УДК 539.3

О. М. Вовк

ВИКОРИСТАННЯ ЧИСЛОВОГО ОБЕРНЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ

Побудовано розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для двох контактуючих термочутливих півпросторів зі сталими або миттєвими тепловиділеннями на межі дотику з використанням числового обернення перетворення Лапласа та досліджено його ефективність.

Вступ. Інтегральні перетворення часто застосовують для розв'язання різноманітних задач механіки, електротехніки, гідродинаміки, радіотехніки тощо, оскільки дають можливість спростити вихідну задачу і доволі легко отримати розв'язок задачі на трансформанту. Найбільш повну інформацію про інтегральні перетворення та їх застосування можна знайти в працях [11, 13]. Інтегральні перетворення і їх розвиток залишаються актуальними і в сучасних дослідженнях. Під час розв'язування задач за їх допомогою найскладніше знайти оригінал за одержаним зображенням. Якщо не вдається застосувати класичні методи обернення, користуються наближеними числовими.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні розроблено і продовжують удосконалювати досить багато наближених методів обернення. Зокрема, цій проблемі присвячені праці [10], де пропонують здійснювати обернення перетворення Лапласа за допомогою рядів Лагерра або побудови спеціальних квадратурних формул, описано [1] метод числового обернення перетворення Лапласа на основі згортки вихідного зображення зі зображенням допоміжного фінітного нескінченно диференційованого оригіналу. Дуже поширене числове обернення на основі рядів Фур'є так званої формули Пруднікова [3, 4]. Його практичне застосування і розвиток описано в працях [5, 6, 12, 14, 15], де розв'язано низку нових задач термопружності, досліджено питання поліпшення збіжності рядів Фур'є та запропоновано уточнені формули для визначення оберненого перетворення Лапласа.

Мета дослідження – апробація числового обернення перетворення Лапласа на основі рядів Фур'є в нестаціонарних задачах теплопровідності для контактуючих термочутливих тіл з тепловиділеннями.

Раніше вивчали розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для двох термочутливих півпросторів за припущення простої нелінійності їх матеріалів і за умов сталих або миттєвих тепловиділень [8], а також за відсутності будь-яких обмежень на характер зміни теплофізичних характеристик матеріалів за джерел тепла, що діють миттєво [2] або впродовж певного проміжку часу [9]. Тут порівняли розв'язок, отриманий у праці [8] за сталих або миттєвих тепловиділень, з розв'язком відповідної задачі, в якій обернення перетворення Лапласа здійснено числово. На основі цього оцінили ефективність числового обернення перетворення Лапласа до розв'язування нестаціонарних задач теплопровідності контактуючих термочутливих тіл з простою нелінійністю.

Формулювання задачі теплопровідності. Нестаціонарна задача теплопровідності для двох ідеально контактуючих термочутливих півпросторів з миттєвими тепловиділеннями інтенсивності q_0 на межі дотику має вигляд [8]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial z}\right)=c_v^{(i)}(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial \tau}\,,\quad \begin{cases} i=1,\ z>0\\ i=2,\ z<0\end{cases}; \tag{1}$$

$$t_i\big|_{\tau=0}=t_p \tag{2}$$

ISSN 1810-3022. **Прикл. проблеми мех. і мат.** – 2017. – **Вип.** 15. – **С.** 124–131.

$$\left.\frac{\partial t_i}{\partial z}\right|_{|z|\to\infty} = 0\,, \quad t_i\big|_{|z|\to\infty} = t_p \tag{3}$$

$$t_1\big|_{z=0} = t_2\big|_{z=0}\,, \quad \left[\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right]_{z=0} = q_j(\tau), j = 1,2\,, \tag{4}$$

де t_1, t_2 – температурні поля півпросторів; t_p – температура півпросторів у початковий момент часу; $q_1(\tau) = q_0 S_-(\tau)$ – за постійно діючого, а $q_2(\tau) = q_0\delta(\tau)$ – за миттєвого джерел тепла; $S_-(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \ge 0, \\ 0, \tau < 0, \end{cases}$ $\delta(\tau)$ – дельта-функція Дірака; $\lambda_t^{(i)}(t_i)$, $c_v^{(i)}(t_i)$ ($i = 1,2$) – залежні від шуканих температур коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів півпросторів відповідно. Вважаємо, що матеріали півпросторів володіють властивістю простої нелінійності, коли відношення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємних теплоємностей залежать від температури несуттєво, тому їх приймаємо сталими: $\lambda_t^{(i)}(t_i)/c_v^{(i)}(t_i) = a_0^{(i)} \approx \text{const}$.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності (1)–(4) **з використанням числового обернення Лапласа**. Побудова розв'язку охоплює такі кроки.

1. Зведення вихідної задачі до безрозмірного вигляду. Введення безрозмірних величин $T_i = t_i/t_0$, $\bar{z} = z/l_0$, де t_0 – відлікове значення температури, l_0 – характерний розмір (одиниця виміру довжини) і подання характеристик матеріалів півпросторів у вигляді $\chi(t) = \chi_0\chi^*(T)$, де величини з нулем мають відповідні розмірності, а співмножники з зірочкою описують залежність відповідної характеристики від безрозмірної температури.

2. Застосування до отриманої безрозмірної задачі інтегрального перетворення Кірхгофа.

3. Лінеаризація умови рівності температур у задачі на змінні Кірхгофа за допомогою лінеаризувального параметра κ [7].

4. Використання перетворення Лапласа за часом $\text{Fo} = \dfrac{a_0^{(1)}\tau}{l_0^2}$ для розв'язання лінійної задачі на змінні Кірхгофа.

Розв'язок такої задачі має вигляд [8]

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{(1+\kappa)\tilde{q}_i}{\sqrt{s}(K_\lambda\sqrt{K_a}+1+\kappa)}e^{-\bar{z}\sqrt{s}}\,,\ \bar{z} > 0\,; \quad \tilde{\theta}_2 = \frac{\tilde{q}_i}{\sqrt{s}(K_\lambda\sqrt{K_a}+1+\kappa)}e^{-|\bar{z}|\sqrt{sK_a}}\,,\ \bar{z} < 0\,,$$

де $\tilde{q}_1 = \dfrac{\text{Ki}}{s}$, $\tilde{q}_2 = \text{Ki}$, $\text{Ki} = \dfrac{q_0 l_0}{\lambda_{t0}^{(1)} t_0}$, s – параметр перетворення Лапласа.

5. Застосування формули числового обернення [3, 6]

$$\theta_i(\text{Fo}, \bar{z}, \kappa) = \frac{1}{l}\exp(c\text{Fo}/l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{\theta}_i(s_n, \bar{z}, \kappa)\exp(2\pi n i \text{Fo}/l) - R\,, \tag{5}$$

де $s_n = (c + 2\pi n i)/l$, c – стала, за допомогою якої можна оптимізувати збіжність розв'язку ($\text{Re}(c) > 0$); l – така стала, що $\theta_i(\text{Fo}) \approx \theta_i(l)$, якщо $\text{Fo} > l$;

$$R = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-nc)\, f(\text{Fo} + nl)\,. \tag{6}$$

Якщо відоме асимптотичне значення оригіналу (значення температури за $\text{Fo} \to \infty$), то величину R можна врахувати [5, 6]. При цьому значення параметра c може бути довільним ($c > 0$).

На практиці часто асимптотичне значення оригіналу невідоме або знайти його складно. Тоді величину R можна не враховувати, вибравши достатньо великим значення параметра c ($c > 4$). При цьому значення суми ряду Фур'є необхідно визначати з заданою точністю, оскільки перед сумою стоїть множник $\exp(c\mathrm{Fo} / l)$. Аналітичний вигляд трансформант в розглянутій задачі дає можливість контролювати точність під час сумування рядів.

6. Визначення температури за оберненим перетворенням Кірхгофа. За лінійних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури формули для обчислення розподілів температур півпросторів мають вигляд

$$T_i\left(\mathrm{Fo}, \bar{z}, \kappa\right) = k_i^{-1}\left(\sqrt{1 + 2k_i\theta_i(\mathrm{Fo}, \bar{z}, \kappa)} - 1\right) + T_p \text{, де } k_i = \mathrm{const}.$$

7. Знаходження лінеаризувального параметра κ. Для цього використали метод Ньютона:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - \frac{F(\mathrm{Fo}, 0, \kappa_n)}{F'(\mathrm{Fo}, 0, \kappa_n)},\ n = 1, 2, \ldots \text{, доки } \left|\kappa_{n+1} - \kappa_n\right| < \varepsilon,$$

де $F(\mathrm{Fo}, 0, \kappa_n) = T_1(\mathrm{Fo}, 0, \kappa_n) - T_2(\mathrm{Fo}, 0, \kappa_n)$, $\kappa_0 = 0$, ε – задана точність.

Числові дослідження. Їх виконали для півпросторів, виготовлених з окису цирконію ($\bar{z} > 0$) та титанового сплаву ($\bar{z} < 0$) з фізико-механічними характеристиками, температурні залежності яких змінюються за відповідними законами у діапазоні температур 300...1100 K [16] за сталих або миттєвих тепловиділень на межі контакту. Подання фізико-механічних характеристик у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію від безрозмірної температури $\chi(t) = \chi_0\chi^*(T)$ наведені в праці [8].

За відлікову t_0 брали максимальну температуру з проміжку зміни характеристик 1100 K, а початкову t_p вважали рівною 300 K. Результати досліджень, виконані для безрозмірних величин, наведено в табл. 1–5 (за сталого джерела тепла) та 6–10 (за миттєвого), де T_1, T_2 – точні, а T_1^{nab}, T_2^{nab} – наближені значення температурних полів.

Таблиця 1

$\bar{z}$	T_1	T_1^{nab}
0.0	0.42529759	0.42546475
0.5	0.36758292	0.36807856
1.0	0.32722840	0.32760134
1.5	0.30150482	0.30179533
2.0	0.28668931	0.28687966
2.5	0.27896604	0.27909628
3.0	0.27535343	0.27543873
3.5	0.27383968	0.27389193

Таблиця 2

$\bar{z}$	T_2	T_2^{nab}
0.0	0.42529759	0.42546478
-0.5	0.39165643	0.39217913
-1.0	0.36237168	0.36283216
-1.5	0.33787683	0.33829871
-2.0	0.31830701	0.31866762
-2.5	0.30336234	0.30368358
-3.0	0.29250404	0.29279238
-3.5	0.28505996	0.28525674

У табл. 1 і 2 подано залежності температурних полів півпросторів від координати, обчислені за значень параметрів $l = 2$, $c = 6$, у момент часу $\mathrm{Fo} = 1.0$ за дії сталого джерело тепла потужністю $\mathrm{Ki} = 0.5$. Максимальна розбіжність між точними та наближеними значеннями температурних полів не перевищувала 0,12%.

Таблиця 3

Fo	T_1	T_1^{nab}	T_2	T_2^{nab}
0.1	0.32722840	0.32758397	0.36237168	0.36279106
0.15	0.35318801	0.35349667	0.39287451	0.39322987
0.2	0.37553015	0.37589777	0.41792411	0.41831154
0.25	0.39521551	0.39548525	0.43940896	0.43975991
0.3	0.41288611	0.41327864	0.45835322	0.45872572
0.35	0.42897367	0.42919633	0.47538021	0.47573656
0.4	0.44378081	0.44422668	0.49090037	0.49125513
0.45	0.45752802	0.45767984	0.50519991	0.50557917
0.5	0.47038117	0.47091365	0.51848727	0.51880276

У табл. 3 наведені залежності температурних полів півпросторів від часу, обчислені за значень параметрів $l = 2$, $c = 6$ та координат $\bar{z} = 1.0$ для першого півпростору та $\bar{z} = -1.0$ – для другого. Тут максимальна розбіжність становила 0,12%.

Таблиця 4

l	$T_1 = 0.32723$ T_1^{nab} $(c = 6)$	$T_2 = 0.36237$ T_2^{nab} $(c = 6)$	$T_1 = 0.32723$ T_1^{nab} $(c = 7)$	$T_2 = 0.36237$ T_2^{nab} $(c = 7)$
2	0.32723707	0.36245736	0.32725847	0.36239240
3	0.32730585	0.36256403	0.32725680	0.36244300
4	0.32737863	0.36265504	0.32727605	0.36248052
5	0.32747555	0.36273167	0.32733172	0.36250681
6	0.32753167	0.36280310	0.32734153	0.36253202
7	0.32761061	0.36287746	0.32738215	0.36256453
8	0.32766834	0.36293286	0.32740077	0.36257836
9	0.32769689	0.36297768	0.32738954	0.36258370
10	0.32778814	0.36307919	0.32745016	0.36265340
11	0.32779735	0.36307922	0.32742178	0.36261374

Табл. 4 ілюструє вплив параметра l з проміжку $[2.0, 11.0]$ за фіксованих значень параметра $c = 6$ або 7 на точність наближених значень температур у точках $\bar{z} = \pm 1.0$ відповідно в момент часу $\mathrm{Fo} = 1.0$ (максимальна похибка 0,17%).

Таблиця 5

c	$T_1 = 0.32723004$ T_1^{nab}	$T_2 = 0.36237374$ T_2^{nab}
2	0.34422833	0.38725510
3	0.33238599	0.37015533
4	0.32900715	0.36507815
5	0.32787615	0.36334968
6	0.32747555	0.36273167
7	0.32733172	0.36250681
8	0.32728121	0.36242455
9	0.32726523	0.36239448

Результати, наведені в табл. 5, демонструють вплив на точність наближених розв'язків параметра c з проміжку $[2.0, 9.0]$, коли $l = 5.$, $\mathrm{Fo} = 1.0$, $\bar{z} = \pm 1.0$ відповідно (максимальна похибка 5%). Виявили, що за значень $c \geq 5$ знайдена наближена температура є практично точною. Однак тут необхідно визначати суму ряду Фур'є з високою точністю, оскільки зі збільшенням цього параметра експоненціально зростає множник перед сумою $\exp(c\mathrm{Fo} / l)$. Якщо $c < 5$, похибки обчислення суми ряду Фур'є менше впливають на результати розрахунків, однак, можуть зрости похибки визначення температури через нехтування залишковим членом. Достатню для практики точність дає числова формула обернення перетворення Лапласа за значень параметра c з проміжку $[3; 5]$.

У табл. 6 і 7 подані залежності температурних полів півпросторів від координати, обчислені за значень параметрів $l = 2.4$, $c = 3$ у момент часу $\mathrm{Fo} = 0.001$, за дії миттєвого джерела потужністю $\mathrm{Ki} = 0.15$. Максимальна розбіжність між точними та наближеними значеннями температурних полів не перевищувала 0,14%.

Таблиця 6

$\bar{z}$	T_1	T_1^{nab}
0.0	0.80864698	0.80787772
0.01	0.79584330	0.79691714
0.02	0.75918490	0.75987566
0.03	0.70356554	0.70331365
0.04	0.63599223	0.63811451
0.05	0.56418300	0.56659716
0.06	0.49515277	0.49494687
0.07	0.43414140	0.43736345
0.08	0.38410836	0.38480401
0.09	0.34581923	0.34276241
0.1	0.31836578	0.31907171

Таблиця 7

$\bar{z}$	T_2	T_2^{nab}
0.0	0.80864817	0.80792892
-0.01	0.80502999	0.80544734
-0.02	0.79429728	0.79455382
-0.03	0.77680850	0.77755481
-0.04	0.75314325	0.75378627
-0.05	0.72407669	0.72532827
-0.06	0.69054556	0.68988615
-0.07	0.65360838	0.65267414
-0.08	0.61440134	0.61488670
-0.09	0.57409149	0.57248098
-0.1	0.53382951	0.53528649

Таблиця 8

Fo	T_1	T_1^{nab}	T_2	T_2^{nab}
0.001	0.79584330	0.79691714	0.80502999	0.80544734
0.003	0.62290233	0.62375742	0.62491173	0.62527740
0.005	0.55925047	0.55952209	0.56022686	0.56085265
0.007	0.52275288	0.52330506	0.52335709	0.52393848
0.009	0.49811283	0.49876335	0.49853411	0.49907675
0.011	0.47995418	0.48047054	0.48026970	0.48091707
0.013	0.46581352	0.46648741	0.46606132	0.46668473
0.015	0.45437503	0.45508081	0.45457640	0.45518422
0.017	0.44486097	0.44545093	0.44502893	0.44570121
0.019	0.43677729	0.43742597	0.43692014	0.43757540
0.02	0.43316379	0.43375060	0.43329632	0.43396184

У табл. 8 подані залежності температурних полів півпросторів від часу, обчислені за тих же значень параметрів l та c, у точках $\bar{z} = 0.01$ для першого півпростору та $\bar{z} = -0.01$ – для другого. Тут максимальні відносні похибки розрахунків за наближеними формулами не перевищували 0,15%.

Таблиця 9

l	$T_1 = 0.795843$ T_1^{nab} $(c = 3)$	$T_2 = 0.805023$ T_2^{nab} $(c = 3)$	$T_1 = 0.7958433$ T_1^{nab} $(c = 3.5)$	$T_2 = 0.80503$ T_2^{nab} $(c = 3.5)$
1.0	0.79743022	0.78810787	0.79715836	0.80536169
1.2	0.79584044	0.80585366	0.79558957	0.78809738
1.4	0.75819218	0.80580515	0.79559094	0.80558878
1.6	0.79741436	0.80546749	0.79721057	0.80526125
1.8	0.79613799	0.78816837	0.79594105	0.80547464
2.0	0.75977892	0.78789210	0.79730463	0.78770232
2.2	0.79594153	0.80565953	0.75813854	0.78797376
2.4	0.79691714	0.80544734	0.79675484	0.80528051
2.6	0.79648012	0.80551147	0.79633433	0.80534673
2.8	0.79637009	0.78802061	0.75857788	0.78786004
3.0	0.79507256	0.78824669	0.79492182	0.78809214

Табл. 9 ілюструє вплив параметра l з проміжку $[1.0, 3.0]$ за фіксованих значень параметра $c = 3$ або 3.5 на точність наближених значень температур у точках $\bar{z} = \pm 0.01$ відповідно в момент часу $\mathrm{Fo} = 0.001$. Максимальна розбіжність не перевищувала 2%.

Таблиця 10

c	$T_1 = 0.79584330$ T_1^{nab}	$T_2 = 0.80502999$ T_2^{nab}
3.0	0.79691714	0.80544734
3.1	0.79687661	0.80540633
3.2	0.79684412	0.80536908
3.3	0.79680848	0.80533624
3.4	0.79677600	0.80530745
3.5	0.79675484	0.80528051
3.6	0.79672879	0.80525672
3.7	0.79670978	0.80523592
3.8	0.79669112	0.80521613
3.9	0.79667491	0.78769332
4.0	0.79666191	0.78767520

Результати в табл. 10 демонструють вплив на точність наближених розв'язків значення параметра c з проміжку $[3.0, 4.0]$, коли $l = 2.4$, $\mathrm{Fo} = 0.001$, $\bar{z} = \pm 0.01$ відповідно. Максимальна розбіжність 2,2%. За вибору невеликих значень параметра c похибки обчислень температури виявились дещо істотнішими, що пояснюють нехтуванням величиною R, оскільки множник $\exp(-c)$, який входить у співвідношення (6), у цих випадках дещо більший (змінюється в межах $0,02 \div 0,05$).

Отже (табл. 4; 5 та 9; 10), вибором параметрів l, c можна суттєво коригувати точність результатів. За сталого джерела тепла ряди Фур'є швидко збігалися і для досягнення точності числових результатів до трьох знаків після коми достатньо 25 членів ряду, тоді як за миттєво діючого джерела доводилось брати понад 100000 членів ряду.

Висновки. На прикладі задачі теплопровідності для контактуючих термочутливих півпросторів за дії на межі дотику сталого або миттєвого джерел тепла апробовано числове обернення перетворення Лапласа зі застосуванням рядів Фур'є. Для цього на основі отриманих з використанням точного та числового обернення перетворення Лапласа розв'язків порівняно значення температури залежно від часу, координати та вибору параметрів l і c.

Аналіз числових результатів засвідчив ефективність числового обернення перетворення Лапласа в нестаціонарній контактній задачі теплопровідності для двох термочутливих півпросторів зі сталими або миттєвими тепловиділеннями на межі дотику. При цьому за сталих нагрівів ряди Фур'є виявились швидкозбіжними, а за миттєвих для підсумовування рядів доцільні методи поліпшення їх збіжності.

1. *Андрейченко Д. К.* Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. выч. математики и мат. физики. – 2000. – 40, № 7. – С. 1030–1044.
2. *Вовк О.* Термопружний стан термочутливих півпросторів за дії миттєвого джерела тепла на межі контакту // Волинськ. мат. вісник. Сер.: Прикл. математика. – 2014. – Вип. 11(20). – С. 34–44.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1975. – 408 с.
4. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965. – 466 с.
5. *Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я.* Визначення нестаціонарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 37, № 2. – С. 18–26.

   Те саме: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of Nonstationary Temperatures with the Help of Improved Formulas of the Inverse Laplace Transformation // Materials Science. – 2002. – 38, No. 2. – P. 172–184.
6. *Максимович В. Н., Соляр Т. Я.* Уточненные формулы для определения обратного преобразования Лапласа и их применение в задачах теплопроводности // Инж. физ. журн. – 2002. – 75, № 3. – С.102–103.

   Те саме: *Maksimovich V. N., Solyar T. Ya.* Refined formulas for determination of the inverse Laplace transform using Fourier series and their use in problems of heat conduction // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2002. – 75, No. 3. – P. 648–650.
7. *Моделювання* та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
8. *Попович В., Вовк О.* Дослідження термопружного стану контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику // Вісник Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2014. – № 2 (74). – С. 38–47.
9. *Попович В. С., Вовк О. М.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику впродовж певного часу // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2015. – Спецвип. – С. 213–218.
10. *Рябов В. М.* Численное обращение преобразования Лапласа. – С.-Петербург: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2013. – 188 с., ISBN 978-5-288-05465-5 .
11. *Debnah L.* Integral Transforms and Their Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1995. – 456 p.
12. *Kushnir R. M., Solyar T. Ya.* A Numerical-Analytical Approach to the Analysis of Non-Stationary Temperature Fields in Multiply-Connected Solids // Mech., Mat. Sc. & Eng. – 2016. – № 3. – P. 90–106, DOI 10.13140/RG.2.1.1167.0165.

13. *Sneddon I. N.* The use of integral transforms. – New York: McGraw-Hill Book Comp., 1972. – 540 p.
14. *Solyar T.,* Ways to Improve Fourier series Convergence and its Application for Laplace Numerical Inversion // Sc. J. of the Ternopil National Technical University. – 2016. – 81, № 1. – P. 136–144.
15. *Solyar T. Ya.* Improvement of Fourier series convergence on the basis of splines and its application for numerical inversion of Laplace transform // Mech., Mat. Sc. & Eng. – 2016. – № 5. – P. 188–203, DOI 10.13140/RG.2.1.4069.2727.
16. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R. and Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Thermal Stresses. – 1996. – 19, Issue 1. – P. 77–102.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТЕЛ

Построено решение нестационарной задачи теплопроводности для двух контактирующих термочувствительных полупространств с постоянными или мгновенными тепловыделениями на границе соприкосновения с использованием численного обращения преобразования Лапласа и исследована его эффективность.

USING NUMERICAL INVERSE OF LAPLACE TRANSFORM TO HEAT CONDUCTIVE PROBLEMS OF CONTACTING THERMOSENSITIVE BODIES

A solution of the nonstationary heat conduction problem for two contacting thermosensitive half-spaces with constant or instant heat releases on the contact boundary using the numerical inverse of the Laplace transform was constructed and the its efficiency was researched.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.09.17