УДК 393.3

Р. М. Андрійчук

ЗАДАЧА СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛУ ЗА ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЇ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО МІЖФАЗНОЇ ПОВЕРХНІ КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

Побудовано функцію Ґріна задачі стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного тіла, складеного з двох ідеально контактуючих півпросторів, в одному з яких міститься паралельне до межі поділу теплонепроникне дискове включення. При цьому використано гармонічний потенціал подвійного шару, густиною якого є диполі тепла. Записано двовимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння для визначення густини диполів через тепловий потік заданого температурного поля. В осесиметричному випадку досліджено розподіл температури на осі симетрії включення та її стрибки на ньому для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності півпросторів та віддалі включення до межі їх поділу.

У сучасних конструкціях широко використовують композитні матеріали і кусково-однорідні структури. Під час їх виготовлення та експлуатації на межі з'єднання різнорідних компонентів можуть виникати дефекти, зокрема тріщини, які зумовлюють високу концентрацію напружень і подальше міжфазне руйнування, особливо за одночасної дії силових і термічних навантажень. Багато елементів цих конструкцій працюють в умовах нерівномірного нагрівання, за якого виникають градієнти температури та неоднакове теплове розширення окремих частин, яке викликає температурні напруження. Тонкі теплоактивні включення, на яких задано температуру або теплові потоки, зумовлюють локальне зростання в їх околі температурних градієнтів і напружень.

Задачі про збурення теплового потоку в околі теплоізольованого включення важливі у техніці та геофізиці. Таке включення є тепловим екраном, ідеальність теплового контакту між його поверхнями порушується, вони прогріваються нерівномірно, внаслідок чого з'являються дотичні напруження.

Під час дослідження напруженого стану тіла з теплоізольованими включеннями (тріщинами) проміжним етапом є визначення температурного поля за заданими на їх місці температурою або тепловим потоком. Загальний метод розв'язування просторових задач для безмежного тіла з плоскими тріщинами, на поверхнях яких задано різні теплові та силові навантаження, наведено у монографії [1]. З допомогою гармонічних потенціалів подвійного шару для теплоізольованих включень задачі зведено до розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому густинами потенціалів є густини диполів тепла на місці розташування включень. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для безмежного тіла з круговими теплоізольованими включеннями (тріщинами) розв'язані у працях [4, 5, 7], а такі ж осесиметричні – у [2, 3, 6].

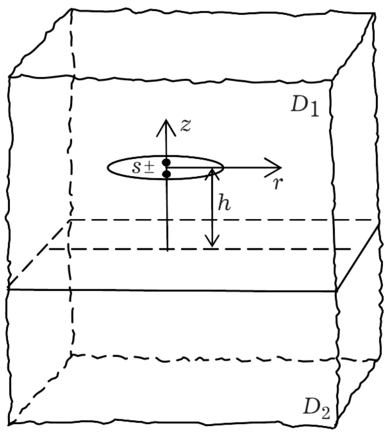
Детальний огляд публікацій з дослідження термонапруженого стану кусково-однорідних тіл з міжфазними тріщинами наведено у монографії [9]. Задачам термопружності для біматеріальних тіл з міжфазними теплоізольованими круговими тріщинами присвячені праці [8, 10–14]. Нижче вивчено збурення стаціонарного температурного поля у складеному тілі з паралельним до межі поділу матеріалів теплонепроникним дисковим включенням.

Формулювання задачі, **побудова функції Ґріна**. Розглянемо кусково-однорідний простір, складений з двох півпросторів D_1 і D_2 з коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2, у верхньому з яких міститься паралельне до межі поділу теплонепроникне дискове включення S (див. рисунок). Введемо циліндричну систему координат з початком на межі поділу півпросторів і віссю Oz, перпендикулярною до неї.

Температурне поле у тілі з включенням подамо у вигляді

$$T(r,z) = t_0(r,z) + t(r,z),$$

де $t_0(r,z)$ – температурне поле у тілі без включення; $t(r,z)$ – температурне поле від збурення температури $t_0(r,z)$ включенням. Граничну умову теплоізоляції на включенні запишемо так:



$$\frac{\partial T(t,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{або}$$

$$\frac{\partial t(r,z)}{\partial z} = -\frac{\partial t_0(r,z)}{\partial z} \quad \text{на } S. \qquad (1)$$

Побудуємо функцію Ґріна задачі теплопровідності. Для цього на віддалі h від межі у верхньому півпросторі розмістимо диполь тепла сталої потужності γ, вісь якого спрямована по осі Oz. На межі поділу матеріалів $z = 0$ виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$t_1(r,z) = t_2(r,z), \qquad \lambda_1 \frac{\partial t_1(r,z)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(r,z)}{\partial z}, \qquad \text{якщо } z = 0. \qquad (2)$$

Розподіл температури у кожному з півпросторів задаємо у вигляді

$$t_1(r,z) = \frac{\gamma}{4\pi}\left(\frac{z-h}{R_1^3(r,z)} + \frac{\kappa_1(z+h)}{R_2^3(r,z)}\right), \qquad t_2(r,z) = \frac{\gamma}{4\pi}\frac{\kappa_2(z-h)}{R_1^3(r,z)}, \qquad (3)$$

$$R_1(r,z) = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}, \quad R_2(r,z) = \sqrt{r^2 + (z+h)^2},$$

де κ_1 і κ_2 знаходимо з граничних умов (2)

$$1 - \kappa_1 = \kappa_2, \qquad 1 + \kappa_1 = \lambda^* \kappa_2.$$

Звідси

$$\kappa_1 = -\frac{1-\lambda^*}{1+\lambda^*}, \qquad \kappa_2 = \frac{2}{1+\lambda^*}, \qquad \lambda^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

При $z = 0$ для h, відмінного від нуля, спрямувавши $\lambda_2 \to \infty$ ($\lambda^* = \infty$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$), за формулами (3) дістанемо півпростір з нульовою температурою на межі, а спрямувавши $\lambda_2 \to 0$ ($\lambda^* = 0$, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 2$), за цими ж співвідношеннями одержимо півпростір з теплоізольованою межею.

Паралельне до межі поділу тіла включення. Наведені співвідношення для температури є відповідними функціями Ґріна, які можна використати під час визначення у біматеріальному тілі температурного поля, зумовленого нагрівом диполями тепла, розподіленими по області S, обмеженій гладким контуром. Для цього необхідно перенести диполь тепла в точку $(\xi_1, \xi_2, 0)$ декартової системи координат з початком в області S (див. рисунок). У формули для температури в декартовій системі координат слід підставити

$$R_1(r,z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad R_2(r,z) = \sqrt{r^2 + (z+2h)^2},$$

де $r = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \right]^{1/2}$.

За відомою функцією Ґріна визначаємо температуру у верхньому та нижньому півпросторах, викликану розподіленими в області S диполями тепла з густиною $\gamma(\xi_1, \xi_2)$:

$$t_i^*\left(x^*\right) = \iint_S \gamma(\xi)\, t_i\left(x^*;\xi\right) d_\xi S\,, \quad i = 1,2\,, \tag{4}$$

де $x^* = (x_1, x_2, z)$, $x = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Для визначення густини диполів $\gamma(x_1, x_2)$ знайдемо похідну по z від $t_1^*\left(x^*\right)$ і підставимо в граничну умову теплоізоляції (1). Тоді одержимо гіперсингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(\xi) \left[\frac{1}{R_1^3(x,\xi)} + \frac{\kappa_1}{R_2^3(x,\xi)} \right] d_\xi S = q(x)\,, \tag{5}$$

де $q(x) = -\lambda_1 \dfrac{\partial t_0\left(x^*\right)}{\partial z}\Big|_{z=0}$.

Для кругової області рівняння (5) можна розв'язувати аналітично-числовим методом [1]. Для цього його регуляризуємо, розбиваємо область S на граничні елементи за радіусом та кутом і задовольняємо рівняння у колокаційних точках усередині введених елементів, використовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій та різницеві схеми для її перших і других похідних. Так приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Осесиметричне температурне поле. Якщо густина теплових диполів $\gamma(\rho)$ не залежить від кутової координати, вираз для температури $t_1^*(r,z)$ (4) можна записати в циліндричній системі координат:

$$t_1^*(r,z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \eta H(\eta) J_0(\eta r) \left(\operatorname{sign} z e^{-\eta|z|} + \kappa_1 e^{-\eta|z+2h|} \right) d\eta\,, \tag{6}$$

$$H(\eta) = \int_0^a \rho \gamma(\rho) J_0(\eta\rho)\, d\rho\,, \tag{7}$$

де $J_0(u)$ – функція Бесселя.

Візьмемо з виразу (6) похідну по z і підставимо в граничну умову теплоізоляції. Тоді інтегральне рівняння (5) набуде вигляду

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \eta^2 H(\eta) J_0(\eta r) \left(1 + \kappa_1 e^{-2\eta h} \right) d\eta = q(r)\,,$$

де $q(r) = -\lambda_1 \dfrac{\partial t_0(r,z)}{\partial z}\Big|_{z=0}$.

Із виразу (6) видно, що при $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\kappa_1 = 0$) температура має розрив за переходу через шар:

$$t_1(r, \pm 0) = \begin{cases} \pm \dfrac{\gamma(r)}{2}, & r \in S, \\ 0, & r \notin S. \end{cases}$$

Якщо $\kappa_1 \neq 0$, граничні значення температури на поверхнях включення відрізняються.

Приклад. Нехай $\gamma(\rho) = \sqrt{1-\rho^2}$, тоді із формули (7)

$$H(\eta) = \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2} J_0(\eta\rho)\, d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta^{-3/2} J_{3/2}(\eta).$$

Підставивши цей вираз у формулу (6), отримаємо при $r = 0$:

$$t_1(0,z) = \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{sign} z}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \eta^{-1/2} J_{3/2}(\eta) e^{-\eta|z|} d\eta + \frac{\sqrt{\pi}\kappa_1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \eta^{-1/2} J_{3/2}(\eta) e^{-\eta|z+2h|} d\eta =$$

$$= \frac{\operatorname{sign} z}{6\left(1+z^2\right)} F\left(1,1,\frac{5}{2},\frac{1}{1+z^2}\right) + \frac{\kappa_1}{6\left(1+(z+2h)^2\right)} F\left(1,1,\frac{5}{2},\frac{1}{1+(z+2h)^2}\right).$$

Якщо $z = \pm 0$, маємо:

$$6t_1^{\pm} = \pm 3 + \kappa_1 f(h), \qquad (8)$$

де $f(h) = \dfrac{1}{\left(1+4h^2\right)} F\left(1,1,\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{1+4h^2}\right)$.

У таблиці наведено значення функції $f(h)$ для певних значень h.

h	0,25	0,5	0,75	1,0	2.0	5,0	10,0
$f(h)$	1,339	0,644	0,354	0,218	0,060	0,010	0,003

Із виразу (8) і таблиці випливає, що при $\kappa_1 > 0$ $t_1^+ > \left|t_1^-\right|$, а при $\kappa_1 < 0$ $t_1^+ < \left|t_1^-\right|$. Якщо $h > 5$, межа поділу матеріалів не впливає на температуру і вона буде така ж, як у безмежному тілі.

Висновки. Одержано розв'язок осесиметричної задачі стаціонарної теплопровідності для безмежного тіла, складеного з двох ідеально контактуючих півпросторів з диполем тепла в одному з них. Наведені співвідношення є функціями Ґріна, через які з використанням гармонічного потенціалу подвійного шару записані вирази для температури і гіперсингулярне інтегральне рівняння для визначення густини диполів тепла на паралельному до межі поділу півпросторів дисковому включенні за заданим на ньому тепловим потоком. Розв'язок задачі можна застосувати під час дослідження збурення теплонепроникним включенням заданої у біматеріальному тілі температури.

1. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 284 с.
2. *Кіт Г. С., Галазюк В. А.* Осесиметричний напружено-деформований стан тіла з тонким жорстким дисковим теплонепроникним включенням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 3. – С. 95–109.
3. *Кіт Г. С., Галазюк В. А.* Осесиметричний напружено-деформований стан у тілі з плоскою пеленою теплових джерел або диполів // Доп. НАН України. – 2011. – № 10. – С. 54–60.
4. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Вплив джерела тепла на напружений стан тіла з теплоізольованою круговою тріщиною // Прикл. проблеми механніки і математики. – 2011. – Вип. 9. – С. 111–121.
5. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 150–159.
6. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 58–70.

7. *Кіт Г.С., Сушко О. П.* Розподіл стаціонарної температури та напружень у тілі з теплопроникним дисковим включенням // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 145–153.
8. *Кривий А. Ф., Морозов Ю. О.* Кругова міжфазна тріщина в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі під дією теплового потоку // Вісник Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2015. – Спецвип. – С. 133–138.
9. *Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
10. *Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat-flow. Part 2: Imperfect contact. // ASME J Appl. Mech. – 1983. – 50. – P. 770–776.
11. *Brown E. J., Erdogan F.* Thermal stresses in bonded materials containing cuts on the interface // Int. J. Eng. Sci. – 1968. – 6, № 9. – P. 517–529.
12. *Clements D. L.* A thermoelastical problem for a crack between dissimilar anisotropic media // Int. J. Solids Struct. – 1983. – 19. – P. 121–130.
13. *Lee K. Y., Shul C. W.* Determination of thermal stress intensity factors for the interface crack between dissimilar materials under uniform heat flow // Eng. Fract. Mech. – 1991. – 40. – P. 1067–1074.
14. *Martin Moran C. J., Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat-flow. Part 1: Perfect contact // ASME J Appl. Mech. – 1983. – 50. – P. 29–36.

ЗАДАЧА СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ БИМАТЕРИАЛА ПРИ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ К МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Построена функция Грина задачи стационарной теплопроводности для кусочно-однородного тела, составленного из двух идеально контактирующих полупространств, в одном из которых содержится параллельное к границе раздела теплонепроницаемое дисковое включение. При этом использован гармонический потенциал двойного слоя, плотность которого является диполями тепла. Записано двухмерное гиперсингулярное интегральное уравнение для определения плотности диполей с помощью теплового потока заданного температурного поля. В осесимметрическом случае исследовано распределение температуры на оси симметрии включения и ее прыжки на нем для различных соотношений коэффициентов теплопроводности полупространств и расстояния включения к границе их раздела.

STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR BIMATERIAL AT THERMAL INSULATION IN PARALLEL TO THE MATERIALS BOUNDARY CIRCULAR DOMAIN

The Green's functions for stationary heat conduction problem for a piecewise-homogenous body formed by two ideally contacting half-spaces with heat-proof disk inclusion parallel to its boundary in one of them are constructed. In this case, the harmonic potential of the double layer, whose density is thermal dipoles, is used. A two-dimensional hypersingular integral equation is derived to determine the density of dipoles through the heat flow of a given temperature field. In the axisymmetric case, the distribution of temperature on the axis of symmetry of the inclusion and its jumps on inclusion for different ratios of the heat conduction coefficients of the half-spaces and the distance of the inclusion to the materials boundary are investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.10.17