

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У БАГАТОЗВ'ЯЗНІЙ АНІЗОТРОПНІЙ ПІВПЛОЩИНІ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

*Записано інтегральні рівняння для багатозв'язних анізотропних півплощин з використанням розв'язку типу Гріна. Розроблено підхід для розв'язування інтегральних рівнянь методом механічних квадратур для системи отворів. Проілюстровано простоту та точність підходу під час дослідження високої концентрації напружень біля отвору, близького до межі півплощини (додатково використано асимптотичний метод), а також під час розрахунку напружень з контрольованою точністю для систем отворів.*

**Вступ.** Метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР) широко використовують для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) ізотропних і анізотропних пластин з отворами та тріщинами [1–4, 7, 10–13].

Простота алгоритмів, розроблених на основі МГІР для ізотропних матеріалів, зумовила їх широке застосування як для безпосереднього розрахунку напружень, так і для розв'язування неklasичних задач. Зокрема, в останні роки для ізотропних матеріалів, створено підхід, за яким вдається розраховувати високу концентрацію напружень. Для його реалізації необхідно з високою точністю обчислювати швидкозмінні напруження та додатково застосовувати асимптотичні методи [12].

Інтегральні рівняння для анізотропних пластин є значно складнішими, ніж для ізотропних матеріалів. У працях [1, 10] встановлено елементарні взаємозалежності між потенціалами Лехніцького та напруженнями і переміщеннями, на основі яких з використанням теореми Коші записані в простому вигляді інтегральні рівняння для анізотропних пластин з отворами. Розв'язування багатьох практично важливих задач відомими алгоритмами, які ґрунтуються на МГІР, часто ускладнюється. Зокрема, під час розгляду півнескінчених пластин, отворів, розміщених близько до межі пластини, тощо. Тому в літературі для ізотропних пластин будують модифіковані інтегральні рівняння на основі розв'язків типу Гріна, за яких умови на вибраній межі пластини задовольняються тотожно. Так досліджували також плоскі задачі теорії пружності для деяких форм анізотропних пластин [7, 10, 12]. Нижче наведено підхід до побудови таких рівнянь для анізотропної півплощини з отворами.

Ефективність і простоту розробленого числового алгоритму проілюстровано під час побудови точних формул для визначення високої концентрації напружень біля близького до межі півплощини отвору та напружень біля системи отворів.

**Постава задачі.** Розглянемо композитну пластину із зовнішньою прямолінійною межею  $L_0$ , яка послаблена системою отворів з межами  $L_1, \dots, L_J$ .

Віднесемо пластину до декартової системи координат  $Ox_1y_1$ . Вважати-мемо, що вона перебуває під дією зусиль  $(X_L, Y_L)$ , що прикладені до її меж, причому  $X_L = X_L(x, y)$ ,  $Y_L = Y_L(x, y)$  – задані функції, якщо  $(x, y) \in L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Позначимо область, яку займає пластина, через  $D$ .

**Основні співвідношення.** Використовуватимемо комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi(z_1)$ ,  $\Psi(z_2)$ , де  $z_j = x + s_j y$ ,  $s_j$ ,  $j = 1, 2$  – корені з додатною уявною частиною характеристичного рівняння  $\Delta(s) = 0$  [9], де

$$\Delta(s) = \alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22}, \quad (1)$$

$\alpha_{ij}$  – пружні сталі [9].

Розглянемо довільний замкнений контур  $\Gamma$ , який належить області  $D$ , що займає пластина, а також підобласть  $D_\Gamma$  (внутрішню або зовнішню), яка прилягає до контуру  $\Gamma$ . У цій підобласті на контурі  $\Gamma$  вектори напружень  $(X, Y)$  і переміщень  $(u, v)$  визначають за формулами [1, 9]

$$\begin{aligned} Y &= -2 \operatorname{Re} [\Phi(z_1) z_1' + \Psi(z_2) z_2'] , \\ X &= 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi(z_1) z_1' + s_2 \Psi(z_2) z_2'] , \\ u' &= 2 \operatorname{Re} [\rho_1 \Phi(z_1) z_1' + \rho_2 \Psi(z_2) z_2'] , \\ v' &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi(z_1) z_1' + q_2 \Psi(z_2) z_2'] , \end{aligned} \quad (2)$$

де  $u' = du/ds$ ,  $v' = dv/ds$ ,  $\rho_j = \alpha_{11}s_j^2 - \alpha_{16}s_j + \alpha_{12}$ ,  $q_j = \alpha_{12}s_j - \alpha_{26} + \alpha_{22}/s_j$ ,  $z_j' = dx/ds + s_j dy/ds$ ,  $ds$  – диференціал дуги на  $\Gamma$ .

Вибрали обхід уздовж контуру  $\Gamma$ , за якого підобласть  $D_\Gamma$  залишається зліва. Далі введемо в розгляд вектор напружень  $q_\Gamma(z) = X + iY$  на кривій  $\Gamma$ , який з використанням співвідношень (2) визначимо за формулою

$$q_\Gamma = (s_1 - i) z_1' \Phi(z_1) + (\overline{s_1 - i}) \overline{z_1'} \overline{\Phi(z_1)} + (s_2 - i) z_2' \Psi(z_2) + (\overline{s_2 - i}) \overline{z_2'} \overline{\Psi(z_2)}. \quad (3)$$

Приймемо, що відомими є вектори  $(X, Y)$  і  $(u, v)$  на кривій  $\Gamma$ . Тоді зі співвідношень (2) на  $\Gamma$  маємо [1, 10]:

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{-v' + s_1 u' + \rho_1 X + q_1 Y}{\Delta_1 z_1'} , \\ \Psi(z_2) &= \frac{-v' + s_2 u' + \rho_2 X + q_2 Y}{\Delta_2 z_2'} , \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\Delta_j = \Delta'(s_j)$ ,  $j = 1, 2$ .

**Інтегральні зображення розв'язку задачі на основі теореми Коші.** Спочатку розглянемо загальніший випадок, коли контур  $L_0$  є довільним і таким, що охоплює решту контурів  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Використовуючи співвідношення (4) на контурах  $L_j$  та теорему Коші для аналітичних функцій, отримаємо інтегральні зображення для потенціалів [10]:

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [u'(s) \Phi_1(z_1, t_1) + v'(s) \Phi_2(z_1, t_1)] ds + \Phi_\Delta(z_1) , \\ \Psi(z_2) &= \int_L [u'(s) \Psi_1(z_2, t_2) + v'(s) \Psi_2(z_2, t_2)] ds + \Psi_\Delta(z_2) , \end{aligned} \quad (5)$$

де  $s$  – дугова координата,  $ds = \sqrt{(\alpha\xi)^2 + (d\eta)^2}$ ,  $L = L_0 + L_1 + \dots + L_J$ ,  $t_k = \xi + s_k \eta$ ,  $k = 1, 2$  ( $\xi, \eta \in L$  (за цими змінними інтегруємо),  $u'(s), v'(s)$  – невідомі функції

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \frac{A_j}{t_1 - z_1} , \quad \Psi_j = \frac{B_j}{t_2 - z_2} , \quad j = 1, \dots, 4 , \\ A_1 &= -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1} , \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1} , \quad A_3 = -\frac{i\rho_1}{2\pi\Delta_1} , \quad A_4 = -\frac{iq_1}{2\pi\Delta_1} , \\ B_1 &= -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2} , \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2} , \quad B_3 = -\frac{i\rho_2}{2\pi\Delta_2} , \quad B_4 = -\frac{iq_2}{2\pi\Delta_2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\Delta}(z_1) &= \int_L [X_L \Phi_3(z_1, t_1) + Y_L \Phi_4(z_1, t_1)] ds, \\ \Psi_{\Delta}(z_1) &= \int_L [X_L \Psi_3(z_1, t_1) + Y_L \Psi_4(z_1, t_1)] ds.\end{aligned}\quad (6)$$

Тут і далі інтегруємо вздовж меж у напрямку, за якого область  $D$  залишається зліва.

**Інтегральні рівняння задачі.** Підставимо потенціали (5), (6) у формули (2) для визначення проєкцій вектора напружень на межі  $L$ . Використовуючи формулу Племеля–Сохоцького, отримаємо систему інтегральних рівнянь [10]

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}\left[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'\right] &= -Y_L(x, y), \\ 2\operatorname{Re}\left[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'\right] &= X_L(x, y), \quad (x, y) \in L,\end{aligned}\quad (7)$$

де  $\Phi, \Psi$  – потенціали (5), в яких інтеграли розглядають у сенсі головного значення за Коші.

Додавши до другого з рівнянь (7) перше, помножене на  $-i$ , отримаємо одне комплексне рівняння

$$\int_L [u'(s)Q_1(Z, T) + v'(s)Q_2(Z, T)] ds = Q_L(Z) - Q_{\Delta}(Z), \quad Z \in L, \quad (8)$$

де  $Q_j(Z, T)$ ,  $Q_{\Delta}(Z)$  – вектори напружень  $q_L$  у точці  $Z$  з координатами  $(x, y)$  на кривій  $L$ , які визначають за формулою (3) через відповідні комплексні потенціали  $(\Phi_j(z_1, t_1), \Psi_j(z_2, t_2))$ ,  $(\Phi_{\Delta}(z_1), \Psi_{\Delta}(z_2))$ ,  $T$  – точка з координатами  $(\xi, \eta)$ , за якою інтегрують і яка належить контуру  $L$ ,  $Q_L = X_L + iY_L$ .

Крім цього, для забезпечення однозначності переміщень необхідно на невідомі функції накласти умови

$$\int_{L_j} u' ds = 0, \quad \int_{L_j} v' ds = 0, \quad j = 0, \dots, N. \quad (9)$$

У праці [10] встановили, що невідомі функції  $u', v'$  на кожному з граничних контурів у поданні (5) визначені з точністю до доданків  $\mathcal{U} = -\omega_j dy / ds$ ,  $\mathcal{V} = \omega_j dx / ds$ , де  $\omega_j$  – довільні сталі  $j = 0, \dots, J$ . Зазначимо, що ці величини є похідними від переміщень, що виникають за повороту меж пластини як жорсткого цілого. Тобто інтегральні рівняння (8) при  $(x, y) \in L_j$  мають власні розв'язки  $\mathcal{U} = -\omega_j dy / ds$ ,  $\mathcal{V} = \omega_j dx / ds$ ,  $j = 0, \dots, J$ .

Числовий розв'язок інтегральних рівнянь за врахування власних розв'язків рівнянь (8) побудували, використовуючи метод механічних квадратур [1, 10].

**Модифіковане інтегральне зображення для півплощини.** Розглянемо випадок, коли пружна анізотропна пластинка займає півплощину  $y < 0$ , причому контур  $L_0$  є прямою ( $y = 0$ ). Інтегральні рівняння для такої пластини з отворами запишемо так, щоб умови на межі  $L_0$  виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi_j^D, \Psi_j^D$  ( $j=1-4$ ), які є розв'язком задачі теорії пружності для області  $D$  з вільною від навантаження межею  $L_0$  за умови, що ці функції в довільній точці пластини з координатами  $(x_0, y_0)$  мають такі особливості:

$$\Phi_j^D \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_j^D \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{20}},$$

де  $z_{10} = x_0 + s_1 y_0$ ,  $z_{20} = x_0 + s_2 y_0$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ .

Позначимо ці потенціали через  $\Phi_j^D(z_1, T)$ ,  $\Psi_j^D(z_2, T)$ , де  $T$  – точка з координатами  $(x_0, y_0)$ . Для їх побудови розглянемо півплощину  $y < 0$ , межа якої вільна від навантаження. Знайдемо потенціали Лехніцького  $\Phi_P(z_1)$ ,  $\Psi_P(z_2)$ , які в довільній внутрішній точці  $(x_0, y_0)$  мають особливості

$$\Phi_P(z_1) \sim \frac{A}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_P(z_2) \sim \frac{B}{z_2 - z_{20}},$$

за умови, що відповідні їм напруження, якщо  $y = 0$ , дорівнюють нулю. Тут  $A, B$  – довільні комплексні сталі. Розв'язок цієї задачі отримали раніше [1]:

$$\Phi_P(z_1) = \Phi_0(z_1) + \alpha_1 \overline{\Phi_0(z_1)} + \beta_1 \overline{\Psi_0(z_1)},$$

$$\Psi_P(z_2) = \Psi_0(z_2) + \alpha_2 \overline{\Phi_0(z_2)} + \beta_2 \overline{\Psi_0(z_2)}, \quad (10)$$

де

$$\Phi_0(z) = \frac{A}{z - z_{10}}, \quad \Psi_0(z) = \frac{B}{z - z_{20}},$$

$$\alpha_1 = \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\delta_1}, \quad \beta_1 = \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\delta_1},$$

$$\alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\delta_1}, \quad \beta_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_2}{\delta_1}, \quad \delta_1 = s_2 - s_1.$$

Введені допоміжні потенціали набудуть вигляду

$$\Phi_j^D = -\Phi_P|_{A=A_j, B=B_j},$$

$$\Psi_j^D = -\Psi_P|_{A=A_j, B=B_j}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (11)$$

Тоді загальний розв'язок задачі теорії пружності (потенціали Лехніцького) для півплощини з отворами буде [1]:

$$\Phi(z_1) = \int_L [\Phi_1^D(z_1, T) u'(s) + \Phi_2^D(z_1, T) v'(s)] ds + \Phi_D(z_1),$$

$$\Psi(z_2) = \int_L [\Psi_1^D(z_2, T) u'(s) + \Psi_2^D(z_2, T) v'(s)] ds + \Psi_D(z_2), \quad (12)$$

де  $\Phi_D(z_1) = \Phi_\Delta^D(z_1) + \Phi_\infty^D(z_1)$ ,  $\Psi_D(z_2) = \Psi_\Delta^D(z_2) + \Psi_\infty^D(z_2)$ ,  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$ .

Тут потенціали  $\Phi_\infty^D, \Psi_\infty^D$  – розв'язок задачі теорії пружності для суцільної півплощини з вільною від навантаження межею за дії прикладених до пластини на нескінченності зусиль:

$$\Phi_\Delta^D(z_1) = \int_L [X_L \Phi_3^D(z_1, T) + Y_L \Phi_4^D(z_1, T)] ds,$$

$$\Psi_\Delta^D(z_1) = \int_L [X_L \Psi_3^D(z_1, T) + Y_L \Psi_4^D(z_1, T)] ds. \quad (13)$$

За побудовою потенціали (12) тотожно задовольняють задані умови на межі  $L_0$  за довільних функцій  $u', v', X_L, Y_L$ .

Підставивши (12) у граничні умови на контурах  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , для знаходження функцій  $u', v'$  отримуємо інтегральні рівняння, що мають

вигляд (8) і в яких допоміжні потенціали  $\Phi_j(z_1, t_1)$ ,  $\Psi_j(z_2, t_2)$  замінені на  $\Phi_j^D(z_1, T)$ ,  $\Psi_j^D(z_2, T)$ .

**Напруження біля отворів різної форми в анізотропних пластинках.**

Розрахунки виконали для композитного матеріалу бор–епоксид, для якого відношення максимального і мінімального модулів Юнга дорівнює 9,86 [8].

**Системи отворів.** Розглянемо півплощину, яка послаблена круговими рівновіддаленими отворами радіуса  $R$ , центри яких віддалені від межі на  $2R$  за відстані між отворами  $R$ . Коефіцієнти концентрації напружень (ККН) для бор–епоксидної півплощини, коли жорсткість матеріалу максимальна в горизонтальному напрямку, за її розтягу зусиллями  $p$  в напрямку осі  $Ox$  для системи  $J$  отворів при  $J=1, 2, 3, 5, 9, 15, 29$  наведено для кожного з отворів крапками на рис. 1а. Через ці крапки проведено криві, біля яких вказано кількість отворів. Отвори пронумеровано (номери  $j$ ) так, що центральний має номер 0.

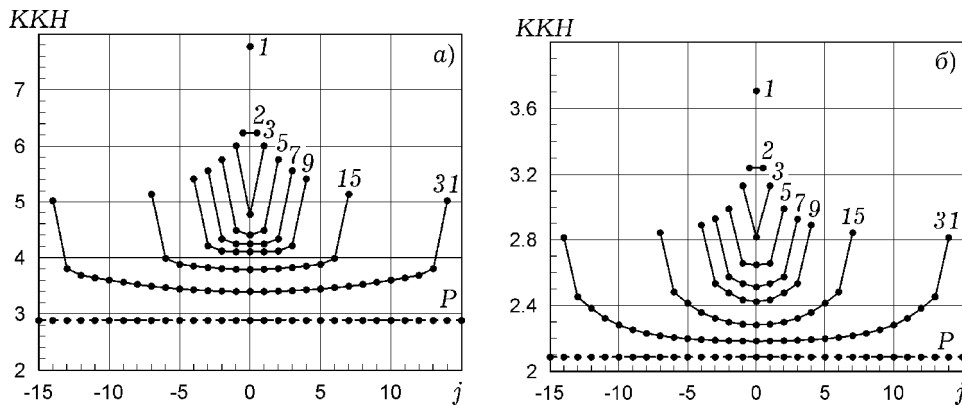


Рис. 1. ККН для системи отворів, матеріал бор–епоксид:  
 а – жорсткість максимальна в горизонтальному напрямку;  
 б – у вертикальному.

Як бачимо, максимальні значення ККН досягаються на крайніх отворах, а мінімальні – на центральних. Аналогічні результати, коли жорсткість матеріалу максимальна у вертикальному напрямку, подано на рис. 1б.

Виявили (рис. 1), що в цьому випадку ККН істотно зменшились.

Розраховували концентрацію напружень для нескінченної кількості отворів, які розміщені з періодом  $d = 3R$ . Позначимо координати центрів отворів через  $(kd, c)$ , де  $k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Тоді розв’язок задачі спрощується, оскільки напружений стан стає періодичним. Для такої задачі подані вище інтегральні зображення та рівняння визначали через введені функції  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$ , які тут мають вигляд

$$\Phi_0(z) = -A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z_{10} - nd) - z} = -\frac{A}{d} \cot \frac{z_{10} - z}{d},$$

$$\Psi_0(z) = -B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z_{20} - nd) - z} = -\frac{B}{d} \cot \frac{z_{20} - z}{d}, \quad j = 1, 4. \quad (14)$$

Розраховані відносні максимальні напруження для періодичної задачі наведено на рис. 1 (криві  $P$ ). Виявили, що ККН на центральних отворах зі збільшенням їх кількості наближаються до ККН у періодичній задачі.

Розглядали систему кругових отворів, центри яких розміщено на осі  $Oy$  в точках з координатами  $(0, -j3R + R)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Розраховані ККН біля кожного з отворів ( $J = 1, 2, 3, 5, 7, 9, 15, 29, 41$ ) для системи бор–епоксид за мак-

симальної жорсткості матеріалу у горизонтальному напрямку зображено на рис. 2.

За малої кількості отворів  $J < 10$  максимальні ККН виникають біля найближчого до межі отвору. Зі збільшенням отворів ( $J > 15$ ) – уже на отворах (2–4). Найменший ККН досягається на крайньому отворі, причому він монотонно зменшується зі збільшенням отворів і наближається до певного граничного значення, яке приблизно дорівнює 8,04.

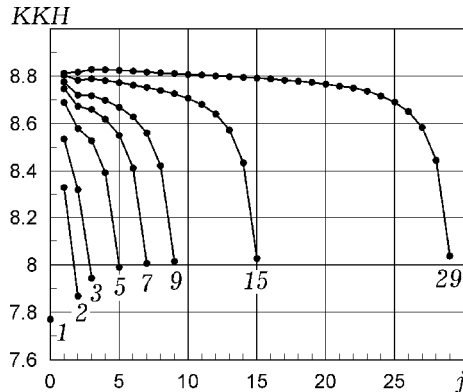


Рис. 2. ККН для системи отворів, центри в яких розміщено на осі  $Oy$ .

**Дослідження концентрації напружень для отвору, розміщеного близько біля межі в анізотропній півплощині.** Розглянемо півплощину  $y < 0$  з круговим отвором радіуса  $R$ , центр якого розміщений у точці  $(0, R + d)$ , за розтягу в напрямку осі  $Ox$  зусиллями  $p$ . Розрахунки виконано для ізотропного та анізотропного ЕФ матеріалів, в яких відношення максимального до мінімального модулів Юнга дорівнює 1,56. Приймали, що матеріал максимально жорсткий у вертикальному напрямку. Коли жорсткість максимальна в горизонтальному напрямку, додавали індекс «90».

За отворів, розміщених близько до межі, ККН зростають і можуть стати нескінченними [2, 6, 12]. Тому прямі числові методи дослідження напружень тут неефективні. Для кругового отвору для ізотропних матеріалів у праці [6] встановили, що максимальні напруження, якщо  $d \rightarrow 0$ , мають порядок  $\sigma_{\max} \sim C / \sqrt{d}$ , де  $C$  – стала. Прийmemo, що для анізотропних пластин  $\sigma_{\max} \sim C / d^m$ ,  $m$  – стала, яку необхідно визначити.

За малих відстаней  $d$  ККН описували функцією

$$\sigma_{\theta \max} = a_0 + a_1 \delta^m + a_2 \delta^{-m}, \quad (15)$$

де  $\delta = \delta / R$ ,  $a_0, a_1, a_2$  – сталі, які визначали методом найменших квадратів з умови, що розраховані МГП і за формулою (15), були близькими за значеннями.

Під час розрахунків МГП знаходили напруження з точністю, вищою 0,1%. З цією метою за малих відстаней вибирали до 5000 вузлових точок.

Знайдені методом найменших квадратів сталі такі:

$$m = 0,5; \quad a_1 = 2,8297; \quad a_2 = 2,83; \quad a_0 = -0,0154 \quad \text{– для ізотропного матеріалу};$$

$$m = 0,5081; \quad a_1 = 3,3393; \quad a_2 = 3,335; \quad a_0 = -1,368 \quad \text{– для матеріалу ЕФ};$$

$$m = 0,5037; \quad a_1 = 2,8603; \quad a_2 = 2,86; \quad a_0 = 0,0391 \quad \text{– для матеріалу ЕФ}_{90}.$$

Розраховані відносні напруження  $F = \delta^m \sigma_{\theta \max} / p$  для ізотропної пластини та пластини із матеріалу ЕФ залежно від величини  $\delta = d / R$  наве-

дені на рис. 3. Кружечками тут позначено відносні напруження, розраховані МГІР, кривими – знайдені за формулою (15).

Співвідношення (15) достатньо точно описують розподіл напружень, якщо  $0 < \delta < 0,01$ . За більших значень цього параметра для визначення відносних напружень  $\sigma = \sigma_{\theta \max} / \sigma_0$  використали наближену формулу  $\sigma = S(\delta)$ , де

$$S(\delta) = (C_0 + C_1\delta + C_2\delta^2 + C_3\delta^3) / \delta^m. \tag{16}$$

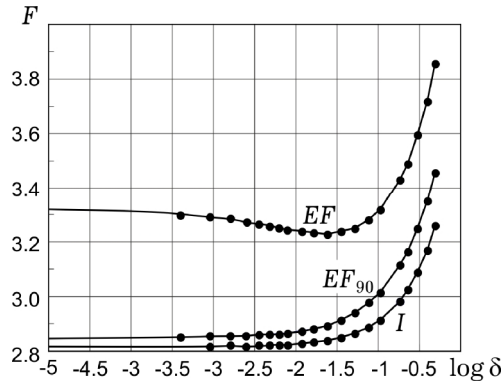


Рис. 3. Відносні максимальні напруження в півплощині з круговим отвором.

Знайдені методом найменших квадратів коефіцієнти в цій формулі для розглянутих вище випадків наведені в табл. 1.

Таблиця 1. Коефіцієнти формули (16)

Матеріал	$b/a$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Діапазон, $m$
Півплощина						
Ізотропія	1	2,784	1,153	-0,756	0,754	$0,0064 < \delta < 0,5$ $m=0,5$
EF	1	3,28	0,549	2,927	-3,209	$0,0064 < \delta < 0,5$ $m = 0,5$
EF <sub>90</sub>	1	2,866	1,65	-1,595	1,458	$0,0064 < \delta < 0,5$ $m = 0,504$

Перевіримо точність формули (16) для ізотропної півнескінченної пластини за її розтягу паралельно до межі. За відносних відстаней отвору від межі  $d/R = 0,185; 0,3370; 0,5430$  в праці [5] отримали такі значення ККН: 6,960; 5,387; 4,494. Відносні похибки ( $\gamma$  %) розраховані за формулою (16) для напружень у цьому випадку -0,5814, -0,3736, -0,1109.

У табл. 2 наведено значення відносних максимальних напружень, розрахованих МГІР та за формулою (16) за малих відстаней між межами отвору і півплощини для матеріалу EF.

Таблиця 2. Відносні значення максимальних напружень для EF та EF<sub>90</sub>

$d/R$	EF		EF <sub>90</sub>	
	МГІР	Ф-ла (16)	МГІР	Ф-ла (16)
1	2	3	4	5
0,01	33,75	34,09	29,27	29,36

Продовження табл. 2

1	2	3	4	5
0,1	10,711	10,826	9,625	9,627
0,2	7,846	7,885	7,068	7,075
0,3	6,642	6,676	5,972	5,975
0,4	5,958	5,993	5,341	5,339
0,5	5,512	5,525	4,925	4,927

З таблиці видно, що при  $d/R < 0,5$  формула (16) є практично точною.

**Висновки.** Записано модифіковані інтегральні рівняння задачі теорії пружності для багатозв'язної анізотропної півплощини у комплексному вигляді, які отримано з використанням встановлених взаємозалежностей між потенціалами Лехніцького та напруженнями і переміщеннями. Інтегральні рівняння розв'язані методом механічних квадратур. За розробленим алгоритмом досліджено напруження біля отворів у композитних пластинах з різною анізотропією. Отримано практично точні співвідношення для ККН у композитних пластинах з близьким до межі півплощини круговим отвором з використанням асимптотичного методу. Подано результати розрахунків напружень у півплощині зі системою отворів, які засвідчують простоту, високу точність підходу та стійкість отриманих на його основі систем алгебричних рівнянь.

1. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев; Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Максимович О. В., Ілюшин О. В., Соляр Т. Я. Напруження в анізотропній півплощині з вирізами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 2. – С. 129–139.  
Те саме: Maksymovych O. V., Ilyushyn O. V., Solyar T. Ya. Stresses in an anisotropic half plane with notches // J. Mat. Sci. – 2017. – 223, № 2. – P. 159–172.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
5. Устинов Ю. А. Концентрация напряжений в полуплоскости и плоскости с круговыми отверстиями при растяжении // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 1. – С. 145–148.
6. Филъзитинский Л. А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 6. – С. 72–79.
7. Jones R.M. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis, United Kingdom, 1999. – 519 p.
8. Lekhnitskii S. G., Tsai S. W., Cheron T. Anisotropic Plates. Gordon and Breach Science Publishers New York; London; Paris; Montreux; Tokyo; Melbourne, 1987. – 534 p.
9. Maksymovych O., Ilyushyn O. Stress calculation and optimization in composite plates with holes based on the modified integral equation method. // Eng. Analysis with Boundary Elements, – 2017. – № 83. – P. 180–187.
10. Maksymovych O., Pasternak Ia., Sulym H., Kutsyk S. Doubly periodic cracks in the anisotropic medium with the account of contact of their faces // Acta mechanica et automatica. – 2014. – 8, № 3. – P. 160–164.
11. Savruk M. P., Kazberuk A. A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, № 2. – P. 182–197.
12. Scholar N. A. Anisotropic Analysis Using Boundary Elements: Computational Mechanics Publications. – 1994. – 142 p.



13. Tsukrov I., Kachanov M. Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution // Int. J. Solids Struct. – 2000. – 37, № 41. – P. 5919–5941.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ОСНОВАНИИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Интегральные уравнения для многосвязных анизотропных полуплоскостей записаны с использованием решения типа Грина. На основании метода механических квадратур разработан подход к решению интегральных уравнений для системы отверстий. Проиллюстрированы простота и точность подхода при исследовании высокой концентрации напряжений возле отверстия близкого к границе полуплоскости (дополнительно использован асимптотический метод), а также при расчете напряжений с контролируемой точностью для системы отверстий.*

**DETERMINATION OF STRESSES IN A MULTICONNECTED ANIZOTROPIC HALF-PLANE ON THE BASIS OF MODIFIED INTEGRAL EQUATION**

*Integral equations for multiconnected anisotropic half-planes are written with additional utilization the Green-type solution. The approach is developed to solve integral equations by means of the mechanical quadrature method for a system of openings. The simplicity and accuracy of the approach is illustrated when studying the high stress concentration near the opening which is close to the half-plane boundary (asymptotic method has been used additionally), and also when computing the stresses with controlled accuracy for the systems of openings.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
20.06.17