

ВЗАЄМОДІЯ SH-ХВИЛЬ З ТОНКИМ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМ НЕКОНТРАСТНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРИ

Запропоновано методикку дослідження хвилеутворення у пружному півпросторі із тонким прямолінійним п'єзокерамічним включенням змінної товщини. Складові електропружної системи перебувають в ідеальному механічному контакті, а на поверхні включення електрична індукція рівна нулю. Методика базується на теорії сингулярних збурень із поданням розв'язків через відповідні функції Гріна.

Вступ. Останні досягнення теорії дифракції пружних хвиль на тонких неоднорідностях проаналізовані в працях [3, 4, 6–8, 11, 12]. Переважно розглядали випадки, за яких п'єзоэффект не брали до уваги. З його урахуванням досліджували, в основному, електропружні поля за статичних навантажень [2, 5, 13]. Взаємодію SH-хвиль із тонкими п'єзокерамічними контрастними включеннями у необмежених пружних та електропружних середовищах вивчали в працях [2, 7, 14]. Нижче запропоновано алгоритм вивчення пружних хвильових полів, дифрагованих тонкостінним прямолінійним п'єзокерамічним включенням змінної товщини у пружному півпросторі.

Формулювання задачі. Нехай у пружному ізотропному півпросторі $x_2 \leq H$, $|x_1| \leq \infty$ за умов ідеального механічного контакту і поздовжнього зсуву знаходиться тонке прямолінійне п'єзоелектричне включення, що займає область $W_\epsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, 2|x_2| \leq h(x_1)\}$. Тут H – відстань від серединної лінії включення до поверхні півпростору; $h(x_1)$ та $2a$ – товщина та довжина неоднорідності; $x = (x_1, x_2)$ – декартові координати. Матеріал включення належить до кристалографічного класу $6mm$, а вісь симетрії шостого порядку перпендикулярна до площини x_1x_2 [1, 9]. Відносна товщина включення характеризує малий безрозмірний параметр $\epsilon = a^{-1} \max_{|x| < a} h(x) = 1$.

За поздовжнього зсуву відмінні від нуля компоненти векторів переміщень у матриці та включенні $u(x)$, $u^0(x)$ задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) &= 0, \quad u(x) = u^{in}(x) + u^r(x) + u^s(x), \quad \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\epsilon; \\ \Delta u^0(\mathbf{x}) + k_0^2 u^0(\mathbf{x}) &= 0, \quad \Delta u^0(\mathbf{x}) - \Delta \phi_P^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \phi_P^0(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_{11}^0}{\epsilon_{15}^0} \phi^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in W_\epsilon; \\ k_0 &= kc/c_0, \quad c = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_0 = \sqrt{c_{44}^0(1+\eta^2)/\rho_0}, \quad \eta = \epsilon_{15}^0/\sqrt{c_{44}^0 \epsilon_{11}^0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для компонент тензорів напружень $\sigma_{i3}(\mathbf{x})$ і $\sigma_{i3}^0(\mathbf{x})$ у матриці і включенні та вектора електричної індукції $D_i^0(\mathbf{x})$ у неоднорідності маємо [1, 9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}(\mathbf{x}) &= \mu \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \quad \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\epsilon; \\ \sigma_{i3}^0(\mathbf{x}) &= c_{44}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u^0(x) + \eta^2 \phi_P^0(x)); \end{aligned} \quad (2)$$

$$D_i^0(\mathbf{x}) = \epsilon_{15}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u^0(\mathbf{x}) - \phi_P^0(\mathbf{x})), \quad i=1,2, \quad \mathbf{x} \in W_\epsilon.$$

Тут $u^{in}(\mathbf{x})$ та $u^s(\mathbf{x})$ – збурювальне та розсіяне поля переміщень у матриці; $u^r(\mathbf{x})$ – переміщення у хвилі, відбитій від поверхні півпростору без включення; $\phi^0(\mathbf{x})$ – електричний потенціал у неоднорідності; k , c , ρ і k_0 , c_0 , ρ_0 – хвильові числа, швидкості та густини у матриці і включенні відповідно; η – коефіцієнт електромеханічного зв'язку; μ – модуль зсуву матеріалу матриці; c_{44}^0 , ϵ_{15}^0 та ϵ_{11}^0 – пружна стала, п'єзоелектрична стала та діелектрична проникність матеріалу неоднорідності.

На ∂W_ϵ виконуються умови ідеального механічного контакту між складовими композиту:

$$u(x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = \gamma \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u^0(x) + \frac{\epsilon_{15}^0}{c_{44}^0} \phi^0(x) \right), \quad \gamma = c_{44}^0 / \mu, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\epsilon, \quad (3)$$

де γ – відносна жорсткість матеріалу включення, а поверхня півпростору вільна від напружень

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad |x_1| < \infty, \quad x_2 = H. \quad (4)$$

Електрична індукція на ∂W_ϵ рівна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u^0(\mathbf{x}) - \frac{\epsilon_{11}^0}{\epsilon_{15}^0} \phi^0(\mathbf{x}) \right) = 0. \quad (5)$$

На включення набігає стаціонарна SH-хвиля:

$$\begin{aligned} u^{in}(\mathbf{x}) &= u_0 \exp[ik(x_1 \cos \theta_{in} + x_2 \sin \theta_{in})], \\ u^r(\mathbf{x}) &= u_0 \exp[ik(x_1 \cos \theta_{in} - (x_2 - 2H) \sin \theta_{in})], \end{aligned} \quad (6)$$

де θ_{in} – кут її падіння.

Функція $u^s(\mathbf{x})$ задовольняє нульову граничну умову на поверхні матриці та умову випромінювання на безмежності [3, 9]:

$$u^s(\mathbf{x}) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp(ikr - i\pi/4) f(\theta), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

де $f(\theta)$ – комплексна амплітуда розсіяння хвиль; (r, θ) – полярна система координат $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$.

Аналітико-числовий розв'язок задачі. Вважаємо, що матеріали тонкого включення і матриці неконтрастні, тобто $\sqrt{\epsilon} \leq \gamma \leq 1/\sqrt{\epsilon}$. Динамічну взаємодію такого п'єзоелектричного включення з пружним середовищем асимптотично точно змодельовано з допомогою ефективних граничних умов [7, 9, 10]:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1) &= (1 - \gamma_*) \frac{\partial}{\partial x_1} h(x_1) \frac{\partial U^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + (k^2 - \gamma_* k_0^2) h(x_1) U^{in}(\mathbf{x}), \\ \Phi(x_1) &= \frac{1 - \gamma_*}{\gamma_*} h(x_1) \frac{\partial U^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$U^{in}(\mathbf{x}) = u^{in}(\mathbf{x}) + u^r(\mathbf{x}), \quad \gamma_* = \gamma(1 + \eta^2).$$

Тут $\Phi(x_1)$ і $\Psi(x_1)$ – стрибки переміщень і їхніх похідних по координаті x_2 через серединну лінію включення.

Подамо розв'язок задачі (1), (3)–(5), (7) у вигляді інтеграла Кірхгофа:

$$u^s(x) = \int_{-a}^a \left[\Phi(x_1^0) \frac{\partial G_{\Gamma}(x, x^0)}{\partial x_2^0} - \Psi(x_1^0) G_{\Gamma}(x, x_0) \right] dx_1^0;$$

$$G_{\Gamma}(x, x_0) = \frac{i}{4} \left[H_0^{(1)}(kR_0) + H_0^{(1)}(kR_1) \right], \quad (8)$$

$$R_0 = |x - x_0|, \quad R_1 = |x - x_1|, \quad x^0 = (x_1^0, x_2^0), \quad x_2^0 = 0,$$

де $G_{\Gamma}(x, x^0)$ – функція Гріна для півпростору; $H_0^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля першого роду та нульового порядку; x^0 і x^1 – декартові координати точкового джерела хвильового поля в області включення і його дзеркального відображення відносно поверхні півпростору [3, 14]. Товщину включення $h(x_1)$ приймемо у вигляді

$$h(x_1) = \varepsilon a (1 - \rho)^{\delta_+} (1 + \rho)^{\delta_-}, \quad x_1 = ap, \quad (9)$$

параметри δ_+ , δ_- характеризують ступінь загострення його кінців.

Із інтегрального подання (8), враховуючи (6), (9), отримуємо вираз для комплексної амплітуди розсіяння SH-хвиль у півпросторі:

$$f(\theta) = \left(\frac{1 - \gamma_*}{\gamma_*} \sin \theta_{in} \sin \theta \sin(k_* H_* \sin \theta) \sin(k_* H_* \sin \theta_{in}) + \right. \\ \left. + \left((1 - \gamma_*) \cos \theta_{in} \cos \theta + \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \cos(k_* H_* \sin \theta) \cos(k_* H_* \sin \theta_{in}) \right) J(\theta),$$

$$J(\theta) = \int_{-1}^1 (1 - \rho)^{\delta_+} (1 + \rho)^{\delta_-} \exp(ik_* \rho (\cos \theta_{in} - \cos \theta)) d\rho,$$

де $k_* = ka$ і $H_* = H/a$ – приведені хвильова частота і відносна глибина залягання включення.

Аналіз числових результатів. На рис. 1 і 2 зображено спектри нормованих амплітуд розсіяння $f^*(\theta) = |f(\theta)| / (4k_*^2 \varepsilon)$ при $H_* = 2$ і 5 відповідно.

Припускаємо, що включення сталі товщини, $\theta_{in} = 45^\circ$, $\theta = 0^\circ$ і $\gamma = 3$. Суцільним товстим, суцільним тонким, штрих-пунктирним і штриховим кривим відповідають значення $\eta = 0$ (п'єзоэффект відсутній); 0,3; 0,6 і 0,9.

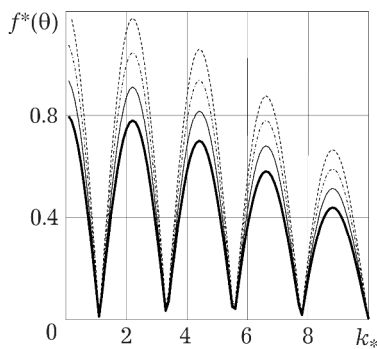


Рис. 1.

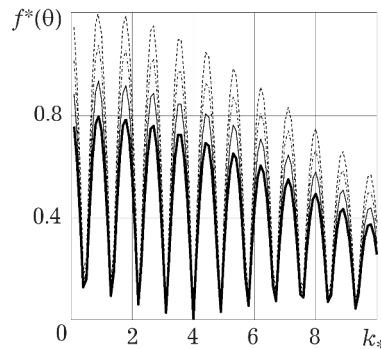


Рис. 2.

Як бачимо, зі збільшенням коефіцієнта електромеханічного зв'язку η амплітуда розсіяння зростає. Вплив п'єзоэффекту суттєвий у діапазонах низьких і резонансних частот і сягає 34%.

Зі збільшенням глибини залягання включення спектральні залежності амплітуди розсіяння набувають резонансного характеру. Причому період коливань становить $\Delta k_* \approx 2\pi / (H_* \sin \theta_{in})$, якщо $\theta = \text{const}$, $\theta_{in} \neq 0$.

При $\rho = \rho_0(1 + \eta^2)$, $\mu = c_{44}^0(1 + \eta^2)$ неоднорідність стає непомітною у полі зондувальних хвиль.

Висновки. Отримано аналітичні співвідношення для аналізу спектральних характеристик та діаграм направленості амплітуд розсіяння SH-хвиль тонким прямолінійним п'єзокерамічним неконтрастним включенням у пружному півпросторі. Методика дослідження придатна для криволінійної неоднорідності.

Аналітико-числовий аналіз спектральних залежностей дає можливість зробити такі висновки. Для електроізолюваних п'єзокерамічних тонких прямолінійних неконтрастних включень зі зростанням коефіцієнта електро-механічного зв'язку підвищуються амплітуди розсіяних хвиль у дальній зоні. Відносний вплив п'єзоефекту на амплітуди суттєвий у діапазонах низьких та резонансних частот і може сягати 34%. Зі збільшенням хвильового розміру розсіювача він нівелюється. Ці закономірності виявлено за різних форм прямолінійних включень, кутів падіння і розсіяння хвиль та параметрів контрастності розсіювачів.

1. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 240 с.
2. Бардокас Д. И., Фильштинский М. Л. Электроупругость кусочно-однородных тел. – Сумы: Университетская книга, 2000. – 308 с.
3. Кунець Я. І., Матус В. В., Міщенко В. О., Пороховський В. В. Розсіяння SH-хвиль пружним волокном за наявності тонкого гострокінцевого міжфазного включення малої жорсткості // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 82–87.
4. Кунець Я. І., Рабош Р. В. Поздовжній зсув пружного середовища з тонким прямолінійним гострокінцевим п'єзоелектричним включенням низької жорсткості // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 3. – С. 141–146.
5. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Двовимірні зв'язані електричні, магнітні та механічні поля в діелектриках із тріщинами та тонкими включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 71–85.
6. Попов В. Г. Гармонічні коливання в умовах антиплоскої деформації півпростору з тонким жорстким смуговим включенням, що перетинає межу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 124–135.
7. Рабош Р. В. Динамічна взаємодія пружного середовища з тонкостінним криволінійним п'єзоелектричним включенням при поздовжніх коливаннях композита // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №1. – С. 101–106.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термпружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослід.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Сулим Г. Т., Кунець Я. І., Рабош Р. В. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву // Вісник Донецьк. ун-ту. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
10. Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – 37. – P. 331–345.
11. Kunets Ya. I., Matus V. V., Mishchenko V. O., Rabosh R. V. SH-wave Scattering by Plane Low Contrast Piezoelectric Inclusion // Proc. XXI Int. Seminar/Workshop «Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory» (DIPED–2016). – Tbilisi, 2016. – P. 142–144.
12. Mykhas'kiv V. V. Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Elastic Composites with Rigid Disk-Shaped Inclusions of Variable Mass, Chapter 2 // Composites and Their Applications (edited by N. Hu). – Rijeka (Croatia): InTech Press, 2012. – P. 17–36.

13. Pasternak Ia. M., Sulym H. T., Piskozub L. G. Integral equations of plane magnetoelastoelectroelasticity for a cracked bimaterial with thin inclusions // J. Math. Sci. – 2016. – 217, № 3. – P. 239–259.
14. Zhang B., Bostrom A., Niklasson A. J. Antiplane shear waves from a piezoelectric strip actuator: exact versus effective boundary condition solutions // Smart Mater. Struct. – 2004. – 13. – P. 161–168.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ SH-ВОЛН С ТОНКИМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ НЕКОНТРАСТНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Предложена методика исследования процесса волнообразования в упругом полупространстве с тонкостенным прямолинейным пьезоэлектрическим включением переменной толщины. Составляющие электроупругой системы находятся в идеальном механическом контакте, а на поверхности включения электрическая индукция равна нулю. Методика базируется на теории сингулярных возмущений с представлением решений через соответствующие функции Грина.

SH-WAVES INTERACTION WITH A THIN PIEZOELECTRIC NONCONTRAST INCLUSION IN THE ELASTIC HALF-SPACE

The method to study the process of wave formation in an elastic half-space with a thin-walled rectilinear piezoelectric inclusion of variable thickness is proposed. The components of the electroelastic system are in the ideal mechanical contact and electrical induction on the inclusion surface equals zero. The method is based on the theory of singular perturbations with solutions representation through the corresponding Green functions.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.10.17