УДК 539.3

Н. М. Івасько

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ЖОРСТКО, ГЛАДКО АБО ГНУЧКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО НЕЇ СТРІЧКОВІЙ ОБЛАСТІ

За дії джерела тепла побудовано функції Гріна задач стаціонарної теплопровідності й термопружності за плоскої деформації півбезмежного тіла з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура. При цьому використано логарифмічний потенціал простого шару для розв'язання задачі теплопровідності, а для задачі термопружності – термопружний потенціал переміщень у безмежному тілі із дзеркально розташованими до межі півпростору джерелом і стоком тепла. Для задоволення крайових умов на межі тіла побудовано функції Буссінеска. Наведено вирази для температури, переміщень і напружень, за допомогою яких визначено термопружний стан півпростору за тепловиділення у паралельній до межі стрічковій області, коли в ній задані джерела тепла сталої інтенсивності.

Під час розв'язування двовимірних задач стаціонарної теплопровідності й термопружності для півпростору зі стрічковими тонкими включеннями (тріщинами) в основному застосовують метод теорії функцій комплексної змінної (комплексного потенціалу температурного поля і комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі) [2, 7, 8], що дає можливість зводити їх до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші, та метод інтегральних перетворень Фур'є, за допомогою якого розв'язані [9, 11] задачі термопружності для півплощини з періодичною системою тріщин.

З використанням логарифмічного потенціалу простого шару, який є уявною частиною інтеграла типу Коші, термопружного потенціалу переміщень і функції напружень Ері розв'язані двовимірні задачі стаціонарної теплопровідності й термопружності за плоскої деформації півбезмежного тіла з вільною від навантажень межею за тепловиділення у паралельній до неї стрічковій області [3] або з перпендикулярною до межі теплоактивною тріщиною [1].

Для задоволення крайових умов на межі побудовано функції Буссінеска та визначено термопружний стан в праці [10], зумовлений джерелом тепла у півпросторі з вільною або жорстко закріпленою межею, у [4] – для плоскої деформації півбезмежного тіла з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у перпендикулярній до неї стрічковій області, а в [3] – під час тепловиділення у паралельній до вільної від навантажень межі стрічковій області.

Нижче визначено двовимірне стаціонарне температурне поле і зумовлену ним плоску деформацію тіла з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї стрічковій області за нульової температури на межі. Під час формулювання задачі теплопровідності постулювали наявність джерел тепла на місці тепловиділення, густину яких за заданої температури визначили з інтегрального рівняння з логарифмічним ядром, яке розв'язано наближено шляхом заміни регулярного ядра виродженим з використанням поліномів Чебишева першого роду. Для знаходження термонапруженого стану побудовано термопружний потенціал переміщень і функції Буссінеска.

Задача теплопровідності. Розглянемо півбезмежне ізотропне тіло за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області L шириною $2l$ (рис. 1). У декартовій системі координат xOy визначимо спочатку розподіл температури у півплощині $y \geq 0$, якщо в точці $x = \xi$, $y = h$ знаходиться джерело тепла сталої інтенсивності w. Для забезпечення нульової температури на межі $y = 0$ доповнимо півплощину до повної площини і в точці $x = \xi$, $y = -h$ помістимо стік тепла такої ж інтенсивності. Тоді [3]

$$T(x,y) = W \ln \frac{r_2}{r_1}, \; W = \frac{w}{2\pi\lambda}, \tag{1}$$

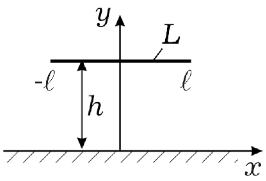

Рис. 1.

де $r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-h)^2}$; $r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+h)^2}$; λ – коефіцієнт теплопровідності.

Нехай в області L задано джерела тепла інтенсивності $w(\xi)$. Тоді в системі координат з початком у її центрі маємо:

$$T(x,y) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}} w(\xi) \ln \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+2h)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} d\xi. \tag{2}$$

Якщо в області L задано температуру $T(x)$, то для визначення потужності теплових джерел $w(\xi)$ із (2), коли $y = 0$, одержимо інтегральне рівняння в безрозмірних величинах (віднесених до $\mathbf{l}$):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} w(\xi) \left(\ln \frac{1}{|x-\xi|} + Q(x-\xi) \right) d\xi = \frac{2\lambda}{\mathbf{l}} T(x), \qquad |x| < 1, \tag{3}$$

де $Q(x-\xi) = \frac{1}{2} \ln((x-\xi)^2 + 4d^2)$, $d = \frac{h}{\mathbf{l}}$.

Рівняння (3) можна розв'язати наближено, якщо різницеве регулярне ядро $Q(x-\xi)$ замінити виродженим. Для цього при $|x-\xi| < 2d$ розкладемо його в ряд Тейлора [3].

Для побудови розв'язку рівняння (3) подамо потужність теплових джерел, температуру в області тепловиділення і різницеве регулярне ядро $Q(x-\xi)$ у вигляді розвинення за поліномами Чебишева першого роду $T_k(x)$:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x), \; T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x). \tag{4}$$

Якщо у розкладі ядра $Q(x-\xi)$ обмежитися двома членами, то

$$Q(x-\xi) = \left(\frac{x-\xi}{2d} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{2d} \right)^4 = D \sum_{m=0}^{4} Q_m(x) T_m(\xi), \tag{5}$$

де $D = \frac{1}{64d^4}$; $Q_m(x) = \sum_{p=0}^{4} Q_{mp} T_p(x)$; $Q_4(x) = -\frac{1}{8} T_0(x)$; $Q_3(x) = T_1(x)$;

$Q_2(x) = -\frac{3}{2} T_2(x) - 2\left(1 - 2d^2\right) T_0(x)$; $Q_1(x) = T_3(x) + 2\left(3 - 8d^2\right) T_1(x)$;

$Q_0(x) = -\frac{1}{8} T_4(x) + 2\left(2d^2 - 1\right) T_2(x) + \left(8d^2 + \frac{\ln 2d}{D} - \frac{9}{4} \right) T_0(x)$.

Підставивши (4) і (5) у (3) та використавши спектральне співвідношення [6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{1}{|x-\xi|} d\xi = \mu_k T_k(x), \; \mu_0 = \ln 2, \; \mu_k = \frac{1}{k} \; (k \geq 1), \; |x| < 1$$

і співвідношення ортогональності поліномів Чебишева, отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\mu_k T_k(x) + D \sum_{p=0}^{4} \tilde{Q}_{kp} T_p(x) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k T_k(x)\,, \tag{6}$$

де $\tilde{Q}_{0p} = Q_{0p}$, $\tilde{Q}_{kp} = \frac{1}{2} Q_{kp}$ $(k \ge 1)$, $\tilde{a}_k = \frac{2\lambda}{\ell} a_k$.

Рівність (6) помножимо на $\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, проінтегруємо за змінною x на інтервалі $(-1,1)$ і знову використаємо співвідношення ортогональності поліномів Чебишева. В результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$b_n \mu_n + D \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tilde{Q}_{kn} = \tilde{a}_n\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,,$$

з розв'язку якої знаходимо коефіцієнти b_k.

Задача термопружності. Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми:

$$u(x,y) = \bar{u}(x,y) + \bar{\bar{u}}(x,y)\,, \quad \sigma(x,y) = \bar{\sigma}(x,y) + \bar{\bar{\sigma}}(x,y)\,, \tag{7}$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно осі Ox джерелами і стоками тепла, а другі – переміщення і напруження у півплощині $y \ge 0$, які забезпечують виконання умов

$$u_x(x,0) = 0\,, \ u_y(x,0) = 0 \ \text{ – за жорстко закріпленої межі,} \tag{8}$$

$$u_y(x,0) = 0\,, \ \sigma_{xy}(x,0) = 0 \ \text{ – за гладко закріпленої межі,} \tag{9}$$

$$u_x(x,0) = 0\,, \ \sigma_{yy}(x,0) = 0 \ \text{ – за гнучко закріпленої межі.} \tag{10}$$

Для визначення напружено-деформованого стану безмежного тіла використовуємо термопружний потенціал переміщень (який є розв'язком рівняння Пуассона $\Delta\Psi(x,y) = mT(x,y)$). З (2) знайдемо:

$$\Psi(x,y) = \frac{mW}{4}\left[r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1 - 4hy \right]. \tag{11}$$

Тоді напруження і переміщення [3]

$$\bar{\sigma}_{xx}(x,y) = -Gm\left[T(x,y) - W(x-\xi)^2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right],$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x,y) = -Gm\left[T(x,y) + W(x-\xi)^2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right],$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x,y) = GmW(x-\xi)\left[\frac{y+h}{r_2^2} - \frac{y-h}{r_1^2} \right],$$

$$\bar{u}_x(x,y) = \frac{m}{2}(x-\xi)\,T(x,y)\,, \quad \bar{u}_y(x,y) = \frac{m}{2}\left[yT(x,y) + Wh(\ln r_2 r_1 - 1) \right], \tag{12}$$

де $m = (1+\nu)\alpha/(1-\nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення; G – модуль зсуву.

У результаті з (12) на межі, якщо $y = 0$, маємо:

$$\bar{\sigma}_{xx}(x,0)=0\,,\ \bar{\sigma}_{yy}(x,0)=0\,,\ \bar{\sigma}_{xy}(x,0)=2GmWh\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+h^2}\,,$$

$$\bar{u}_x(x,0)=0\,,\ \bar{u}_y(x,0)=\frac{mWh}{2}\left[\ln\left((x-\xi)^2+h^2\right)-1\right]. \qquad (13)$$

Як видно з (13), крайові умови (10) повністю задовольняються. Отже, одержано розв'язок задачі термопружності для півбезмежного тіла, межа якого закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_x=0$, $\sigma_{yy}=0$).

Для задоволення крайових умов (8), (9) використаємо функцію Буссінеска $\Phi(x,y)$, яку подамо як суму двох гармонічних функцій $\Phi(x,y)=$ $=\varphi(x,y)+x\psi(x,y)$. Тоді [5]

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}-4(1-\nu)\psi\,,\ \bar{\bar{u}}_y(x,y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y)=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2(2-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\ \bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y)=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-2\nu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y)=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \qquad (14)$$

Згідно з результатами праць [4] і [10], врахувавши крайові умови (8) і (9), побудуємо функції Буссінеска та знайдемо переміщення і напруження для жорстко і гладко закріпленої межі.

Жорстко закріплена межа. Тут

$$\varphi(x,y)=0\,,$$

$$\psi(x,y)=\frac{mWh}{3-4\nu}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right). \qquad (15)$$

Підставивши (15) у (14), знайдемо переміщення і напруження:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y)=\frac{mWh}{3-4\nu}y\frac{x-\xi}{r_2^2}\,,\quad \bar{\bar{u}}_y(x,y)=\frac{mWh}{3-4\nu}\left[\frac{y(y+h)}{r_2^2}-(3-4\nu)\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y)=\frac{2GmWh}{3-4\nu}\frac{2y(y+h)^2-\left(y+2\nu(y+h)\right)r_2^2}{r_2^4}\,,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y)=\frac{2GmWh}{3-4\nu}\frac{\left(y-2(1-\nu)(y+h)\right)r_2^2-2y(y+h)^2}{r_2^4}\,,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y)=-\frac{2GmWh}{3-4\nu}(x-\xi)\frac{2y(y+h)+(1-2\nu)r_2^2}{r_2^4}\,. \qquad (16)$$

У результаті з (16) на межі, якщо $y=0$, маємо:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,0)=0\,,\ \bar{\bar{u}}_y(x,0)=-\frac{mWh}{2}\left[\ln\left((x-\xi)^2+h^2\right)-1\right]. \qquad (17)$$

Як видно з (13) і (17), крайові умови (8) виконуються.

Гладко закріплена межа. Тут

$$\varphi(x,y)=-mWh\left[(y+h)\left(\ln r_2-\frac{3-2\nu}{4(1-\nu)}\right)-(x-\xi)\cdot\mathrm{arctg}\frac{x-\xi}{y+h}\right],$$

$$\psi(x,y)=-\frac{mWh}{4(1-\nu)}\,. \qquad (18)$$

Підставивши (18) у (14), знайдемо переміщення і напруження:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y) = mWh \cdot \operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h}, \quad \bar{\bar{u}}_y(x,y) = -mWh\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y) = -\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y) = 2GmWh\frac{y+h}{r_2^2}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y) = -2GmWh\frac{x-\xi}{r_2^2}. \quad (19)$$

У результаті з (19) на межі, якщо $y = 0$, маємо:

$$\bar{\bar{u}}_y(x,0) = -\frac{mWh}{2}\left[\ln\left((x-\xi)^2 + h^2\right) - 1\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,0) = -2GmWh\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + h^2}. \quad (20)$$

Як видно з (13) і (20), крайові умови (9) виконуються.

Співвідношення (1), (12), (16) і (19) є відповідними функціями Гріна, які можна використати для визначення термопружного стану, зумовленого нагрівом тіла джерелами тепла, розподіленими по певній області.

Якщо в області тепловиділення задано джерела тепла інтенсивності $w(\xi)$, то у системі координат з початком у центрі області L температуру тіла знаходимо з (2), а переміщення і напруження – за формулами [5]

$$u_i^*(x) = \int_{-1}^{1} w(\xi)\, u_i(x,h,\xi)\, d\xi, \quad \sigma_{ij}^*(x) = \int_{-1}^{1} w(\xi)\, \sigma_{ij}(x,h,\xi)\, d\xi. \quad (21)$$

Результати числових досліджень. Нехай в області L задані джерела тепла сталої інтенсивності $w(x) = w_0$, тоді з (2), (7), (12), (16) і (19), обчисливши інтеграли в (21), отримаємо аналітичні вирази для визначення температури, переміщень і напружень в області тепловиділення

$$\tilde{T}^*(x) = 2d \cdot \theta(x,d) + (x+1)\ln\frac{\sqrt{(x+1)^2 + 4d^2}}{|x+1|} - (x-1)\ln\frac{\sqrt{(x-1)^2 + 4d^2}}{|x-1|},$$

за жорстко закріпленої межі:

$$\tilde{u}_x^*(x) = \frac{1}{4}\left[P(x,d) + 8d^2\frac{1-\nu}{3-4\nu} \cdot L(x,d)\right], \quad \tilde{u}_y^*(x) = d^2\frac{1}{3-4\nu} \cdot \theta(x,d),$$

$$\tilde{\sigma}_{xx}^*(x) = -\tilde{T}^*(x) + \frac{2d}{3-4\nu}\left[d \cdot H(x,d) - (3-2\nu) \cdot \theta(x,d)\right],$$

$$\tilde{\sigma}_{yy}^*(x) = \tilde{\sigma}_{xx}^*(x) + \frac{4d}{3-4\nu}\left[-d \cdot H(x,d) + 2(1-\nu) \cdot \theta(x,d)\right],$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}^*(x) = \frac{2d}{3-4\nu}\left[2d^2\left(\frac{1}{(x+1)^2 + 4d^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4d^2}\right) + (1-\nu) \cdot L(x,d)\right];$$

гладко закріпленої межі:

$$\tilde{u}_x^*(x) = \frac{1}{4}\left[4d\left((x+1)\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2d} - (x-1)\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2d}\right) + P(x,d) - 2d^2 \cdot L(x,d)\right],$$

$$\tilde{u}_y^*(x) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{xx}^*(x) = \tilde{\sigma}_{yy}^*(x) = -\tilde{T}^*(x), \quad \tilde{\sigma}_{xy}^*(x) = 0;$$

і гнучко закріпленої межі:

$$\tilde{u}_x^*(x) = \frac{1}{4}\left[P(x,d) + 2d^2 \cdot L(x,d)\right],$$

$$\tilde{u}_y^*(x) = d\left[\tilde{T}^*(x) + (x+1)\ln|x+1| - (x-1)\ln|x-1| - 3\right],$$

$$\tilde\sigma^*_{xx}(x) = -\tilde T^*(x) - 2d\cdot\theta(x,d)\,,\quad \tilde\sigma^*_{yy}(x) = \tilde\sigma^*_{xx}(x) + 4d\cdot\theta(x,d)\,,$$

$$\tilde\sigma^*_{xy}(x) = d\cdot L(x,d)\,,$$

де

$$\tilde T^*(x) = \frac{2\pi\lambda}{\mathbf{l} w_0}T^*(x)\,,\quad \tilde u^*_i(x) = \frac{2\pi\lambda}{m\mathbf{l}^2 w_0}u^*_i(x)\,,\quad \tilde\sigma^*_{ij}(x) = \frac{2\pi\lambda}{mG\mathbf{l}w_0}\sigma^*_{ij}(x)\,,$$

$$\theta(x,d) = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2d} - \operatorname{arctg}\frac{x-1}{2d}\,,\quad L(x,d) = \ln\frac{(x+1)^2+4d^2}{(x-1)^2+4d^2}\,,$$

$$P(x,d) = (x+1)^2\ln\frac{\sqrt{(x+1)^2+4d^2}}{|x+1|} - (x-1)^2\ln\frac{\sqrt{(x-1)^2+4d^2}}{|x-1|}\,,$$

$$H(x,d) = \frac{x+1}{(x+1)^2+4d^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+4d^2}\,.$$

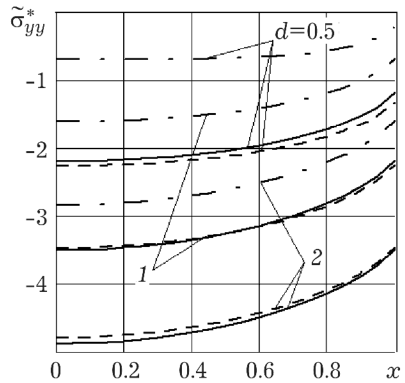

Рис. 2.

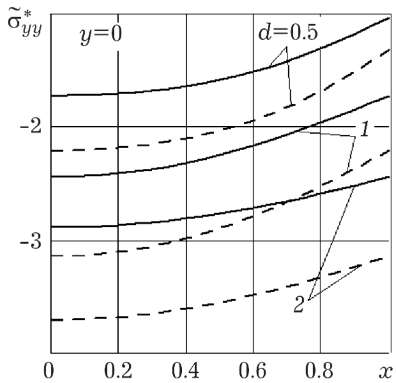

Рис. 3.

На рис. 2–5 наведено розподіл нормальних напружень в області тепловиділення, в її центрі та на межі тіла. Суцільними лініями зображено значення величин, коли межа тіла закріплена жорстко, штриховими – гладко, а штрихпунктирними – гнучко.

Розподіл нормальних напружень $\tilde\sigma^*_{yy}(x)$ в області тепловиділення $(0 < x < 1)$ та на межі тіла $(y = 0)$ наведено на рис. 2 і 3 відповідно за віддалення області тепловиділення від межі $(d = h / \mathbf{l} = 0.5, 1.0, 2.0)$. На межі тіла, коли вона гнучко закріплена, $\tilde\sigma^*_{yy}(x) = 0$, тому на рис. 3 ці напруження не наведені. З віддаленням від межі тіла нормальні напруження зростають.

На рис. 4 і 5 подано розподіл нормальних напружень у центрі області тепловиділення $(x = 0)$. Коли межа тіла закріплена гладко, то $\tilde\sigma^*_{xx}(x) = \tilde\sigma^*_{yy}(x) = -\tilde T^*(x)$. Як видно з цих рисунків, для жорстко закріпленої межі напруження $|\tilde\sigma^*_{xx}(0)|$ перевищують температуру, а напруження $|\tilde\sigma^*_{yy}(0)|$ дуже близькі до її значення. Для гнучко закріпленої межі напруження $|\tilde\sigma^*_{xx}(0)|$ є більші за температуру, а $|\tilde\sigma^*_{yy}(0)|$ – менші. Якщо ж межа вільна від навантажень, то згідно з [3] напруження $|\tilde\sigma^*_{xx}(0)|$ і $|\tilde\sigma^*_{yy}(0)|$ є менші, ніж температура.

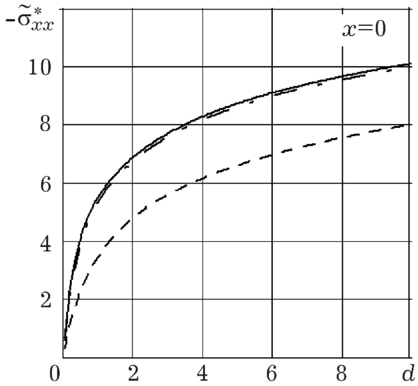

Рис. 4.

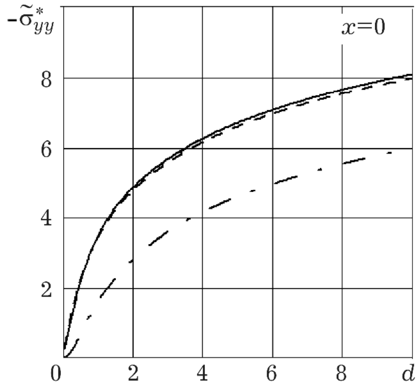

Рис. 5.

Отже, з віддаленням від межі тіла температура підвищується і, відповідно, зростають нормальні напруження. Для обмеженості температури необхідно, щоб сумарна потужність теплових джерел дорівнювала нулю.

Висновки. Отримано замкнутий розв'язок двовимірної задачі термопружності для півбезмежного тіла, що нагрівається стаціонарним джерелом тепла, із жорстко, гладко і гнучко закріпленою межею за нульової температури на ній. Співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна, використано для визначення термопружного стану, зумовленого нагрівом тіла джерелами тепла, розподіленими по паралельній до межі стрічковій області.

Наведені формули описують також напружений стан чверть простору $x \ge 0$, $y \ge 0$, межа $x = 0$ якого за парної функції $w(x)$ теплоізольована і гладко закріплена ($u_x = 0$, $\sigma_{xy} = 0$), а за непарної – гнучко закріплена ($u_y = 0$, $\sigma_{xx} = 0$) за нульової температури на ній.

Розв'язок наведеної задачі теплопровідності можна використати під час дослідження напруженого стану півпростору за поздовжнього зсуву та розв'язування задач електростатики для півпростору із нульовим електричним потенціалом на межі [3].

1. *Кит Г. С., Ивасько Н. М.* Плоская деформация полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 30–37.
2. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
3. *Кіт Г. С., Івасько Н. М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 3. – С. 147–155.
4. *Кіт Г. С., Івасько Н. М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у перпендикулярній до неї стрічковій області // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2017. – № 3. – С. 83–86.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
   То же: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962. – xii+628 p.
6. *Попов Г. Я., Реут В. В., Моісеєв М. Г., Вайсфельд Н. Д.* Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів: Навч. пос. – Одеса: Астропринт, 2010. – 116 с.
7. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
8. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.

9. *Feng Y., Jin Z.* Thermal fracture of functionally graded plate with parallel surface cracks // Acta Mech. Solida Sinica. – 2009. – 22, № 5. – P. 453–464.
10. *Min-zhong W., Ke-fu H.* Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity // Appl. Math. Mech. – 1991. – 12, № 9. – P. 849–862.
11. *Yildirim B., Kutlu Ö., Kadioğlu S.* Periodic crack problem for a functionally graded half-plane an analytic solution // Int. J. Solids Struct. – 2011. – 48, № 21. – P. 3020–3031.

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКО, ГЛАДКО ИЛИ ГИБКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ К НЕЙ ЛЕНТОЧНОЙ ОБЛАСТИ

При воздействии источника тепла построены функции Грина задач стационарной теплопроводности и термоупругости при плоской деформации полубесконечного тела с жестко, гладко или гибко закрепленной границей, на которой поддерживается нулевая температура. При этом использован логарифмический потенциал простого слоя для решения задачи теплопроводности, а для задачи термоупругости – термоупругий потенциал перемещений в бесконечном теле с зеркально расположенными относительно границы полупространства источником и стоком тепла. Для удовлетворения краевых условий на границе тела построены функции Буссинеска. Приведены выражения для температуры, перемещений и напряжений, с помощью которых определено термоупругое состояние полупространства при тепловыделении в параллельной к границе ленточной области при заданных в ней источниках тепла постоянной интенсивности.

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A HALF-SPACE WITH A RIGIDLY, SMOOTHLY OR FLEXIBLY CLAMPED BOUNDARY WITH HEAT RELEASE ON A PARALLEL TO IT RIBBON-LIKE DOMAIN

Under the influence of a heat source, the Green's functions of the problems of stationary heat conductivity and thermoelasticity are constructed for plane deformation of a semi-infinite body with a rigidly, smoothly or flexibly clamped boundary on which zero temperature is maintained. In this case, the logarithmic potential of a simple layer is used to solve the heat conduction problem, and the thermoelastic displacement potential in an infinite body with a heat source and sink that are mirror-like relative to the boundary of the half-space is used to solve the thermoelasticity problem. To satisfy the boundary conditions on the boundary of the body the Boussinesq's functions are constructed. Expressions are given for the temperature, displacements and stresses by means of which the thermoelastic state of the half-space is determined upon heat release in a parallel to the boundary ribbon-like domain under given in it the heat sources of constant intensity.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 01.10.17