

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ЛОКАЛЬНО НАГРІТОЇ ШАРУВАТОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ ДВОЯКОЇ КРИВИНИ

Для неоднорідних анізотропних пологих оболонок двоякої кривини записано нестационарні рівняння теплопровідності й термопружності з відповідними крайовими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та динамічної задачі термопружності для скінченної шарнірно опертої ортогонально армованої циліндричної оболонки за локального нагріву. Числові результати наведено для графітоепоксидного композита.

Композитні пологі оболонки двоякої кривини як важливі елементи сучасних конструкцій часто піддаються дії швидкозмінних температурних полів. Тому розрахунок таких конструкцій – важлива наукова задача. Дослідження у цьому напрямі, в основному, стосувались однорідних оболонок із ізотропного або ортотропного матеріалів [5, 7, 9, 10]. Однак для використання композитних матеріалів з високою анізотропією фізико-механічних властивостей потрібні розширені моделі розрахунку оболонок [1–3, 6, 8].

Мета статті – дослідити термопружний стан ортогонально армованих шаруватих анізотропних пологих оболонок двоякої кривини скінченних розмірів, які нагріваються локально розподіленими температурними джерелами, а між довір'ями і поверхнями оболонки відбувається конвективний теплообмін. Для цього застосували модель неоднорідних анізотропних оболонок [2, 6], яка враховує фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу у трансверсальному напрямку.

Формулювання задачі та метод розв'язування. Розглянемо прямокутну в плані з розмірами $a_1 \times a_2$ багат шарову пологу оболонку сталої товщини $2h$, складену зі скінченної кількості ідеально скріплених між собою тонких композитних шарів з однаковою товщиною, які армовані волокнами в одному напрямі. Матеріал шарів вважатимемо однорідним і ортотропним, що характеризується ефективними модулями. Осі ортотропії кожного шару (напрямки волокон) орієнтовані під кутом 0° або 90° до осей оболонки (ортотропно армована оболонка). Точки простору оболонки віднесемо до ортогональної системи координат x_1, x_2, z . Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1, 2, 3, а кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за координатами x_1, x_2 відповідно. Кривка над функцією – частинну похідну за часом τ . Приймемо, що коефіцієнти першої квадратичної форми дорівнюють одиниці, головні кривини k_1 і k_2 сталі, а лінії цих кривин збігаються з координатними лініями.

Нехай оболонка перебуває під дією зовнішнього силового навантаження q_i, m_i ($i = 1, 2, 3$), а також нагрівається джерелами тепла і зовнішнім середовищем шляхом конвективного теплообміну через бокові поверхні $z = \pm h$. Термопружну поведінку такої оболонки дослідимо на основі рівнянь руху в узагальнених переміщеннях u_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$), які запишемо в операторній формі:

$$\sum_p^6 L_{sp} y_p = b_s \quad (s, p = 1, 2, \dots, 6), \quad (1)$$

де $y_i = u_i$, $y_{3+i} = \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$); u_1, u_2, u_3 – переміщення серединної поверхні; γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі; γ_3 – нормальна деформація; диференціальні оператори L_{sp} ($L_{sp} = L_{ps}$) і вільні члени b_s мають вигляд

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11}(\cdot)_{,11} + A_{66}(\cdot)_{,22} - I_1(\ddot{\cdot}); \quad L_{12} = (A_{12} + A_{66})(\cdot)_{,12}; \\
L_{13} &= (A_{11}k_1 + A_{12}k_2)(\cdot)_{,1}; \\
L_{14} &= B_{11}(\cdot)_{,11} + B_{66}(\cdot)_{,22} - I_2(\ddot{\cdot}); \quad L_{15} = (B_{12} + B_{66})(\cdot)_{,12}; \quad L_{16} = A_{13}(\cdot)_{,1}; \\
L_{26} &= A_{23}(\cdot)_{,2}; \\
L_{22} &= A_{66}(\cdot)_{,11} + A_{22}(\cdot)_{,22} - I_1(\ddot{\cdot}); \quad L_{23} = (A_{12}k_1 + A_{22}k_2)(\cdot)_{,2}; \\
L_{24} &= (B_{12} + B_{66})(\cdot)_{,12}; \\
L_{25} &= B_{66}(\cdot)_{,11} + B_{22}(\cdot)_{,22} - I_2(\ddot{\cdot}); \quad L_{34} = (B_{11}k_1 + B_{12}k_2 - k'A_{55})(\cdot)_{,1}; \\
L_{33} &= [k'A_{55}(\cdot)_{,11} + k'A_{44}(\cdot)_{,22} - k_1^2A_{11} - k_2^2A_{22} - 2k_1k_2A_{12} - I_1(\ddot{\cdot})]; \\
L_{35} &= (B_{12}k_1 + B_{22}k_2 - k'A_{44})(\cdot)_{,2}; \quad L_{46} = (B_{13} - k'B_{55})(\cdot)_{,1}; \\
L_{36} &= [k'B_{55}(\cdot)_{,11} + k'B_{44}(\cdot)_{,22} - k_1A_{13} - k_2A_{23} - I_2(\ddot{\cdot})]; \\
L_{44} &= D_{11}(\cdot)_{,11} + D_{66}(\cdot)_{,22} - k'A_{55} - I_3(\ddot{\cdot}); \quad L_{45} = (D_{12} + D_{66})(\cdot)_{,12}; \\
L_{55} &= D_{66}(\cdot)_{,11} + D_{22}(\cdot)_{,22} - k'A_{44} - I_3(\ddot{\cdot}); \quad L_{56} = (B_{23} - k'B_{44})(\cdot)_{,2}; \\
L_{66} &= [k'D_{55}(\cdot)_{,11} + k'D_{44}(\cdot)_{,22} - A_{33} - I_3(\ddot{\cdot})]. \\
b_1 &= -q_1 + A_{11}^t T_{1,1} + B_{11}^t T_{2,1} / h; \quad b_2 = -q_2 + A_{22}^t T_{1,2} + B_{22}^t T_{2,2} / h; \\
b_3 &= q_3 + (k_1 A_{11}^t + k_2 A_{22}^t) T_1 + (k_1 B_{11}^t + k_2 B_{22}^t) T_2 / h; \\
b_4 &= -m_1 + B_{11}^t T_{1,1} + D_{11}^t T_{2,1} / h; \\
b_5 &= -m_2 + B_{22}^t T_{1,2} + D_{22}^t T_{2,2} / h; \quad b_6 = m_3 + A_{33}^t T_1 + B_{33}^t T_2 / h.
\end{aligned}$$

Тут і далі позначення взяті з праці [3].

Інтегральні характеристики температури T_1, T_2 , що входять у вільні члени системи (1), визначають з відповідних рівнянь теплопровідності для розглядуваних оболонок. За лінійного розподілу температури по товщині стінки ці рівняння запишемо для однакових умов теплообміну на поверхнях $z = \pm h$:

$$\begin{aligned}
P_{(1)}^2 T_1 + P_{(2)}^2 T_2 + 2k_0 \lambda_{33}^{(1)} T_2 / h - C^{(1)} \dot{T}_1 - C^{(2)} \dot{T}_2 - (T_1 - t_1^c) \varepsilon_1^t &= -W_1^t, \\
P_{(2)}^2 T_1 + P_{(3)}^2 T_2 - \lambda_{33}^{(1)} T_2 / h^2 + 2k_0 \lambda_{33}^{(2)} T_2 / h - C^{(2)} \dot{T}_1 - C^{(3)} \dot{T}_2 - T_2 \varepsilon_1^t &= -W_2^t. \quad (2)
\end{aligned}$$

Для однозначності розв'язку систем рівнянь руху (1) і теплопровідності (2) задамо такі граничні умови: на краях $x_1 = 0$ і $x_1 = a_1$

$$u_2 = u_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = N_{11} = M_{11} = 0, \quad (3)$$

$$T_1 = T_2 = 0; \quad (4)$$

на краях $x_2 = 0$ і $x_2 = a_2$

$$u_1 = u_3 = \gamma_1 = \gamma_3 = N_{22} = M_{22} = 0, \quad (5)$$

$$T_1 = T_2 = 0. \quad (6)$$

Початкові умови беремо однорідними. Починаючи з часу $\tau > 0$, оболонка нагрівається плоским джерелом тепла, яке є функція координат і часу $w^t(x_1, x_2, z, \tau) = w_*^t(x_1, x_2) w_t(\tau)$. Поверхні $z = \pm h$ омиваються середовищем з нульовою температурою $t_c^\pm = 0$. Поверхневі сили відсутні.

Система рівнянь (1) разом з граничними (3), (5) і початковими умовами складає крайову задачу динамічної теорії температурних напружень для шаруватих ортогонально армованих анізотропних пологих оболонок двоякої кривини у переміщеннях. За відомими переміщеннями деформації середньої поверхні визначаємо з геометричних співвідношень, а зусилля і моменти – з рівнянь пружності. Температурні напруження в оболонці знаходимо за формулами Дюамеля–Неймана. В різних часткових випадках ця система спрощується. Якщо покласти $k_1 = k_2 = 0$, то система (1) описуватиме динамічну поведінку неоднорідної по товщині анізотропної пластинки, а система (2) – розподіл в ній температурного поля.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь теплопровідності (2) відповідно до температурних граничних умов (4), (6) і нульових початкових знаходимо методом скінченних перетворень Фур'є за координатами x_1, x_2 і інтегрального перетворення Лапласа за часом τ . В результаті для трансформант T_{1mn}, T_{2mn} знаходимо:

$$T_{1mn} = \frac{2h^3}{\lambda_{33}^{(1)}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^2 \frac{G_j Q_{mn}}{p_j - p_k} \int_0^{\tau'} w_t(v) e^{-p_j(\tau'-v)} dv, \quad (7)$$

$$T_{2mn} = \frac{2h^3}{\lambda_{33}^{(1)}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^2 \frac{H_j Q_{mn}}{p_j - p_k} \int_0^{\tau'} w_t(v) e^{-p_j(\tau'-v)} dv. \quad (8)$$

Тут

$$p_j = \frac{g_1 + g_4}{2} + (-1)^j \sqrt{\frac{(g_1 - g_4)^2}{4} + g_2 g_3}; \quad G_j = p_j - g_4; \quad H_j = g_3 \quad (j = 1, 2);$$

$$g_1 = \frac{\lambda_{11}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \mu_m^2 + \frac{\lambda_{22}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \beta_n^2 + \text{Bi}; \quad g_3 = 3 \left(\frac{\lambda_{11}^{(2)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \mu_m^2 + \frac{\lambda_{22}^{(21)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \beta_n^2 \right); \quad g_2 = g_3/3 - 2k_0 h;$$

$$\tau' = \frac{\lambda_{33}^{(1)} \tau}{C^{(1)} h^2}; \quad g_4 = 3 \left(\frac{\lambda_{11}^{(3)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \mu_m^2 + \frac{\lambda_{22}^{(3)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \beta_n^2 + \text{Bi} + 1 \right); \quad \mu_m = \frac{\pi m h}{a_1}; \quad \beta_n = \frac{\pi n h}{a_2}; \quad \text{Bi} = \frac{2\alpha_z^+ h^2}{\lambda_{33}^{(1)}}.$$

Коефіцієнти Фур'є для функції джерел тепла визначають за формулою

$$Q_{mn} = \frac{4}{a_1 a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} w_*^t(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2} dx_1 dx_2.$$

Якщо джерела з потужністю w_i^* рівномірно розподілені по прямокутній області $2d_1 \times 2d_2$ з центром у точці x_1^0, x_2^0 , то $w_*^t(x_1, x_2) = w_i^* N(x_1) N(x_2)$, де $N(x_i) = S_-(x_i - x_i^0 + d_i) - S_+(x_i - x_i^0 - d_i)$ ($i = 1, 2$); $S_\pm(x)$ – одиничні асиметричні функції. Тоді

$$Q_{mn} = \frac{16w_t^*}{m\pi^2} \sin \frac{\pi m x_1^0}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2^0}{a_2} \sin \frac{\pi m a_1^0}{a_1} \sin \frac{\pi n a_2^0}{a_2}. \quad (9)$$

У граничних випадках з (9) можна одержати відповідні вирази для інших способів розподілу джерел по поверхні оболонки.

Розв'язок системи рівнянь руху (1), який задовольняє механічні граничні умови (3), (5) і нульові початкові за відомого температурного поля (7), (8), знаходимо також методом скінчених інтегральних перетворень Фур'є за координатами x_1, x_2 і інтегрального перетворення Лапласа за часом τ . Тоді, наприклад, для функції прогину можемо записати вираз

$$u_3(x_1, x_2, \tau) = \sum_m \sum_n \sum_{i=1}^6 \frac{B^2 \sin \frac{\pi m x_1}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2}{a_2}}{\omega_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^6 (\omega_k^2 - \omega_i^2)} \int_0^{\tau'} [\mathcal{Q}_3(\omega_i) T_{1mn}(v) + \mathcal{Q}_3^*(\omega_i) T_{2mn}(v)] \times \\ \times \sin B^2 \omega_i (\tau' - v) dv, \quad (10)$$

де ω_i – безрозмірні власні частоти; $\mathcal{Q}_3(\omega_i)$, $\mathcal{Q}_3^*(\omega_i)$ – відомі многочлени

відносно цих частот; $B^4 = \frac{E_1 h^4 c_\epsilon^2}{\rho \lambda_{33}^2 a_2^2}$ – параметр інерції [3], роль якого в тому,

що коли $B \rightarrow \infty$, інерційні сили стають дуже малими і, в результаті, розв'язок наближається до квазістатичного; коли $B \rightarrow 0$, інерційні сили стають переважальними і утримують оболонку від прогину.

Аналіз числових результатів та висновки. Числові дослідження виконували для прямокутної в плані циліндричної оболонки, що нагрівається лінійним джерелом тепла вздовж дуги $x_1 = a_1/2$ з довжиною $2d_2$ і центром в точці $x_2 = a_2/2$, потужність якого раптово збільшується до значення w_t^* , залишаючись надалі сталою $w_t(\tau) = w_t^* S_+(\tau)$. При цьому розглядали оболонки таких типів: антисиметрична двошарова ($0^\circ/90^\circ$), симетрична тришарова ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) і однорідна (нескінченна кількість шарів). За матеріал кожного шару оболонки взято армований волокнами графітоепоксидний композит з такими ефективними фізико-механічними властивостями [4]: $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{23} = 0,25$; $E_2 = E_3 = 0,025E_1$; $\alpha_{33}^t = \alpha_{22}^t = 15\alpha_{11}^t$; $G_{23} = 0,2E_3$; $G_{12} = G_{13} = 0,5E_3$; $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0,5\lambda_{11}$. Тут індексом 1 позначено властивості матеріалу вздовж волокон, а індексами 2, 3 – перпендикулярно. Під час обчислень брали такі значення геометричних параметрів: $a_1/a_2 = 1$, $d_2/a_2 = 0,25$, $x_1^0/a_1 = x_2^0/a_2 = 0,5$, $h/a_1 = 0,05$, а також значення коефіцієнта Біо $Bi = 1$ і коефіцієнта зсуву $k' = 5/6$.

Обчислено максимальні значення безрозмірних середньої температури $T_1' = \lambda_{33} T_1 / (h^2 w_t^*)$, прогинів $w' = u_3 \lambda_{33} / (Rh^2 \alpha_{11}^t w_t^*)$, нормальних зусиль $\{N_1', N_2'\} = 100 \{N_{11}, N_{22}\} \lambda_{33} / (h^3 \alpha_{11}^t E_1 w_t^*)$ і згинних моментів $\{M_1', M_2'\} = 100 \{M_{11}, M_{22}\} \lambda_{33} / (h^4 \alpha_{11}^t E_1 w_t^*)$ залежно від безрозмірної координати $x_2' = x_2/a_2$ у межах зміни від середини джерела нагріву $x_2' = 0,5$ до краю оболонки $x_2' = 1$ (рис. 1–6). Штрихпунктирні лінії відповідають дво-

шаровій оболонці ($0^\circ/90^\circ$), штрихові – тришаровій ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$), а суцільні – однорідній (нескінченна кількість шарів).

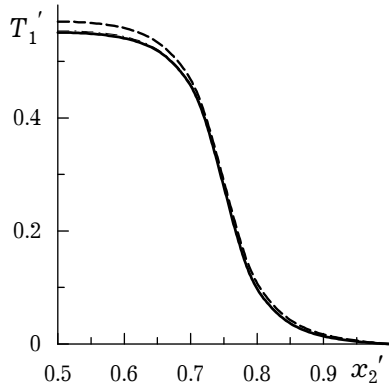


Рис. 1.

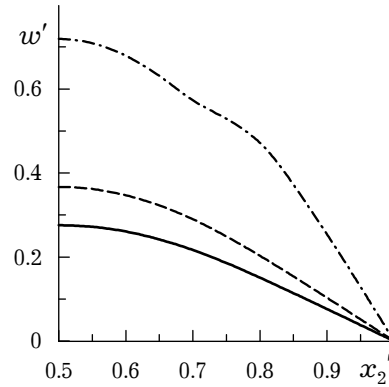


Рис. 2.

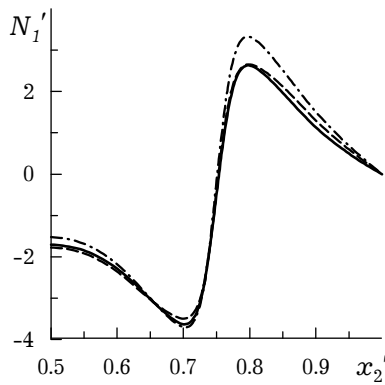


Рис. 3.

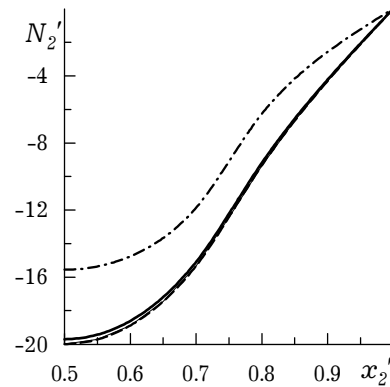


Рис. 4.

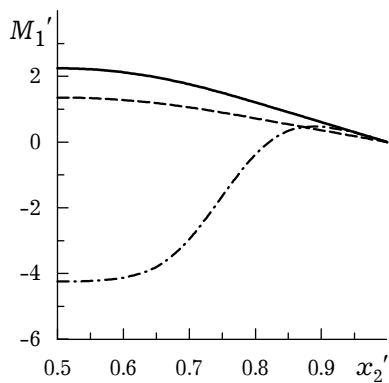


Рис. 5.

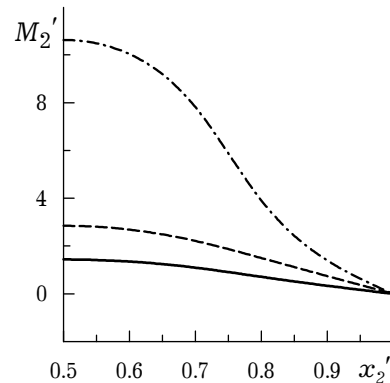


Рис. 6.

Із аналізу числових результатів і рисунків видно, що через неоднорідність матеріалу напружено-деформований стан може змінюватись не лише кількісно (наприклад, для w' , N_1' , N_2' , M_2'), але й якісно (наприклад, для M_1'). Середня температура і прогини найбільші в центрі зони нагріву, а потім плавно зменшуються до нуля в напрямку координати x_2 . Монотонно змінюються залежно від координати x_2 також зусилля N_2' і згинні моменти M_1' , M_2' . Нормальне зусилля N_1' має коливний характер, причому мак-

симальні стискувальні і розтягувальні значення досягаються в примежовій зоні між нагрітою і ненагрітою областями. Зі збільшенням кількості шарів максимальний прогин зменшується, тобто збільшується ефективна жорсткість оболонки. Найбільша відмінність між однорідною і неоднорідною оболонками спостерігається для згинного моменту M_2' . Його значення в центрі зони нагріву для двошарової оболонки більше, ніж у сім разів перевищує відповідне для однорідної.

1. Василенко А. Т., Голуб Г. П., Григоренко Я. М. К определению температурных напряжений в слоистых анизотропных оболочках по уточненной теории // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 4. – С. 327–330.
2. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анизотропних оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.
3. Жидик У. В. Динамічна задача термопружності для неоднорідної анизотропної пологої оболонки // Машинознавство. – 2008. – № 4 (130). – С. 15–21.
4. Композиционные материалы: Справ. / Под ред. В. В. Васильева. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
5. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
6. Подстригач Я. С., Швець Р. Н., Флячок В. М. Термомеханика анизотропных оболочек // Науч.-техн. прогресс в машиностроении. – 1990. – Вып. 23. – С. 3–18.
7. Шевченко В. П., Гольцев А. С. Термоупругий изгиб локально нагретых ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 3. – С. 80–85.
8. Ding H. J., Wang H. V., Chen W. Q. A solution of a non-homogeneous orthotropic cylindrical shell for axisymmetric plane strain dynamic thermoelastic problems // J. Sound and Vibr. – 2003. – 263, № 3. – P. 815–829.
9. Keene F.W., Hetnarsky R. B. Bibliography on thermal stresses in shells // J. Therm. Stresses. – 1990. – 13, № 4. – P. 341–531.
10. Shirakawa K. Dynamic response of on orthotropic cylindrical shell to rapid heating // J. Sound and Vibr. – 1982. – 83, № 1 – P. 27–35.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ЛОКАЛЬНО НАГРЕТОЙ СЛОИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

Для неоднородных анизотропных пологих оболочек двоякой кривизны записаны нестационарные уравнения теплопроводности и термоупругости с соответствующими краевыми условиями. Методами интегральных преобразований Фурье и Лапласа найдено решение нестационарной задачи теплопроводности и динамической задачи термоупругости для конечной шарнирно опертой ортогонально армированной цилиндрической оболочки при локальном нагреве. Числовые результаты приведены для графитэпоксидного композита.

THERMOELASTIC STATE OF LOCAL HEATED LAMINATED ANISOTROPIC DOUBLY CURVED SHALLOW SHELL

For heterogeneous anisotropic doubly shallow shells the nonstationary equations heat conduction and thermoelasticity with appropriate boundary conditions are written down. By the integral Fourier and Laplace transformations the solution to nonstationary problem heat conduction and dynamic thermoelastic problem for finite freely supported cylindrical shell cross-ply laminates under local heating is obtained. Numerical results for graphite-epoxy composites are given.

Нац. ун-т “Львівська політехніка”, Львів;
 Ін-т прикл. проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;
 Українська академія друкарства, Львів

Одержано
 14.10.10