

ВІЛЬНІ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ВИДОВЖЕНИХ ГОФРОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

Отримано вирази для геометричних характеристик серединної поверхні гофрованої циліндричної оболонки залежно від частоти та амплітуди гофрування. Досліджено характер залежності першої власної частоти за геометрично нелінійних коливань гофрованих видовжених циліндричних панелей від частоти гофрування.

Вступ. Через раціональну матеріаломісткість та необхідну жорсткість у певних напрямках, зумовлених експлуатаційними умовами, оболонкові елементи є найпоширенішими складниками навантажених конструкцій, приладів і споруд різноманітного цільового призначення. Серед них слід виокремити циліндричні оболонки та їх фрагменти, зокрема, видовжені панелі. Моделюванню деформування та методам їх розрахунку присвячено чимало праць. Менш досліджені гофровані циліндричні оболонки, особливо за динамічного геометрично нелінійного деформування, зокрема, їхніх коливань. Для запобігання резонансних явищ під час вібраційних навантажень необхідно на стадії проектування визначати спектри власних частот вказаних конструктивних елементів. Дослідженню вільних коливань гофрованих циліндричних оболонок за лінійного деформування присвячені праці [1–3, 6]. Нижче досліджено вплив частот гофрування на першу власну частоту видовженої гофрованої циліндричної панелі за геометрично нелінійного деформування.

Формулювання задачі. Криволінійний пружний шар товщиною h з циліндричною серединною поверхнею віднесемо до природної мішаної системи координат $\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = z$, $\alpha_3 = r$. Вважасмо, що розмір шару суттєво більший уздовж осі α_2 проти довжини дуги перерізу $\alpha_2 = 0$ серединної поверхні $\alpha_3 = 0$. Тоді, маємо видовжену циліндричну панель (див. рис. 1). Якщо умови закріплення торців панелі $\alpha_1 = \pm\alpha_1^0$ та початкові не залежать від координати α_2 , то через незначний вплив умов закріплення країв $\alpha_2 = \pm\alpha_2^0$ функції, які визначають характеристики геометрично нелінійного коливного процесу в площині серединного перерізу, залежать лише від α_1 , α_3 . Для відшукування цих функцій маємо [5]:

– рівняння руху

$$\operatorname{div} S = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad (1)$$

– співвідношення пружності

$$\Sigma = \tilde{A} \otimes \varepsilon; \quad (2)$$

– деформаційні співвідношення між компонентами тензора деформацій ε та компонентами вектора пружних переміщень $\vec{U} = u_i \vec{e}_i \vec{e}_j$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k); \quad (3)$$

– співвідношення між компонентами S^{ij} несиметричного тензора напружень Кірхгофа S та компонентами σ^{ik} симетричного тензора напружень Піоли Σ

$$S^{ij} = \sum_k \sigma^{ik} (\delta_k^j + \nabla_k u^j). \quad (4)$$

У співвідношеннях (1), (2) \tilde{A} – тензор пружних характеристик анізотропного шару, а ρ – його густина.

Граничні умови на лицевих поверхнях панелі $\alpha_3 = \pm h / 2$ за вільних коливань мають вигляд

$$S^{31}(\alpha_1, \pm h / 2, t) = S^{33}(\alpha_1, \pm h / 2, t) = 0, \quad |\alpha_1| \leq \alpha_1^0, \quad (5)$$

а на видовжених її торцях $\alpha_1 = \pm \alpha_1^0$ за їх шарнірного закріплення на нижній лицевій поверхні $\alpha_2 = -h / 2$:

$$S^{1i}(a, \alpha_3, t) = 0, \quad (6)$$

$$u_i(a, \pm h / 2, t) = 0, \quad |\alpha_3| \leq h / 2, \quad i = 1, 3, \quad a = 0, l. \quad (7)$$

Рівняння руху (1) разом зі співвідношеннями (2)–(4) та граничними умовами (5)–(7) описуватимуть геометрично нелінійні поперечні коливання середнього перерізу панелі, якщо початкові умови задати так:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_3, t)|_{t=t_0} = v_i^0(\alpha_1, \alpha_3), \quad \left. \frac{\partial u_i(\alpha_1, \alpha_3, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = v_i^1(\alpha_1, \alpha_3), \quad i = 1, 3, \quad (8)$$

$$|v_3^0(\alpha_1, \alpha_3)| \gg |v_1^0(\alpha_1, \alpha_3)|, \quad (\alpha_1, \alpha_3) \in \Omega = [-\alpha_1^0, \alpha_1^0] \times [-h / 2, h / 2]. \quad (9)$$

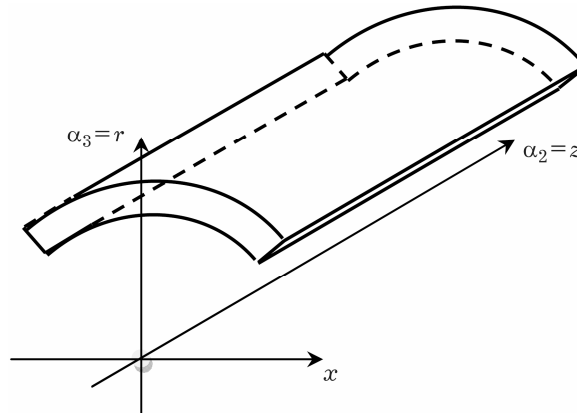


Рис. 1. Видовжена циліндрична панель.

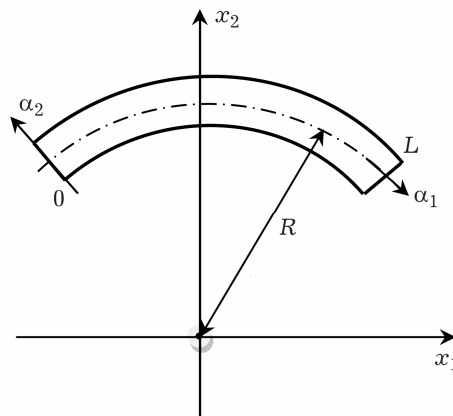


Рис. 2. Серединний переріз видовженої циліндричної панелі.

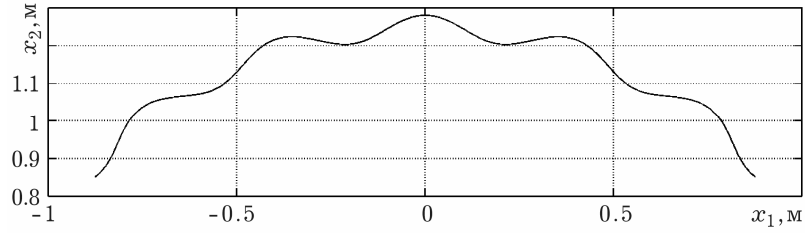


Рис. 3. Твірна панель в декартовій системі координат за частоти гофрування $g_v = 20$.

Нехай тепер серединна поверхня циліндричної панелі має вигляд, як на рис. 3. Введемо на ній подібну, як для кругової циліндричної поверхні, мішану систему координат $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, що зв'язана з декартовою $x_i, i = 1, 2, 3$ співвідношеннями

$$x_1 = (R + \alpha_2 + g_A \cos(g_v a(\alpha_1))) \cos(a(\alpha_1));$$

$$x_2 = (R + \alpha_2 + g_A \cos(g_v a(\alpha_1))) \sin(a(\alpha_1));$$

$$x_3 = \alpha_3,$$

де R – радіус серединної поверхні кругової циліндричної панелі, верхня і нижня лицеві поверхні якої перетинають вершини гофрів; $L = \alpha_1^0$ – довжина дуги твірної; g_A – амплітуда гофрування; g_v – частота гофрування; $a = a(\alpha_1) = \frac{\pi}{2} + K \left(\frac{L}{2} - \alpha_1 \right)$; $K = \frac{1}{R}$.

Для радіус-вектора твірної маємо вираз

$$\bar{r}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} (R + g_A \cos(g_v a(\alpha_1))) \cos(a(\alpha_1)) \\ (R + g_A \cos(g_v a(\alpha_1))) \sin(a(\alpha_1)) \end{pmatrix}.$$

Радіус-вектор кожної точки серединного перерізу оболонки

$$\bar{R} = \bar{r}(\alpha_1) + \alpha_2 \bar{n}(\alpha_1).$$

Розв'язування задачі. Для векторів коваріантної бази серединної поверхні гофрованої оболонки одержимо:

$$R_1 = (w \sin(a) + z \cos(a)) \bar{e}_1 + (-w \cos(a) + z \sin(a)) \bar{e}_2;$$

$$R_2 = \cos(a) \bar{e}_1 + \sin(a) \bar{e}_2; \quad R_3 = \bar{e}_3,$$

де $w = w(\alpha_1, \alpha_2) = q + g_A K \cos(g_v a)$; $z = z(\alpha_1) = g_A g_v K \sin(g_v a)$; $\bar{e}_i, i = \overline{1, 3}$ – базові вектори декартової системи $x_i, i = \overline{1, 3}$.

Для радіус-вектора дотичної до твірної можна записати:

$$\bar{r}'(\alpha_1) = \begin{pmatrix} (1 + g_A K \cos(g_v a)) \sin(a) + g_A g_v K \sin(g_v a) \cos(a) \\ -(1 + g_A K \cos(g_v a)) \cos(a) + g_A g_v K \sin(g_v a) \sin(a) \end{pmatrix}.$$

Тоді для нормалі до твірної отримаємо:

$$\bar{n}(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{\bar{r}'(\alpha_1)_x^2 + \bar{r}'(\alpha_1)_y^2}} \begin{pmatrix} -\bar{r}'(\alpha_1)_y \\ \bar{r}'(\alpha_1)_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(1 + g_A K \cos(g_v a))^2 + (g_A g_v K \sin(g_v a))^2}} \times \\ \times \begin{pmatrix} (1 + g_A K \cos(g_v a)) \cos(a) - g_A g_v K \sin(g_v a) \sin(a) \\ (1 + g_A K \cos(g_v a)) \sin(a) + g_A g_v K \sin(g_v a) \cos(a) \end{pmatrix}.$$

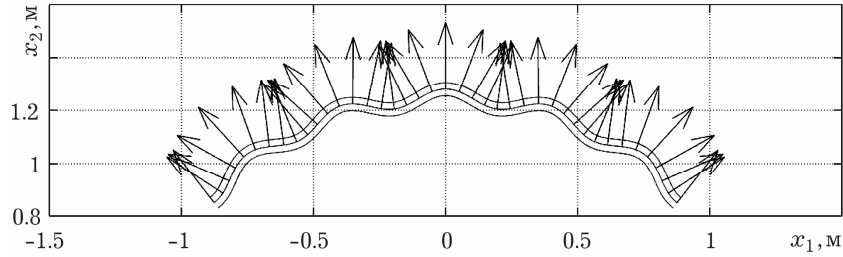


Рис. 4. Видгляд гофрованої панелі і нормалей до серединної поверхні:
 $L = 2$ м, $R = 1.25$ м, $h = 0.05$ м, $g_A = 0.03$ м, $g_v = 20$.

На рис. 4 зображено розташування векторів нормалі до серединної поверхні гофрованої циліндричної оболонки.

Аналогічно будемо коваріантну базу і нормалі та дотичні на лицевих поверхнях оболонки. Це необхідно, щоб застосувати запропонований та обґрунтований числовий метод [5] знаходження скінченної кількості власних частот і мод видовжених циліндричних панелей з довільною формою твірної за геометрично нелінійних коливань. Метод базується на апроксимації переміщень точок оболонки за нормальною координатою в поєднанні з методом скінченних елементів за тангенціальною координатою на серединній поверхні оболонки [4, 7].

Числовий приклад та висновки. Як об'єкт вибрали видовжену циліндричну панель з довжиною твірної $L = 2$ м, радіусом серединної поверхні оболонки, лицеві поверхні якої перетинають вершини гофрів, $R = 1.25$ м і пружними характеристиками: $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0.3$, $G = 8.1 \cdot 10^{10}$ Н/м² та густиною $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³.

| g_v | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 20 | 50 | 80 | 100 | 200 | 300 | 500 |
|-----------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| ω_{\min} | 799 | 775 | 692 | 1025 | 1056 | 3658 | 6383 | 6936 | 7709 | 5559 | 4914 | 3195 |

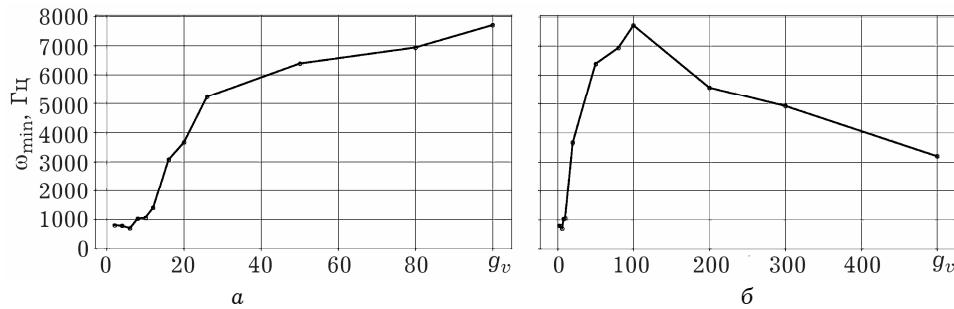


Рис. 5. Залежність ω_{\min} від g_v .

Як видно з результатів, наведених у таблиці, та графіків на рис. 5 мінімум ω_{\min} досягається при $g_v = 6$, що збігається з висновками праці [1]. Також з рис. 5б можна зробити висновок, що при $g_v \rightarrow \infty$ величина ω_{\min} прямує до певного значення, більшого за першу власну частоту коливань негофрованої кругової циліндричної оболонки.

1. Пузырев С. В. О свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим сечением // Зб. наук. праць Нац. ун-ту кораблебудування. – 2013. – № 1. – С. 47–53.

2. Пузырев С. В. Исследование свободных колебаний гофрированных цилиндрических оболочек // Теорет. и прикл. механика. – 2010. – **1**, № 47. – С. 106–113.
3. Семенюк Н. П., Бабич И. Ю., Жукова Н. Б. Свободные колебания гофрированных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 5. – С. 58–67.
4. Barbero J. Ever. Finite Element Analysis of Composite Materials. – CRC Press, Boca Raton, 2008. – 331p.
5. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. Geometrically Nonlinear Free Transversal Vibrations of Thin-Walled Elongated Panels with Arbitrary Generatrix // Vibrations in Physical Systems. – 2014. – **26**. – P. 153–160.
6. Kim Young-Wann. Vibration Analysis of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells // Transactions of the Korean Soc. for Noise and Vibration Eng.– 2016. – **26**. – P. 851–856.
7. Bathe Klaus-Jurgen. Finite Element Procedures. 2nd edition. – Watertown, MA, 2014. – 1063p.

СВОБОДНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УДЛИНЕННЫХ ГОФРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Получены выражения для геометрических характеристик срединной поверхности гофрированной цилиндрической оболочки в зависимости от частоты и амплитуды гофрирования. Исследован характер зависимости первой собственной частоты геометрически нелинейных колебаний гофрированных удлиненных цилиндрических панелей от частоты гофрирования.

FREE GEOMETRICALLY NONLINEAR VIBRATIONS OF CORRUGATED ELONGATED CYLINDRICAL PANELS

The expressions for the geometric characteristics of the median surface of the corrugated cylindrical shell, depending on the frequency and amplitude of the corrugation, are obtained. The character of the dependence of the first eigen frequency of geometrically nonlinear vibrations of corrugated elongated cylindrical panels on the corrugation frequency is investigated.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів;

²Тернопільський нац. економічний ун-т
МОН України, Тернопіль;

³Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів