УДК 512.64

А. М. Романів

НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ МАТРИЦЬ ОДНОГО КЛАСУ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

Для неособливих матриць третього порядку над комутативною областю головних ідеалів вказано явний вигляд їх найменшого спільного правого кратного.

Нехай R – комутативна область головних ідеалів з $1 \neq 0$, $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R і нехай $A \in M_n(R)$. Тоді існують такі оборотні матриці P, Q, що

$$PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\text{, де } \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}\text{, } i = 1, \ldots, n-1.$$

Матрицю $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ називають формою Сміта або ж канонічною діагональною формою, а матриці P та Q – лівою та правою перетворювальними матрицями для матриці A.

Нехай A, B – $n \times n$ матриці над R. Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A, а матриця A є правим кратним матриці B. Якщо $M = AA_1 = BB_1$, то матрицю M називають спільним правим кратним матриць A та B. Окрім того, якщо матриця M є лівим дільником кожного іншого спільного правого кратного матриць A та B, то її називають **найменшим спільним правим кратним** матриць A та B (у позначеннях $[A,B]_r$).

У класичній праці І. Капланського [8] досліджено низку задач, що стосуються арифметики кілець матриць над кільцями скінченно породжених головних ідеалів. Зокрема, вивчено питання доповнюваності унімодулярного рядка до оборотної матриці, асоційованості матриць, а також властивості найбільшого спільного дільника елементів таких кілець. Ц. Макдаффі [9] на основі результатів Е. Кахена [6] та А. Шателе [7] запропонував метод знаходження найменшого спільного кратного над комутативною областю головних ідеалів. Такі дослідження продовжив М. Ньюмен, який сформулював задачу, що полягала у встановленні взаємозв'язків між формами Сміта двох матриць та формами Сміта їх найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного. Тут слід виокремити також результати, отримані в працях [2-4] та [11].

У цій статті, за певних обмежень на порядок матриць та на їх канонічні діагональні форми, вказано явний вигляд їх найменшого спільного правого кратного над комутативною областю головних ідеалів.

Нехай A, B – неособливі матриці третього порядку над R. Для них існують такі оборотні матриці P_A, Q_A, та P_B, Q_B, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon) = \mathrm{E},$$

$$P_B B Q_B = \mathrm{diag}(1, 1, \delta) = \Delta.$$

Розглянемо такі множини матриць:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{E}} = \{H \in GL_3(R) \mid \exists\ H_1 \in GL_3(R) : H\mathrm{E} = \mathrm{E}H_1\},$$

$$\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Delta) = \{L \in GL_3(R) \mid \exists\ L_1 \in M_3(R) : L\mathrm{E} = \Delta L_1\}.$$

Множина G_{E} є мультиплікативною групою [5]. Множину $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Delta)$ називають породжувальною [5].

Позначимо через P_A та P_B множини всіх лівих перетворювальних матриць для матриць A та B, відповідно. Згідно з результатами праць [1, 10],

$\mathrm{P}_A = \mathrm{G}_\mathrm{E} P_A$, $\mathrm{P}_B = \mathrm{G}_\Delta P_B$.

Лема 1. *Нехай* $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^3 = S$. *Тоді елемент*

$$((\varepsilon,\delta), s_{31}))$$

є інваріантом для вибору перетворювальних матриць P_B *та* P_A.

Д о в е д е н н я. Нехай F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці для матриць A та B. Тобто $F_A \in \mathrm{P}_A$, $F_B \in \mathrm{P}_B$. Тоді існують такі $H_A \in \mathrm{G}_\mathrm{E}$ та $H_B \in \mathrm{G}_\Delta$, що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Позначимо $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^3$. Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^3$. На підставі наслідку 6 із праці [10]

$$H_B = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \delta h_{31} & \delta h_{32} & h_{33} \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$k_{31} = \delta h_{31} s_{11} + \delta h_{32} s_{21} + h_{33} s_{31} = \delta(h_{31} s_{11} + h_{32} s_{21}) + h_{33} s_{31}.$$

Розглянемо рівність

$$((\varepsilon,\delta), k_{31}) = ((\varepsilon,\delta), \delta(h_{31} s_{11} + h_{32} s_{21}) + h_{33} s_{31}) = ((\varepsilon,\delta), h_{33} s_{31}).$$

Із оборотності матриці H_B випливає, що $(\delta, h_{33}) = 1$. Отже, $((\varepsilon,\delta), h_{33}) = 1$. Таким чином,

$$((\varepsilon,\delta), k_{31}) = ((\varepsilon,\delta), s_{31}).$$

Позначимо $S H_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^3$. Оскільки $H_A^{-1} \in \mathrm{G}_\mathrm{E}$, то згідно з наслідком 6 із праці [10]

$$H_A^{-1} = \begin{Vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ \varepsilon v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ \varepsilon v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$t_{31} = v_{11} s_{31} + \varepsilon v_{21} s_{32} + \varepsilon v_{31} s_{33} = v_{11} s_{31} + \varepsilon(v_{21} s_{32} + v_{31} s_{33}).$$

Розглянемо рівність

$$((\varepsilon,\delta), t_{31}) = ((\varepsilon,\delta), v_{11} s_{31} + \varepsilon(v_{21} s_{32} + v_{31} s_{33})) = ((\varepsilon,\delta), v_{11} s_{31}).$$

Оскільки $(\varepsilon, v_{11}) = 1$, то $((\varepsilon,\delta), v_{11} s_{31}) = ((\varepsilon,\delta), s_{31})$. Отже,

$$((\varepsilon,\delta), t_{31}) = ((\varepsilon,\delta), s_{31}).$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_3(R)$, завершуємо доведення. ◊

Лема 2. *Нехай* $S = \|s_{ij}\|_1^3 \in GL_3(R)$, $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, *де* $\omega_i \,|\, \omega_{i+1}$, $i = 1, 2$, *причому* $\mathrm{E} \,|\, \Omega$ *та* $\Delta \,|\, \Omega$. *Для того, щоб* $S L_A = L_B$, *де* $L_A \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $L_B \in \mathrm{L}(\Omega, \Delta)$, *необхідно та достатньо, щоб* $(a,b) \,|\, s_{31}$, *де* $a = \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)}$, $b = \dfrac{\delta}{(\delta, \omega_1)}$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Оскільки $\mathrm{E}|\Omega$, то матриці L_A та L_B, згідно з наслідком 5 із праці [10], мають вигляд

$$L_A = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_1)} p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_1)} p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}, \quad L_B = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ \dfrac{\delta}{(\delta,\omega_1)} q_{31} & \dfrac{\delta}{(\delta,\omega_2)} q_{32} & q_{33} \end{Vmatrix},$$

відповідно. На підставі властивості 4.8 з праці [5] тут множина $\mathrm{L}(\Omega,\mathrm{E})$ є групою. Тоді $S = L_B L_A^{-1}$, де $L_A^{-1} \in \mathrm{L}(\Omega,\mathrm{E})$. Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_1)}, \frac{\delta}{(\delta,\omega_1)}\right) \Big| s_{31}.$$

Позначивши $a = \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_1)}$, $b = \dfrac{\delta}{(\delta,\omega_1)}$, отримаємо, що $(a,b)|s_{31}$.

Достатність. Нехай $s_{31} = (a,b)t$. Із оборотності матриці S випливає, що $\left(s_{31}, s_{32}, s_{33}\right) = 1$. Тому і $\left(s_{31}, s_{32}, s_{33}, \delta\right) = 1$. На підставі властивості 1.19 з праці [5] існують такі r_1, r_2, що $\left(s_{33} + s_{32}r_2 + s_{31}r_1, \delta\right) = 1$.

Тоді

$$SU = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{Vmatrix} \underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}}_{U} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s'_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s'_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s'_{33} \end{Vmatrix} = S_1,$$

де $s'_{33} = s_{33} + s_{32}r_2 + s_{31}r_1$. Очевидно, що $U \in \mathrm{G}_\mathrm{E}$. Оскільки $(\delta, s'_{33}) = 1$ та $(s'_{13}, s'_{23}, s'_{33}) = 1$, то $(\delta s'_{13}, \delta s'_{23}, s'_{33}) = 1$. Тоді існують такі u_{31}, u_{32}, u_{33}, що

$$\delta s'_{13}u_{31} + \delta s'_{23}u_{32} + u_{33}s'_{33} = 1.$$

Отже, рядок $\begin{Vmatrix} \delta u_{31} & \delta u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix}$ – примітивний, а тому, використовуючи теорему 1.1 із [5], його можна доповнити до оборотної матриці вигляду

$$H_1 = \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ \delta u_{31} & \delta u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix} \in \mathrm{G}_\Delta.$$

Отже,

$$H_1 S_1 = \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ \delta u_{31} & \delta u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s'_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s'_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s'_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ (a,b)g_{31} & g_{32} & 1 \end{Vmatrix} = S_2.$$

Тоді

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -g_{13} \\ 0 & 1 & -g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}}_{H_2} S_2 = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ (a,b)g_{31} & g_{32} & 1 \end{Vmatrix} = \left\| \begin{array}{c|c} K_{11} & 0 \\ \hline K_{21} & 1 \end{array} \right\| = S_3,$$

де $H_2 \in \mathrm{G}_\Delta$. Очевидно, що K_{11} – оборотна матриця. Маємо:

$$\underbrace{\left\|\begin{array}{c:c} K_{11}^{-1} & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right\|}_{H_3}\left\|\begin{array}{c:c} K_{11} & 0 \\ \hdashline K_{21} & 1 \end{array}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (a,b)g_{31} & g_{32} & 1 \end{Vmatrix} = S_4,$$

де $H_3 \in \mathrm{G}_\Delta$. Оскільки $H_1, H_2, H_3 \in \mathrm{G}_\Delta$, то $H_4 = H_3 H_2 H_1 \in \mathrm{G}_\Delta$. Тоді

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (a,b)g_{31} & g_{32} & 1 \end{Vmatrix} = H_4 SU.$$

У кільці R існують такі v_1 та v_2, що $av_1 + bv_2 = (a,b)$. Отже,

$$(a,b)g_{31} = (av_1 + bv_2)g_{31} = av_1 g_{31} + bv_2 g_{31}.$$

Розглянемо матриці

$$H_5 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ bv_2 g_{31} & 0 & 1 \end{Vmatrix} \in \mathrm{L}(\Omega, \Delta), \quad V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -av_1 g_{31} & -g_{32} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{E}).$$

Очевидно, що $H_4 SUV = H_5$. Тоді $SUV = H_4^{-1} H_5$. Оскільки на підставі властивості 4.1 з [5] $H_4^{-1} H_5 = L_B \in \mathrm{L}(\Omega, \Delta)$, $UV = L_A \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{E})$, то $SL_A = L_B$, що і треба довести. ◊

Теорема. *Нехай* R *– комутативна область головних ідеалів і нехай*

$$A \sim \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon), \quad B \sim \mathrm{diag}(1, 1, \delta),$$

$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^3$, $P_B \in \mathrm{P}_B$, $P_A \in \mathrm{P}_A$. *Тоді*

$$[A, B]_r = (L_A P_A)^{-1}\Omega = (L_B P_B)^{-1}\Omega,$$

де

$$\Omega = \mathrm{diag}\left(\frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{31})}, \varepsilon, [\varepsilon, \delta]\right) \text{ – форма Сміта } [A, B]_r,$$

$L_A P_A = L_B P_B$ *– ліва перетворювальна матриця для* $[A, B]_r$, *а матриці* L_A *та* L_B *належать, відповідно, множинам* $\mathrm{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $\mathrm{L}(\Omega, \Delta)$ *та задовольняють рівність* $(P_B P_A^{-1})L_A = L_B$.

Д о в е д е н н я. Відразу ж зауважимо, що згідно з лемою 1 елемент $((\varepsilon, \delta), s_{31})$, а отже, і матриця Ω не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Згідно з теоремою 2 [2] форма Сміта найбільшого спільного лівого дільника матриць A та B має вигляд

$$(A, B)_l \sim \mathrm{diag}\,(1, 1, (\varepsilon, \delta, s_{31})).$$

На підставі теореми 1.18 з [5] виконується рівність

$$\pm \det A \det B = \det(A, B)_l \det[A, B]_r,$$

тобто

$$\det[A, B]_r = \pm \frac{\det A \det B}{\det(A, B)_l} = \pm \frac{\varepsilon^2 \delta}{(\varepsilon, \delta, s_{31})} = \omega_1 \omega_2 \omega_3.$$

З праці [11] випливає, що $\omega_3 = [\varepsilon, \delta]$ та $\omega_2 \mid \varepsilon$. Оскільки $\mathrm{E} \mid \Omega$, то $\varepsilon \mid \omega_2$, тобто $\omega_2 = \varepsilon$. Отже,

$$\omega_1 = \pm\frac{\varepsilon^2\delta(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon^2\delta(\varepsilon,\delta,s_{31})} = \pm\frac{(\varepsilon,\delta)}{(\varepsilon,\delta,s_{31})}.$$

Враховуючи, що інваріантні множники матриці вибирають з точністю до дільників одиниці, тоді форма Сміта найменшого спільного правого кратного матриць A та B буде:

$$\Omega = \mathrm{diag}\left(\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),s_{31})},\varepsilon,[\varepsilon,\delta]\right).$$

З леми 1 з [3] маємо:

$$\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_1)},\frac{\delta}{(\delta,\omega_1)}\right) = \frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_1)} = \mu .$$

Оскільки $\omega_1 = \dfrac{(\varepsilon,\delta)}{(\varepsilon,\delta,s_{31})}$, то

$$\mu = \frac{(\varepsilon,\delta)}{\left((\varepsilon,\delta),\dfrac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),s_{31})}\right)} = \frac{(\varepsilon,\delta)((\varepsilon,\delta),s_{31})}{\left((\varepsilon,\delta)((\varepsilon,\delta),s_{31}),(\varepsilon,\delta)\right)} = ((\varepsilon,\delta),s_{31}) .$$

А це означає, що $\mu | s_{31}$. Тоді згідно з лемою 2 існують такі матриці $L_A \in \mathrm{L}(\Omega,\mathrm{E})$, $L_B \in \mathrm{L}(\Omega,\Delta)$, що $P_B P_A^{-1} L_A = L_B$. Звідси випливає, що

$$P_A^{-1} L_A \Omega = P_B^{-1} L_B \Omega = M .$$

Оскільки $\mathrm{E}|\Omega$ та $\Delta|\Omega$, то на підставі теореми 5 з [10] матриця M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай N – найменше спільне праве кратне матриць A та B. Із доведеного вище випливає, що $N \sim \Omega$. Отже, $N = P_N^{-1}\Omega Q_N^{-1}$. Тоді матриця $M = P_A^{-1} L_A \Omega = P_M^{-1}\Omega$ є правим кратним матриці N: $M = NN_1$. Згідно з теоремою 5 з [10] це рівносильно тому, що $P_N = LP_M$, де $L \in \mathrm{L}(\Omega,\Omega)$. Оскільки $L \in \mathrm{L}(\Omega,\Omega) = \mathrm{G}_\Omega$, то на підставі наслідку 2 з [10] матриці M та N є асоційованими справа. Таким чином, матриця M є найменшим спільним правим кратним матриць A та B. Теорему доведено. ◊

1. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12 – С. 14–21.
2. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Найбільший спільний дільник матриць, одна з яких має один відмінний від одиниці інваріантний множник // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, № 3. – С. 425–430.
3. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісник НТШ. – 2012. – 9. – С. 269–284.
4. *Романів А. М, Щедрик В. П.* Найменше спільне праве кратне матриць з одним відмінним від одиниці інваріантним множником // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 4. – С. 67–74.
5. *Щедрик В. П.* Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2017. – 304 с.
6. *Cahen E.* Theorie des Nombres. – 1914. – I.
7. *Chatelet A.* Groupes Abeliens Finis. – 1924.
8. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
9. *MacDuffee C. C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – 39. – P. 570–573.

10. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – № 2. – P. 79–99.
11. *Thompson R. C.* Left multiples and right divisors of integral matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1986. – 19. – P. 287–295.

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ МАТРИЦ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Для неособенных матриц третьего порядка над коммутативной областью главных идеалов указан явный вид их наименьшего общего правого кратного.

THE LEAST COMMON MULTIPLE OF MATRICES OF ONE CLASS OF MATRICES OVER A COMMUTATIVE PRINCIPAL IDEAL DOMAIN

For a nonsingular matrices of the third order over a commutative principal ideal domain the explicit form of them right lest common multiple is indicated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.10.17