

А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, А. А. Бровко, Л. И. Горбач

## О СВОБОДНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*С использованием трехмерной теории упругости исследованы свободные осесимметричные колебания цилиндров из полимерных функционально неоднородных материалов при различных граничных условиях на торцах. Исходные уравнения теории упругости в частных производных при помощи сплайн-аппроксимации и коллокации сведены к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, которая решена устойчивым численным методом дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска. Приведены результаты расчетов частот и форм колебаний в случае изменения свойств материала по толщине цилиндра для различных видов граничных условий.*

**Введение.** В последние годы создаются и исследуются градиентные композиционные материалы как на основе различных металлов и керамики, так и на основе сетчатых полимеров. Они имеют произвольно плавно меняющийся в заданном направлении модуль упругости без каких-либо переходных слоев и границ раздела, причем физические свойства можно регулировать, задавая необходимое распределение модуля упругости в каком-либо из направлений. Градиентные материалы можно использовать в машиностроении, радиопромышленности, приборостроении, медицине и т.д. Общие задачи теории упругости тел из гипотетических градиентных материалов рассмотрены в работах [13–16].

При создании к полимерным градиентным материалам выдвигаются такие требования: поведение материала во всех градиентных зонах должно быть упругим, а не вязкоупругим с широким рабочим интервалом температур, в котором сохраняется градиент свойств [1–3, 17]. Следует иметь в виду, что абсолютно упругих полимерных материалов не существует, и понятие упругого поведения применительно к полимерам условно (под упругим понимают такое поведение, при котором напряжение релаксирует очень медленно).

В настоящем сообщении для изучения свободных колебаний полых цилиндров из градиентных полимерных материалов развит метод сплайн-коллокации, предложенный ранее [5–12]. Свободные колебания цилиндрических тел исследовали достаточно [4, 18, 19], однако о полых цилиндрах с различными условиями закрепления торцов и с переменными свойствами вдоль некоторого направления, что свойственно упругим телам из градиентных материалов, таких сведений мало [20]. С помощью сплайн-функций для решения подобных задач различными дискретно-континуальными методами можно получить более точные результаты, нежели применяя классический аппарат многочленов.

**Основные соотношения.** Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  полый цилиндр длины  $L$  постоянной толщины с внутренним радиусом  $R - H$  и внешним  $R + H$  ( $R$  – радиус срединной поверхности,  $2H$  – толщина цилиндра), изготовленный из неоднородного изотропного материала. В случае осесимметричных радиально-продольных колебаний компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций не зависят от окружной координаты  $\theta$ . При этом уравнения движения принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1)$$

а соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\theta = \frac{1}{r} u_r; \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (2)$$

Систему дополняют соотношения обобщенного закона Гука для ортотропного упругого тела:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda_{11}e_r + \lambda_{12}e_\theta + \lambda_{13}e_z, & \sigma_\theta &= \lambda_{12}e_r + \lambda_{22}e_\theta + \lambda_{23}e_z, \\ \sigma_z &= \lambda_{13}e_r + \lambda_{23}e_\theta + \lambda_{33}e_z, & \sigma_{rz} &= 2\lambda_{55}e_{rz}, \end{aligned} \quad (3)$$

где элементы матрицы жесткости  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r)$ , а также плотность материала цилиндра  $\rho(r)$  – непрерывные и дифференцируемые функции координат  $r$ . Здесь  $t$  – временная координата;  $u_r(r, z, t)$ ,  $u_z(r, z, t)$  – проекции вектора полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных соответственно к координатным линиям  $r, z$ ;  $e_r(r, z, t)$ ,  $e_\theta(r, z, t)$ ,  $e_z(r, z, t)$  – относительные линейные деформации в направлении координатных линий;  $e_{rz}(r, z, t)$  – деформации сдвига;  $\sigma_r(r, z, t)$ ,  $\sigma_\theta(r, z, t)$ ,  $\sigma_z(r, z, t)$  – нормальные напряжения;  $\sigma_{rz}(r, z, t)$  – касательные напряжения.

Элементы  $\lambda_{ij}$  матрицы жесткости можно вычислить через элементы  $c_{ij}$  матрицы податливости по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= (c_{22}c_{33} - c_{23}^2) / \Delta, & \lambda_{12} &= (c_{13}c_{23} - c_{12}c_{33}) / \Delta, \\ \lambda_{13} &= (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) / \Delta, & \lambda_{22} &= (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) / \Delta, \\ \lambda_{23} &= (c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}) / \Delta, & \lambda_{33} &= (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) / \Delta, & \lambda_{55} &= 1 / c_{55}, \\ \Delta &= c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2) - c_{12}(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}) + c_{13}(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}). \end{aligned} \quad (4)$$

В свою очередь элементы матрицы податливости можно выразить через технические постоянные

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{E_r}, & c_{12} &= -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta}, & c_{13} &= -\frac{\nu_{rz}}{E_z}, & c_{22} &= \frac{1}{E_\theta}, & c_{23} &= -\frac{\nu_{\theta z}}{E_z}, \\ c_{33} &= \frac{1}{E_z}, & c_{55} &= -\frac{1}{G_{rz}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $E_z$  – модули упругости в направлениях  $r, \theta, z$  соответственно;  $G_{rz}$  – модуль сдвига;  $\nu_{r\theta}, \nu_{rz}, \nu_{\theta z}$  – коэффициенты Пуассона.

Внутренняя и внешняя боковые поверхности цилиндра ( $r = R - H$  и  $r = R + H$ ) свободны от напряжений, и соответствующие граничные условия принимают вид

$$\sigma_r(R \pm H, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(R \pm H, z, t) = 0 \quad (6)$$

На торцах цилиндра при  $z = 0$  и  $z = L$  возможны условия:

$$\sigma_r = 0, \quad u_r = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad u_r = 0; \quad (7)$$

$$u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad \text{или} \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0; \quad (8)$$

$$u_r = 0, \quad u_z = 0 \quad (9)$$

Предполагаем, что все точки цилиндра совершают гармонические колебания с частотой  $\omega$ , т. е.  $u_\theta(r, z, t) = \hat{u}_\theta(r, z)e^{i\omega t}$  (далее знак  $\hat{\phantom{x}}$  опускаем).

Запишем разрешающее уравнение в перемещениях в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = & \left( -\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\lambda_{11}} \rho \omega^2 \right) u_r - \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\lambda_{55}}{\lambda_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \\ & - \left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial r} - \frac{\lambda_{23} - \lambda_{13}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ & - \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\lambda_{13} + \lambda_{55}}{\lambda_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = & -\frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial z} \frac{u_r}{r} - \left( \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left( 1 + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{55}} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \\ & - \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{\lambda_{55}} \rho \omega^2 u_z - \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{33}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнения (10) так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = & a_{11} u_r + a_{12} \frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{13} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{14} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{15} \frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{16} \frac{\partial u_z}{\partial r} + a_{17} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}; \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = & a_{21} u_r + a_{22} \frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{23} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{24} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + a_{25} u_z + a_{26} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ & + a_{27} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{28} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned} \quad (11)$$

где коэффициенты  $a_{11} = a_{11}(r, z, \omega)$ ,  $a_{24} = a_{24}(r, z, \omega)$  и  $a_{kl} = a_{kl}(r, z)$  ( $k, l \in \{(k, l) | k = 1, 2; l = 1, \dots, 7\} \setminus \{(1, 1), (2, 4)\} \cup \{(2, 8)\}$ ) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} = & -\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\lambda_{11}} \rho \omega^2; & a_{12} = & -\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial z}; & a_{13} = & -\frac{\lambda_{55}}{\lambda_{11}}; \\ a_{14} = & -\left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right); & a_{15} = & -\left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial r} - \frac{\lambda_{23} - \lambda_{13}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r} \right); & a_{16} = & -\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial z}; \\ a_{17} = & -\frac{\lambda_{13} + \lambda_{55}}{\lambda_{11}}; & a_{21} = & -\frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial z} \frac{1}{r}; & a_{22} = & -\left( \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right); \\ a_{23} = & -\frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial z}; & a_{24} = & -\left( 1 + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{55}} \right); & a_{25} = & -\frac{1}{\lambda_{55}} \rho \omega^2; \\ a_{26} = & -\frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{33}}{\partial z}; & a_{27} = & -\frac{\lambda_{33}}{\lambda_{55}}; & a_{28} = & -\left( \frac{1}{r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}} \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

При этом граничные условия (9) на внутренней и внешней поверхностях принимают вид

$$\lambda_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_{12} \frac{u_r}{r} + \lambda_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad \lambda_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0. \quad (13)$$

**Метод решения.** Задачу (10) с соответствующими граничными условиями можно решить с использованием метода сплайн-коллокации.

Для этого разрешающие функции  $u_r(r, z)$ ,  $u_z(r, z)$  представим в виде

$$u_r = \sum_{i=0}^N u_{ri}(r) \phi_i^{(1)}(z); \quad u_z = \sum_{i=0}^N u_{zi}(r) \phi_i^{(2)}(z), \quad (14)$$

где  $u_{ri}(r)$ ,  $u_{zi}(r)$  – искомые функции переменной  $r$ ;  $\phi_i^{(j)}(z)$  ( $j = 1, 2; i = 0, 1, \dots, N$ ) – линейные комбинации, учитывающие граничные условия при  $z = 0$  и

$z = L$ ,  $B$ -сплайнов на равномерной сетке  $\Delta: 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$ . В систему (10) входят производные от разрешающих функций по координате  $z$  не выше второго порядка, и можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени

Подставляя представление (14) в уравнения (10), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации  $\xi_k \in [0, L]$ ,  $k = 0, N$ . Число узлов сетки (с учетом  $z_0$ ) четное, т.е.  $N = 2n + 1$  ( $n \geq 3$ ). Число точек коллокации при этом  $\bar{N} = N + 1$ . В результате получаем систему  $4(N + 1)$  линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $u_{ri}, \vartheta_{ri}, u_{zi}, \vartheta_{zi}$  ( $i = 0, \dots, N$ ):

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r, \omega)\bar{Y}, \quad (R - H \leq r \leq R + H), \quad (15)$$

где  $\bar{Y} = \{u_{r0}, \dots, u_{rN}, \vartheta_{r0}, \dots, \vartheta_{rN}, u_{z0}, \dots, u_{zN}, \vartheta_{z0}, \dots, \vartheta_{zN}\}^T$  – вектор-функция, зависящая от  $r$ ;  $A(r, \omega)$  – квадратная матрица порядка  $4(N + 1) \times 4(N + 1)$ .

Граничные условия для данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать так:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{11}\Phi_1\bar{\vartheta}_r + \bar{\lambda}_{12}\Phi_1\frac{1}{r}\bar{u}_r + \bar{\lambda}_{13}\Phi_2'\bar{u}_z &= 0; \\ \bar{\lambda}_{55}\Phi_1'\bar{u}_r + \bar{\lambda}_{55}\Phi_2\bar{\vartheta}_z &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\bar{\lambda}_{1l}^T = \{\lambda_{1l}(r, \xi_0), \lambda_{1l}(r, \xi_1), \dots, \lambda_{1l}(r, \xi_N)\}$ , ( $l = 1, 2, 3$ );

$$\bar{\lambda}_{55}^T = \{\lambda_{55}(r, \xi_0), \lambda_{55}(r, \xi_1), \dots, \lambda_{55}(r, \xi_N)\},$$

или

$$B_1\bar{Y}(R - H) = \bar{0}, \quad B_2\bar{Y}(R + H) = \bar{0}, \quad (17)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – прямоугольные матрицы порядка  $2(N + 1) \times 4(N + 1)$ .

Краевую задачу (15), (17) на собственные значения можно решить, используя метод дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска [4].

**Анализ результатов.** Для оценки точности предложенной методики сравнивали (табл. 1) обезразмеренные частоты  $\bar{\omega} = \omega H \sqrt{\frac{\rho}{G}}$  колебаний изотропного полого шарнирно опертого по краям цилиндра, полученные с помощью данного подхода при различном числе  $\bar{N}$  точек коллокации, а также с использованием в данном случае возможного представления перемещений в виде

$$u_r = \bar{u}_r(r) \sin \frac{m\pi z}{L}; \quad u_z = \bar{u}_z(r) \cos \frac{m\pi z}{L}, \quad (18)$$

с последующим применением метода дискретной ортогонализации.

Механические и геометрические параметры цилиндра такие:  $\nu = 0,34$ ,  $\rho = 1$ ,  $R = 4$ ,  $L = 10$ ,  $H = 1$ .

Из анализа таблицы видно, что для получения частот колебаний, которые соответствуют большому числу  $m$  полуволн в продольном направлении, необходимо брать больше точек коллокации. Первые две частоты для  $m = 1$  с достаточной точностью можно получить при минимальном их числе.

Таблица 1.

| $\bar{\omega}_i$ | $m$ | Метод сплайн-коллокации |        |        |        |        | Использование представления (18) |
|------------------|-----|-------------------------|--------|--------|--------|--------|----------------------------------|
|                  |     | $\bar{N}$               |        |        |        |        |                                  |
|                  |     | 8                       | 12     | 16     | 20     | 24     |                                  |
| $\bar{\omega}_1$ | 1   | 0,3890                  | 0,3887 | 0,3887 | 0,3887 | 0,3886 | 0,3881                           |
| $\bar{\omega}_2$ | 2   | 0,5020                  | 0,4963 | 0,4953 | 0,4950 | 0,4949 | 0,4943                           |
| $\bar{\omega}_3$ | 1   | 0,5890                  | 0,5888 | 0,5888 | 0,5887 | 0,5887 | 0,5893                           |
| $\bar{\omega}_4$ | 3   | 0,7500                  | 0,7135 | 0,7078 | 0,7062 | 0,7056 | 0,7043                           |
| $\bar{\omega}_5$ | 4   | 1,0345                  | 1,0059 | 0,9876 | 0,9824 | 0,9805 | 0,9781                           |

В табл. 2 приведены частоты  $\bar{\omega} = \omega N \sqrt{\rho_{cp} / E_{cp}}$  свободных колебаний для цилиндров из полимерных функционально градиентных материалов с градиентным полупрофилем [3], соответствующим квадратичному закону изменения модуля Юнга  $E(r) = ar^2 + br + c$ .

Рассматривали такие случаи.

I. Спадающий модуль Юнга ( $E(R - H) = 243,0$  МПа,  $E(R) = 150,0$  МПа,  $E(R + H) = 110,0$  МПа,  $a = 26,5$  МПа,  $b = -278,5$  МПа,  $c = 839,5$  МПа);

II. Возрастающий модуль Юнга ( $E(R - H) = 100,0$  МПа,  $E(R) = 150,0$  МПа,  $E(R + H) = 243,0$  МПа,  $a = 6,5$  МПа,  $b = -59,6$  МПа,  $c = 243$  МПа);

III. Усредненный по толщине модуль Юнга  $E_{cp} = 158,33$  МПа).

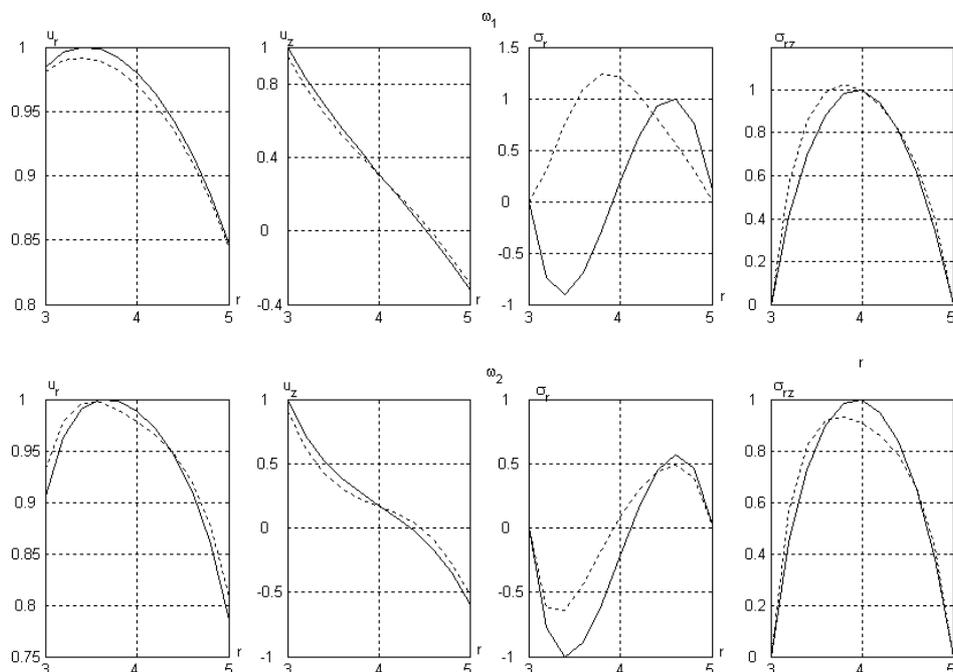
Коэффициент Пуассона выбирали равным  $\nu = 0,4$ , что связано с небольшим различием коэффициентов Пуассона образующих полимерных материалов. Плотность градиентного материала считали постоянной и равной усредненному значению по толщине  $\rho_{cp}$ . Геометрические параметры цилиндра такие: длина -  $L = 5$ , внутренний радиус -  $R_{внут} = R - H = 3$ , внешний -  $R_{внеш} = R + H = 5$ , что соответствует отношению  $H / R = 0,25$ . В скобках рядом с частотами указано количество полуволин в продольном направлении.

Таблица 2.

| $\bar{\omega}_i$ | Шарнирное опирание торцов |            |            | Жесткое закрепление торцов |        |        |
|------------------|---------------------------|------------|------------|----------------------------|--------|--------|
|                  | I                         | II         | III        | I                          | II     | III    |
| $\bar{\omega}_1$ | 0,3094 (1)                | 0,2919 (1) | 0,3019 (1) | 0,4068                     | 0,3917 | 0,4007 |
| $\bar{\omega}_2$ | 0,5981 (2)                | 0,5869 (2) | 0,5969 (2) | 0,6053                     | 0,6053 | 0,6176 |
| $\bar{\omega}_3$ | 0,6543 (1)                | 0,6856 (1) | 0,6788 (1) | 0,6932                     | 0,7321 | 0,7222 |
| $\bar{\omega}_4$ | 0,9556 (3)                | 0,9531 (3) | 0,9619 (3) | 0,9776                     | 0,9730 | 0,9830 |
| $\bar{\omega}_5$ | 1,1269 (2)                | 1,1475 (1) | 1,1844 (1) | 1,1503                     | 1,1441 | 1,1754 |
| $\bar{\omega}_6$ | 1,1700 (1)                | 1,1681 (2) | 1,1863 (2) | 1,1961                     | 1,2429 | 1,2639 |

Из анализа результатов видно, что при различных законах изменения модуля Юнга по толщине происходит перестройка форм, соответствующих пятой и шестой частотам. Значения соответствующих частот, определяемых в порядке возрастания, различаются на 1,5–5,6%.

На рисунке представлены формы колебаний для первой и второй собственных частот цилиндра из однородного (сплошные линии) и неоднородного градиентного (штриховые) материала с законом изменения модуля Юнга (I). Перемещения и напряжения нормированы на максимальное значение модуля соответствующей величины для однородного материала. Неоднородность материала наиболее существенно влияет на распределение напряжений  $\sigma_r$  по толщине цилиндра.



При этом на первой частоте меняется количество полуволн по толщине цилиндра. Для перемещений  $u_r$  и напряжений  $\sigma_{rz}$  в случае закона изменения модуля Юнга (I) наблюдается смещение максимумов к внутренней поверхности цилиндра. Перемещения  $u_z$  у цилиндра из градиентного материала мало меняются по сравнению с цилиндром из однородного как на первой, так и на второй собственной частоте, при этом точка перегиба остается неизменной и расположена на срединной поверхности для материалов разного типа.

1. Аскадский А. А., Голенева Л. М., Бычко К. А. и др. Градиентные полимерные материалы // Рос. хим. журн. – 2001. – **14**, № 3. – С. 123–128.
2. Аскадский А. А., Голенева Л. М., Бычко К. А. Градиентные разномодульные полимерные материалы // Высокомолек. соединения. – 1995. – **37А**, № 5. – С. 829–841.
3. Бровко А. А., Горбач Л. А., Сергеева Л. М. Вязкоупругие свойства и моделирование процесса формирования полиуретан-полиакрилатных градиентных взаимопроникающих полимерных сеток // Полимерный журн. – 2009. – **31**, № 4. – С. 299–310.
4. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 171 с.
5. Григоренко А. Я., Єфімова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченої дов-

- жини методом сплайн-колокацій // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.
6. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Об одном подходе к решению задач об осесимметричных свободных колебаниях сплошных цилиндров // *Прикл. механика.* – 2010. – **46**, № 5. – С. 10–20.
  7. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Об одном подходе к решению задачи о свободных колебаниях сплошного неоднородного цилиндра конечной длины // *Доп. НАН України.* – 2009. – № 9. – С. 67–72.
  8. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-коллокации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // *Прикл. механика.* – 2008. – **44**, № 10. – С. 74–85.
  9. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколова Л. В. Об одном подходе к исследованию свободных колебаний цилиндрических оболочек переменной в круговом направлении толщины в уточненной постановке // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **53**, № 3. – С. 103–115.
  10. Ефимова Т. Л. Решение задач о свободных крутильных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров // *Там же.* – 2008. – **52**, № 1. – С. 92–100.
  11. Ефимова Т. Л. Дослідження вільних неосесимметричних коливань ортотропних та неоднорідних циліндрів з застосуванням методу сплайн-апроксимації // *Вісник Київ. ун-ту. – Сер.: фіз.-мат. науки.* – 2010. – Вып. № 2. – С. 49–52.
  12. Ефимова Т. Л. Численное решение задачи о неосесимметричных свободных колебаниях ортотропных неоднородных цилиндров на основе метода сплайн-коллокации // *Доп. НАН України.* – 2010. – № 3. – С. 58–64.
  13. Кашталян М. Ю., Руцицкий Я. Я. Общее представление решений Хойля–Янгдала в линейной неоднородной изотропной теории // *Прикл. механика.* – 2010. – **46**, № 1. – С. 3–21.
  14. Кашталян М. Ю., Руцицкий Я. Я. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости // *Там же.* – 2010. – **46**, № 2. – С. 3–14.
  15. Кашталян М. Ю., Руцицкий Я. Я. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной изотропной теории упругости для случая зависимости упругих свойств от радиуса // *Там же.* – 2010. – **46**, № 3. – С. 3–13.
  16. Кашталян М. Ю., Руцицкий Я. Я. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости при зависимости упругих постоянных от радиальной координаты // *Там же.* – 2010. – **46**, № 4. – С. 3–13.
  17. Сергеева Л. М., Горбач Л. А. Градиентные взаимопроникающие полимерные сетки: получение и свойства // *Успехи химии.* – 1996. – **65**, № 4. – С. 367–376.
  18. Loy C. T. and Lam K. Y. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // *J. Sound and Vibration.* – 1999. – **226**, № 4. – P. 719–737.
  19. Hutchinson S. R., El-Arhari S. A. Vibration of free hollow circular cylinder // *ASME J. Appl. Mech.* – 1986. – **53**. – P. 641–646.
  20. Pradhan S. C., Loy C. T., Lam K. Y., Reddy J. N. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions // *Appl. Acoustics.* – 2000. – **61**. – P. 111–129.

#### **ПРО ВІЛЬНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРІВ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ З ПОЛІМЕРНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ**

На базі тривимірної теорії пружності вивчено задачу про вільні осесиметричні коливання циліндрів з полімерних функціонально градієнтних матеріалів за різних граничних умов на торцях. Вихідні рівняння теорії пружності в частинних похідних за допомогою сплайн-апроксимації та колокації зведено до задачі на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку, яку розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогона-

*лізації разом з методом покрокового пошуку. Наведено результати розрахунку частот і форм коливань, коли змінюються властивості матеріалу по товщині циліндра, для різних видів граничних умов.*

#### **NATURAL AXISYMMETRIC VIBRATION OF FINITE-LENGTH CYLINDERS FROM POLYMER FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS**

*A problem on natural axisymmetric vibrations of finite-length cylinders from polymer functionally gradient materials under various boundary conditions is considered on the basis of 3D theory of elasticity. The original partial equations of the theory of elasticity, using the spline-approximation and collocation are reduced to the problem for eager values for the high order system of ordinary differential equation. The problem is decided by the study-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search. The calculation results of frequencies and forms are presented for the case of properties variation on the thickness of cylinder for different kinds of boundary conditions.*

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ  
Ин-т хімії високомолекулярних сполук  
НАН України, Київ

Одержано  
08.11.10