УДК 393.3

М. А. Сухорольський, В. В. Достойна, О. В. Веселовська

МНОГОЧЛЕНИ, СПОРІДНЕНІ З МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБИШОВА

Введено систему многочленів комплексної змінної, що споріднені з многочленами Чебишова. Досліджено їх властивості, отримано зображення таких многочленів контурними інтегралами та співвідношення між ними та деякими іншими многочленами. Крім того, одержано комбінаторні тотожності, які можна використовувати для інших досліджень.

Вступ. Многочлени Чебишова є основою теоретичних та практичних досліджень теорії наближення функцій. Їх ефективно використовують у задачах обчислювальної математики, для розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь, числового диференціювання та інтегрування.

Властивості многочленів Чебишова дійсної змінної достатньо ґрунтовно проаналізовано в статтях [4, 6]. Значно менше досліджень про властивості цих систем у комплексній області. У статті [4] наведено деякі властивості многочленів Чебишова комплексної змінної, а також розвинення аналітичних функцій за многочленами Чебишова першого роду у комплексних областях.

Тут введемо систему многочленів комплексної змінної, що споріднені з многочленами Чебишова. Дослідимо властивості цих многочленів, отримаємо їх зображення контурними інтегралами та вирази через деякі ортогональні многочлени. Під час досліджень одержали комбінаторні тотожності, які мають самостійне застосування.

Позначимо через $T_n(z)$, $U_n(z)$ многочлени Чебишова комплексної змінної першого та другого роду відповідно. Для них справедливі формули [1, с. 186]

$$T_0(z)=1\,,\, T_n(z)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\,2^{n-2k}C_{n-k}^k}{n-k}z^{n-2k}\quad (n=1,2,\ldots)\,, \tag{1}$$

$$U_n(z)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,2^{n-2k}C_{n-k}^k z^{n-2k}\ (n=0,1,\ldots)\,, \tag{2}$$

де C_n^k – біноміальні коефіцієнти.

Визначимо систему многочленів $Q_n(z)$ комплексної змінної співвідношенням

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(z+t\sqrt{z^2-1}\right)^n dt\,. \tag{3}$$

Властивості многочленів $Q_n(z)$.

Теорема 1. *Для многочленів* $Q_n(z)$ *справедливі явні формули*

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A_k^n z^{n-2k}\quad (n=0,1,\ldots)\,, \tag{4}$$

де $A_k^n=\dfrac{(-1)^k\,2^{n-2k}C_{n-k}^k}{n+1}$.

Д о в е д е н н я. Використавши формулу бінома Ньютона та змінивши порядок сумування, з (3) знаходимо:

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}C_n^m z^{n-m}\left(z^2-1\right)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{1}t^m dt=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2i}}{2i+1}z^{n-2i}\left(z^2-1\right)^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2i}}{2i+1}z^{n-2i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k z^{2i-2k}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k z^{n-2k}\sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2i}C_i^k}{2i+1}.$$

Врахувавши комбінаторну тотожність

$$\sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2i}C_i^k}{2i+1}=\frac{2^{n-2k}C_{n-k}^k}{n+1}, \tag{5}$$

приходимо до співвідношення (4).

Зі співвідношень (4) отримаємо вирази многочленів $Q_n(z)$ для парних та непарних значень n:

$$Q_{2n}(z)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k}^k z^{2n-2k}=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}2^{2j}C_{n+j}^{2j}z^{2j}, \tag{6}$$

$$Q_{2n+1}(z)=\frac{1}{2n+2}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}2^{2j+1}C_{n+j+1}^{2j+1}z^{2j+1}. \tag{7}$$

Зауважимо, що згідно з (1), (2) та (4) маємо залежності

$$U_n(z)=(n+1)Q_n(z),\quad T'_{n+1}(z)=(n+1)^2 Q_n(z). \tag{8}$$

Позначимо через Γ_R еліпс з рівнянням

$$z=\frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi}+R^{-1}e^{-i\varphi}\right)\ (R>1,\ \ 0\le\varphi<2\pi). \tag{9}$$

Нехай D_R *– область, межею якої є еліпс* Γ_R.

Теорема 2. *Справедливі оцінки:*

$$|Q_n(x)|\le 1,\quad x\in\mathbb{R},\quad |x|\le 1,$$

$$|Q_n(z)|\le R^n,\qquad z\in\overline{D_R}, \tag{10}$$

де $n=0,1,2,\ldots$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи нерівність $x^2-x^2t^2+t^2\le 1$, яка справедлива для таких x і t, що $|x|\le 1$, $|t|\le 1$, одержимо:

$$|Q_n(x)|\le\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left|x+it\sqrt{1-x^2}\right|^n dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2+t^2\left(1-x^2\right)\right)^{\frac{n}{2}}dt\le\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dt\le 1.$$

Многочлен $Q_n(z)$ задовольняє умови теореми [5, с. 166]: якщо для многочлена $W_n(z)$ на дійсному відрізку [-1;1] виконується нерівність $|W_n(z)|\le 1$, то в будь-якій точці z, яка лежить на еліпсі Γ_r, $1\le r\le R$, з рівнянням (9) або всередині цього еліпса справедлива оцінка $|W_n(z)|\le r^n$. Звідси, оскільки $r\le R$, випливає оцінка (10).

Наслідок 1. Справедливі оцінки

$$|U_n(x)|\le n+1,\qquad x\in\mathbb{R},\quad |x|\le 1,$$

$$|U_n(z)|\le(n+1)R^n,\quad z\in\overline{D_R},$$

де $n=0,1,2,\ldots$.

Наслідок 2. Справедливі оцінки

$$|T'_{n+1}(x)|\le(n+1)^2,\ x\in\mathbb{R},\quad |x|\le 1,$$

$$\left|T'_{n+1}(z)\right| \le (n+1)^2 R^n, \; z \in \overline{D_R},$$

де $n = 0,1,2,\ldots$.

Позначимо через C *додатно орієнтоване коло* $|t| = R$, $1 < R < \infty$.

Теорема 3. *Для многочленів* $Q_n(z)$ *справедливе інтегральне зображення*

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n \varphi(t)\,dt \quad (n = 0,1,\ldots), \tag{11}$$

де $\varphi(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1}$.

Д о в е д е н н я. Застосувавши до виразу $\left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n$ формулу бінома Ньютона та врахувавши розклад $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{t^{2k+1}}$ згідно з (11), одержимо:

$$Q_n(z) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m z^{n-m}\left(z^2-1\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dt}{t^{2k-m+1}}.$$

На підставі відомого результату [2, с. 81–82]

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \ne 1, \end{cases}$$

де L – довільний замкнений контур, що охоплює точку a і однократно пробігається в додатному напрямі, знаходимо:

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2k+1} C_n^{2k} z^{n-2k}\left(z^2-1\right)^k.$$

Використовуючи формулу бінома Ньютона та змінивши порядок сумування, маємо:

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{C_n^{2k}}{2k+1} z^{n-2k} \sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m z^{2k-2m} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m z^{n-2m}\sum_{k=m}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2k}C_k^m}{2k+1}.$$

Врахувавши комбінаторну тотожність (5), одержимо співвідношення (4).

Наслідок 3. Для многочленів Чебишова другого роду $U_n(z)$ та першої похідної $T'_{n+1}(z)$ многочленів Чебишова першого роду справедливі інтегральні зображення

$$U_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n \psi(t)\,dt \quad (n = 0,1,\ldots),$$

де $\psi(t) = \frac{n+1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1}$;

$$T'_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n \omega(t)\,dt \quad (n = 0,1,\ldots),$$

де $\omega(t) = \frac{(n+1)^2}{2}\ln\frac{t+1}{t-1}$.

Нехай $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, m \ne n, \\ 1, m = n \end{cases}$ – символ Кронекера.

Теорема 4. *Систему степенів* $\left\{z^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ *можна однозначно виразити через многочлени* $Q_n(z)$, *тобто справедливі співвідношення*

$$z^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_k^n Q_{n-2k}(z), \tag{12}$$

де $\alpha_k^n = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{(n-2k+1)^2 C_n^k}{n-k+1}$,

або

$$z^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{2n} Q_{2n-2k}(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n-j}^{2n} Q_{2j}(z), \tag{13}$$

$$z^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{2n+1} Q_{2n-2k+1}(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n-j}^{2n+1} Q_{2j+1}(z), \tag{14}$$

де

$$\alpha_{n-j}^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2j+1)^2 C_{2n}^{n-j}}{n+j+1}, \quad \alpha_{n-j}^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{(2j+2)^2 C_{2n+1}^{n-j}}{n+j+2}.$$

Доведення. Підставивши співвідношення (13) та (14) у (6) та (7) відповідно і змінивши порядок сумування, знаходимо:

$$Q_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n} z^{2k} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n} \sum_{m=0}^{k} \alpha_{k-m}^{2k} Q_{2m}(z) = \sum_{m=0}^{n} Q_{2m}(z) \sum_{k=m}^{n} A_{n-k}^{2n} \alpha_{k-m}^{2k},$$

$$Q_{2n+1}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n+1} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{2n+1} \sum_{m=0}^{k} \alpha_{k-m}^{2k+1} Q_{2m+1}(z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} Q_{2m+1}(z) \sum_{k=m}^{n} A_{n-k}^{2n+1} \alpha_{k-m}^{2k+1}.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти біля многочленів з однаковими степенями, одержимо рівняння для знаходження величин α_i^j:

$$\sum_{k=m}^{n} A_{n-k}^{2n} \alpha_{k-m}^{2k} = \delta_{nm}, \quad \sum_{k=m}^{n} A_{n-k}^{2n+1} \alpha_{k-m}^{2k+1} = \delta_{nm}. \tag{15}$$

Оскільки величини α_i^j задовольняють рівняння (15), формула (12) справедлива.

Наслідок 4. Справедливі співвідношення

$$z^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-2k+1) C_n^k}{n-k+1} U_{n-2k}(z), \tag{16}$$

$$z^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{C_n^k}{n-k+1} T'_{n-2k}(z).$$

Зауважимо, що вирази (16) збігаються з відомими [4, с. 28].

Наслідок 5. Справедливі комбінаторні тотожності

$$\frac{(2m+1)^2}{2n+1} \sum_{k=m}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_{n+k}^{2k} C_{2k}^{k-m}}{k+n+1} = \delta_{nm},$$

$$\frac{(2m+2)^2}{2n+2} \sum_{k=m}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_{n+k+1}^{2k+1} C_{2k+1}^{k-m}}{k+n+2} = \delta_{nm},$$

які отримують зі співвідношень (15), якщо в них підставити вирази для величин A_k^n та α_k^n.

Позначимо через E_R простір однозначних аналітичних у крузі $|z| < R$, $0 < R \le \infty$ функцій комплексної змінної.

Теорема 5. *Система многочленів* $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *лінійно незалежна і повна у просторі* E_R.

Д о в е д е н н я. Оскільки коефіцієнт $A_0^n = \dfrac{2^n}{n+1} \ne 0$ при найстаршому степені многочлена $Q_n(z)$ відмінний від нуля, то система $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ лінійно незалежна [3, с. 137]. Крім того, вона повна [3, с. 137], бо на основі теореми 4 кожний степінь можна однозначно виразити у вигляді лінійної комбінації многочленів $Q_n(z)$.

Співвідношення між многочленами $Q_n(z)$ та деякими іншими ортогональними многочленами

Позначимо через $\Gamma(x)$ гамма-функцію.

Теорема 6. *Справедливі залежності між многочленами* $Q_n(z)$ *та похідними* $P_n^{(s)}(z)$ *многочленів Лежандра*

$$Q_n(z) = \frac{\pi\Gamma(2s+1)}{2^{3s+1}(n+1)s!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j(2n-4j+2s+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j+s\right)} P_{n-2j+s}^{(s)}(z),$$

$$P_n^{(s)}(z) = \frac{2^s\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} \frac{(-1)^j(n-2j-s+1)^2\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j-s\right)\Gamma(n-j-s+2)} Q_{n-2j-s}(z),$$

де $n \ge s$.

Доведення цієї теореми наведено в статті [7].

Наслідок 6. Справедливі залежності між многочленами $Q_n(z)$ та многочленами Лежандра $P_n(z)$:

$$Q_n(z) = \frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j(2n-4j+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j\right)} P_{n-2j}(z),$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j(n-2j+1)^2\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j\right)\Gamma(n-j+2)} Q_{n-2j}(z).$$

Наслідок 6 випливає з теореми 6, якщо покласти $s = 0$.

Наслідок 7. Справедливі залежності між многочленами Чебишова другого роду $U_n(z)$ і першою похідною $T'_{n+1}(z)$ многочленів Чебишова першого роду з многочленами Лежандра $P_n(z)$ та їхніми похідними $P_n^{(s)}(z)$:

$$P_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j\right)\Gamma(n-j+2)} T'_{n-2j+1}(z),$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (n-2j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j\right)\Gamma(n-j+2)} U_{n-2j}(z),$$

$$T'_{n+1}(z) = \frac{\pi(n+1)}{2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (2n-4j+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j\right)} P_{n-2j}^{(s)}(z),$$

$$U_n(z) = \frac{\pi}{2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (2n-4j+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j\right)} P_{n-2j}(z),$$

$$P_n^{(s)}(z) = \frac{2^s\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} \frac{(-1)^j \Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j-s\right)\Gamma(n-j-s+2)} T'_{n-2j-s+1}(z),$$

$$P_n^{(s)}(z) = \frac{2^s\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} \frac{(-1)^j (n-2j-s+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j-s\right)\Gamma(n-j-s+2)} U_{n-2j-s}(z),$$

$$T'_{n+1}(z) = \frac{\pi(n+1)\Gamma(2s+1)}{2^{3s+1}s!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (2n-4j+2s+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j+s\right)} P_{n-2j+s}^{(s)}(z),$$

$$U_n(z) = \frac{\pi\Gamma(2s+1)}{2^{3s+1}s!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (2n-4j+2s+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j+s\right)} P_{n-2j+s}^{(s)}(z).$$

Наслідок 7 випливає з теореми 6 і співвідношень (8).

Висновки. Введено систему многочленів комплексної змінної, що споріднені з многочленами Чебишова. Досліджено їх властивості, отримано зображення цих многочленів контурними інтегралами та співвідношення між ними і деякими іншими ортогональними многочленами. Як наслідок отримано інтегральне зображення многочленів Чебишова другого роду та першої похідної многочленів Чебишова першого роду, вирази степенів z^n через них, а також співвідношення між цими многочленами і деякими іншими ортогональними многочленами. Крім того, одержано комбінаторні тотожності, які можна використовуваати для інших досліджень.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 294 с.
2. *Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А.* Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высш. шк., 1970. – 416 с.
3. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 392 с.
6. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.
7. *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Розклад аналітичних в крузі функцій в комплексній області за системою похідних многочленів Лежандра // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – № 687. – С. 105–121.

МНОГОЧЛЕНЫ, РОДСТВЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШОВА

Введена система многочленов комплексного переменного, родственных многочленам Чебышова. Исследованы их свойства, получены изображения таких многочленов контурными интегралами и соотношения между ними и некоторыми другими ортогональными многочленами. Кроме того, доказаны комбинаторные тождества, которые можно использовать в других исследованиях.

POLYNOMIALS RELATED TO THE CHEBYSHEV POLYNOMIALS

A system of polynomials of complex variable related to the Chebyshev polynomials was introduced. Their properties are investigated, representation of such polynomials by contour integrals and relations between them and some other polynomials are obtained. In addition, combinatorial identities that can be used in other researches are proved.

Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
06.09.17