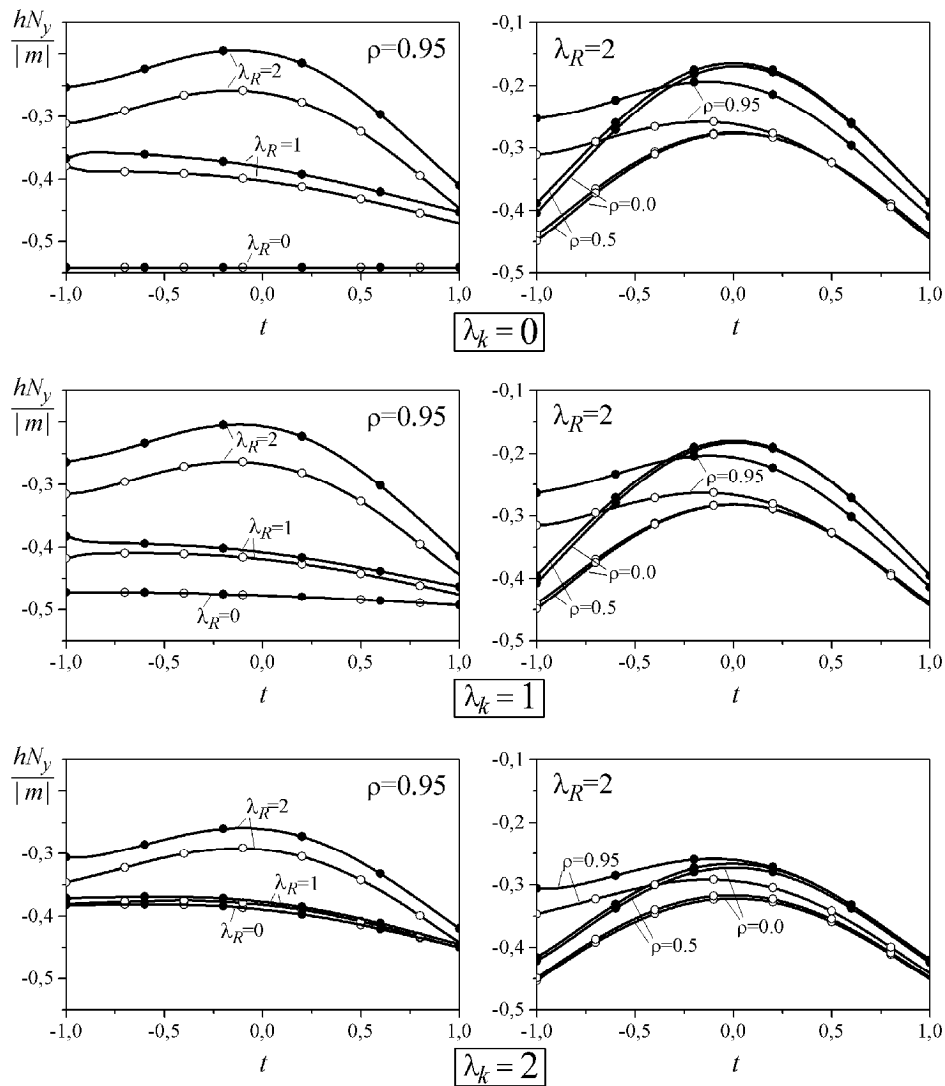


Рис. 2.

Висновки. Врахування контакту берегів тріщини призводить до зменшення коефіцієнта інтенсивності моментів, збільшення коефіцієнта інтенсивності мембранної сили і до немонотонної залежності їх від параметра ρ . Руйнівний момент залежно від кривини та знака заданого навантаження може бути як більший, так і менший порівняно з отриманим у класичній постановці. За зближення тріщин виявлено такий діапазон їх взаємного розташування, де небезпечнішими стають зовнішні вершини. Вплив пружної основи на контактну взаємодію берегів тріщини немонотонний і на порядок менший, ніж вплив кривини оболонки. Збільшення жорсткості основи в обидвох формулюваннях призводить до зростання руйнівного навантаження, однак з ростом кривини ця тенденція послаблюється.

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.* – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
2. Осадчук В. А. *Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами.* – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.

3. *Механика композитов*. в 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993. – Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с.
4. *Khludnev A. M., Kovtunen V. A.* Analysis of cracks in solids. – Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. – 386 p.
5. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
6. *Маковійчук М.В.* Згин пологої сферичної оболонки на пружній основі з урахуванням контакту берегів тріщини // *Машинознавство*. – 2004. – № 10. – С. 12–15.
7. *Шацький І.П., Маковійчук Н.В.* Равновесие пологой сферической оболочки с учетом контакта берегов трещины при изгибе // *Теорет. и прикл. механика*. – 2005. – Вып. 41. – С. 146–150.
8. *Liu Rong, Wang C. H., Bathgate R. G.* Crack closure in spherical shells // *Int. J. Fract.* – 1999. – 99, № 4. – P. 307–323.
9. *Шацький І.П., Маковійчук М.В.* Змикання берегів колінеарних тріщин при згині пластини на пружній основі // *Машинознавство*. – 2004. – № 6. – С. 10–12.
10. *Осадчук В.А., Николишин М.М., Маселко Т.Е.* Предельное равновесие находящейся на упругом основании сферической оболочки, ослабленной трещиной // *Прикл. механика*. – 1986. – № 10. – С. 47 – 52.
11. *Шацький І. П.* Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // *Доп. АН УРСР. Сер. А*. – 1991. – № 2. – С. 26–29.
12. *Шацький І.П.* Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 1998 – № 5. – С. 164 – 173.

ИЗГИБ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ЗАКРЫТИЯ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН

В двумерной постановке рассмотрена задача о контактном взаимодействии берегов коллинеарных трещин при изгибе пологой сферической оболочки. Закрывание трещин описано с использованием модели контакта вдоль линии в одной из лицевых поверхностей оболочки. Исследовано влияние упругого основания, кривизны поверхности, взаимодействия и закрытия дефектов на напряженное состояние и предельное равновесие оболочки.

BENDING OF A SHALLOW SPHERICAL SHELL ON ELASTIC FOUNDATION TAKING INTO ACCOUNT THE CLOSURE OF COLLINEAR CRACKS

The problem of bending of shallow spherical shell with two collinear cracks on elastic foundation in two-dimensional statement has been considered. Crack closure under bending is described using the model of contact along a line in one of facial surfaces. The influence of the elastic foundation, surface curvature, mutual location and closure of cracks on the stressed state and limit equilibrium of shell has been investigated.

Івано-Франківський сектор Ін-ту прикл.
проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ

Одержано
10.08.10