УДК 512.547

И. В. Литвинчук

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДИЭДРАЛЬНЫХ 2-ГРУПП

Доказано, что в случае алгебраически замкнутого поля характеристики 2 *существует бесконечно много размерностей, в каждой из которых диэдральная* 2*-группа порядка* $s = 8, 16$ *имеет бесконечно много точных неразложимых попарно неэквивалентных матричных представлений непостоянного ранга.*

Введение. В работе [2], написанной под влиянием статьи [5] (в которой для конечной группы G и поля характеристики $p > 0$ введено понятие модулей постоянного жорданового типа), рассмотрены свойства различных матричных задач, связанные с рангами матриц. В частности, описаны представления постоянного и непостоянного жорданового типа четверной группы Клейна над алгебраически замкнутым полем характеристики 2; из этого результата следует, что в каждой размерности существует, с точностью до эквивалентности, только конечное число неразложимых представлений постоянного жорданового типа и в каждой четной размерности – бесконечно много неразложимых представлений непостоянного жорданового типа. Случай произвольной элементарной абелевой p-группы G рассмотрен в работе [4]; доказано, что если $p = 2$ и $|G| > 4$ или $p > 2$ и $|G| > p$, то задача об описании представлений постоянного жорданового типа является дикой, т.е. содержит задачу о паре матриц (точное определение диких задач см. в работе [3]).

Свойства, связанные с жордановым типом матриц, можно изучать и для модулярных (т.е. над полем характеристики 2) матричных представлений диэдральных 2-групп, с учетом того, что все, с точностью до эквивалентности, представления этих групп описаны [1, 6].

Рассмотрим одно из таких свойств представлений диэдральных групп.

Представления четверной группы Клейна постоянного и непостоянного рангов. В работе [5] для конечной группы G и поля характеристики $p > 0$ введено понятие модулей постоянного жорданового типа. В частности, для четверной группы Клейна $G_2 = (2,2)$ из стандартными образующими g_1, g_2 и алгебраически замкнутого поля k характеристики 2 это означает (на языке матричных представлений), что самоаннулирующие попарно коммутирующие матрицы A_1, A_2, соответствующие элементам $a_1 = 1 + g_1$, $a_2 = 1 + g_2$, групповой алгебры kG, удовлетворяют следующему условию: жорданова форма матрицы $\alpha A_1 + \beta A_2$, где $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, не зависит от выбора α и β. Поскольку для матрицы, равной в квадрате нулю, жорданова форма однозначно определяется ее рангом, то будем также говорить, что матричное представление имеет постоянный ранг.

Предположим $a = g_1, b = g_2$. Единичную матрицу размерности s обозначим через E_s, а клетку Жордана размерности s с собственным числом λ – через $J_s(\lambda)$. Нулевой столбец матрицы обозначается через $\overline{0}$, а нулевая строка – через $\tilde{0}$.

В работе [2] доказаны следующие утверждения, которые описывают неразложимые представления четверной группы Клейна, имеющие постоянный и непостоянный ранги.

Теорема 1. Представления группы G_2 (над алгебраически замкнутым полем k характеристики 2) вида

a) $a \to (1), b \to (1)$;

b) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \quad \bar{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \bar{0} \quad E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right)$;

d) $a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \bar{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \bar{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right)$,

где $s \geq 1$, образуют полную систему неразложимых попарно неэквивалентных представлений постоянного ранга.

Теорема 2. Представлениями группы G_2 (над алгебраически замкнутым полем k характеристики 2) вида

$$a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & P_s \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & Q_s \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

где $P_s = E_s$, $Q_s = J_s(\lambda)$ и $P_s = J_s(0)$, $Q_s = E_s$, исчерпываются, с точностью до эквивалентности, все неразложимые представления непостоянного ранга.

Из второй теоремы имеем, что с точностью до эквивалентности, в каждой четной размерности число неразложимых представлений непостоянного ранга бесконечно.

Формулировка основных результатов. Рассмотрим представления диэдральных групп $D_8 = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$ и $D_{16} = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^8 = 1 \rangle$ соответственно порядков 8 и 16 над полем k характеристики 2, которое будем считать алгебраически замкнутым. По аналогии с четверной группой Клейна, матричное представление T диэдральной группы называют представлением постоянного ранга (относительно образующих a, b), если ранг матрицы $\alpha(E + T_a) + \beta(E + T_b)$, где $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, не зависит от выбора α и β (E обозначает единичную матрицу).

Теорема 3. Группа D_8 имеет бесконечно много точных неразложимых попарно неэквивалентных представлений произвольной размерности $n = 4m$ (m – натуральное число) с непостоянным рангом.

Теорема 4. Группа D_{16} имеет бесконечно много точных неразложимых попарно неэквивалентных представлений произвольной размерности $n = 6m$ (m – натуральное число) с непостоянным рангом.

Докажем сначала теорему 4 (которую доказать более сложно, чем теорему 3).

Пусть $n = 6m$. Для ненулевого элемента $\lambda \in k$ рассмотрим следующее представление $T = T(n, \lambda)$ (размерности n) группы D_{16}:

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & 0 & E_m \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_m & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_m(\lambda) & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & E_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}.$$

Покажем, что T является представлением группы D_{16}:

$$T_a T_b = \begin{pmatrix} E_m & J_m(\lambda) & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 & E_m & E_m \\ E_m & 0 & E_m & 0 & 0 & E_m \\ 0 & J_m(\lambda) & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & E_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

$$(T_a T_b)^2 = \begin{pmatrix} E_m & J_m(\lambda) & 0 & 0 & J_m(\lambda) & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & E_m \\ 0 & J_m(\lambda) & E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & J_m(\lambda) & J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

$$(T_a T_b)^4 = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 & J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

а следовательно, $(T_a T_b)^8 = E_{2m}$, причем представление T точное.

Предположение. Представления $T(n, \lambda)$ неразложимы и попарно неэквивалентны.

Доказательство. Утверждение следует из классификации неразложимых модулярных представлений диэдральных групп [1]. Приведем явное доказательство. Рассмотрим произвольные представления $T(n, \lambda)$ и $T(n, \bar{\lambda})$, где $\lambda, \bar{\lambda} \neq 0$. Пусть $X = (X_{ij}),\ i, j = 1, 2, \mathbf{K}, 6$ – такая обратимая блочная матрица размерности $n = 6m$ с блоками X_{ij} размерности m, что

$$T_a(n, \lambda)X = XT_a(n, \bar{\lambda}),\quad T_b(n, \lambda)X = XT_b(n, \bar{\lambda}).$$

Из первого равенства следует, что

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} \\ 0 & 0 & 0 & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 0 & 0 & 0 & X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ 0 & 0 & 0 & X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}.$$

Второе равенство рассматриваем в эквивалентной форме $(T_b(n, \lambda) - E_n)X = X(T_b(n, \bar{\lambda}) - E_n)$. Запишем его в развернутом виде (подставив и перемножив матрицы):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ J_m(\lambda)X_{21} & J_m(\lambda)X_{22} & J_m(\lambda)X_{23} & J_m(\lambda)X_{24} & J_m(\lambda)X_{25} & J_m(\lambda)X_{26} \\ 0 & 0 & 0 & X_{31} & X_{32} & X_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{13} & X_{14}J_m(\bar{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{15} \\ X_{23} & X_{24}J_m(\bar{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{25} \\ X_{33} & X_{34}J_m(\bar{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{35} \\ 0 & X_{11}J_m(\bar{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{12} \\ 0 & X_{21}J_m(\bar{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{22} \\ 0 & X_{31}J_m(\bar{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & X_{32} \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем (учитывая обратимость клетки Жордана $J_m(\bar{\lambda})$), что

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & J_m(\lambda)X_{26} & 0 & 0 & 0 & X_{16} \\ 0 & X_{11} & 0 & 0 & 0 & X_{26} \\ 0 & 0 & X_{11} & J_m(\lambda)X_{26}J_m(\bar{\lambda})^{-1} & X_{16} & X_{36} \\ 0 & 0 & 0 & X_{11} & J_m(\lambda)X_{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{11} \end{pmatrix}$$

и, кроме того, $J_m(\lambda)X_{11} = X_{11}J_m(\bar{\lambda})$.

Таким образом, представления $T(n, \lambda)$ и $T(n, \bar{\lambda})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda = \bar{\lambda}$ (с учетом того, что $J_m(\lambda)$ и $J_m(\bar{\lambda})$ не подобные при $\lambda \neq \bar{\lambda}$).

Далее, если положить $\lambda = \bar{\lambda}$, то множество всех матриц X образует алгебру, которая является алгеброй эндоморфизмов представления $T(n, \lambda)$. Из полученного вида матрицы X следует, что эта алгебра является локальной, а значит, представление $T(n, \lambda)$ неразложимо.

Предложение доказано. Из него следует теорема 4.

Теорему 3 доказываем аналогично. Здесь берем представление $T(n, \lambda)$ вида

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix}, \quad b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ J_m(\lambda) & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}.$$

Автор выражает глубокую благодарность проф. В. М. Бондаренко за постановку задачи и ценные советы.

1. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Матем. сб. – 1975. – 96, № 1. – С. 63–74.
2. *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія: Математика і інформатика. – 2012. – 23, № 1. – С. 19–27.
3. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
4. *Bondarenko V. M.; Lytvynchuk I. V.* The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type // Algebra Discrete Math. – 2012. – 14, № 1. – P. 29–36.
5. *Carlson, J. F., Friedlander E. M., Pevtsova J.* Modules of constant Jordan type // J. Reine Angew. Math. – 2008. – 614. – P. 191–234.
6. *Ringel C. M.* The indecomposable representations of the dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – 214. – P. 19–34.

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ МОДУЛЯРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДІЕДРАЛЬНИХ 2-ГРУП

Доведено, що для алгебрично замкнутого поля характеристики 2 існує нескінченно багато розмірностей, в кожній із яких діедральна 2-група порядку s = 8,16 має нескінченно багато точних нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень непостійного рангу.

ON ONE PROPERTY OF MUDULAR REPRESENTATIONS OF THE DIHEDRAL 2-GROUPS

We prove that in the case of an algebraic closed field of characteristic 2 there exist infinitely many dimensions in each of which the dihedral 2-group of order s = 8,16 has infinitely many faithful indecomposable pairwise non-equivalent matrix representations of non-constant rank.

Киевский нац. ун-т
им. Тараса Шевченко, Киев

Получено
01.09.17