УДК 515.12

О. Шукель

ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НОРМАЛЬНИХ ФУНКТОРІВ СКІНЧЕННОГО СТЕПЕНЯ В АСИМПТОТИЧНІЙ КАТЕГОРІЇ

Розглянуто аналоги поняття фінітного нормального функтора скінченного степеня, означеного в категорії компактів Є. В. Щепіним, в асимптотичній категорії Дранішнікова A та асимптотичній категорії Роу R. Встановлено деякі геометричні властивості одержаних функторів. Доведено, що отримані так фінітні нормальні функтори скінченного степеня зберігають клас асимптотично нульвимірних просторів для різних означень асимптотичного виміру.

Вступ. Асимптотичні властивості метричних просторів вперше розглянув М. Громов [11], де, зокрема, означено поняття асимптотичного виміру метричного простору. Останніми роками теорія асимптотичного виміру інтенсивно розвивається. Зокрема, А. Дранішніков і М. Зарічний [10] довели існування універсального простору для просторів асимптотичного виміру n.

Основи загальної теорії функторів у категорії компактів заклав Є. В. Щепін [7]; він запровадив поняття нормального функтора в категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень. Узагальнюючи результати Г. Торуньчика та Дж. Веста [15], а також М. Зарічного [3], В. Федорчук [6] означив поняття цілком метризовного функтора в категорії компактних метричних просторів. Повна метризація функтора F полягає в зіставленні кожній метриці d_X на просторі X метрики $d_{F(X)}$ на просторі $F(X)$, яка задовольняє низку природних властивостей. Зауважимо, що цілком метризовними є функтори гіперпростору (метрика Гаусдорфа), суперрозширення (метрика Фербеека), ймовірносних мір (метрика Канторовича). Природно виникає загальна задача повної метризації функторів, яку можна формулювати також і в некомпактному випадку. Результати, отримані раніше [14], дають відповідь на ці питання для нормального функтора скінченного степеня в асимптотичній категорії. Зокрема, побудовано [14] аналоги поняття нормального функтора скінченного степеня, означеного Є. В. Щепіним у категорії компактних гаусдорфових просторів та неперервних відображень, в асимптотичних категоріях і описано конструкцію, що ставить у відповідність кожній метриці на множині X метрику на множині $F(X)$. Нижче встановлено деякі геометричні властивості таких функторів.

Термінологія і позначення. Асимптотична категорія Дранішнікова (категорія A) за об'єкти має власні метричні простори, а морфізми – метрично власні асимптотично ліпшицеві відображення. Категорія Роу (категорія R) – також одна з важливих категорій в асимптотичній топології [8]. Її об'єктами є власні метричні простори, а морфізмами – грубі відображення.

Метричний простір (X,d) називають *власним*, якщо в ньому кожна замкнена куля $B_r(x_0)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\le r\}$ компактна. Відображення $f:X\to Y$ називають *власним*, якщо прообраз $f^{-1}(C)$ компактний для кожної компактної множини $C\subset Y$, і *метрично власним*, якщо прообраз кожної обмеженої множини обмежений.

Нехай (X,d) і (Y,ρ) – метричні простори. Відображення $f:X\to Y$

називаємо (λ, s)-*ліпшицевим* (тут $\lambda > 0$, $s \geq 0$), якщо

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y) + s, \qquad x, y \in X.$$

Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ є *асимптотично ліпшицеве*, якщо воно є (λ, s)-ліпшицеве для деяких λ, s.

Покриття U простору називають *рівномірно обмеженим*, якщо існує $C > 0$ таке, що $diamU \leq C$ для кожної $U \in \mathrm{U}$.

За Громовим [11], асимптотичний вимір метричного простору X не більший за n ($asdimX \leq n$), якщо для довільного $D > 0$ існують D-диз'юнктні сім'ї U_i $(i = 0, ..., n)$ рівномірно обмежених підмножин простору X такі, що сім'я $\bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{U}_i$ є покриттям простору X. Тут сім'ю U називають D-*диз'юнктною*, якщо для довільних U, $V \in \mathrm{U}$, $U \neq V$, виконується: $\inf\{d(u, v) > d \mid u \in U, v \in V\}$.

Метричний простір X має *асимптотичний вимір Ассуада–Нагати*, який не перевищує n (позначається: $asdim_{AN}(X) \leq n$), якщо існують $C > 0$ та $r_0 > 0$ такі, що для довільного $r > r_0$ існують r-диз'юнктні сім'ї $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, ..., \mathrm{U}_n$ підмножин простору X такі, що сім'я $\mathrm{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{U}_i$ є покриттям простору X та $mesh\mathrm{U} \leq C \cdot r$, де $mesh\mathrm{U} = \sup\{diamU \mid U \in \mathrm{U}\} < \infty$ [9].

Асимптотичний вимір лінійного типу [9] метричного простору X не більший за n, якщо існує $c > 0$ таке, що для довільного $D > 0$ існує $D' > D$ та існує покриття U простору X, яке задовольняє такі властивості:

1) $\mathrm{U} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \mathrm{U}_i$, де кожна сім'я U_i є D'-диз'нктна;

2) $\mathrm{mesh}(\mathrm{U}) < cD'$, де $\mathrm{mesh}(\mathrm{U}) = \sup\{\mathrm{diam}(U) \mid U \in \mathrm{U}\}$.

Носієм точки $x \in F(X)$ називатимемо таку замкнену підмножину $\mathrm{supp}_{F(X)}(x) \subseteq X$, що співвідношення $A \supseteq \mathrm{supp}_{F(X)}(x)$ та $x \in F(A)$ еквівалентні для довільної замкненої підмножини $A \subseteq X$.

Функтор F називають *фінітним*, якщо він переводить скінченні простори в скінченні.

Деякі властивості нормального функтора скінченного степеня в асимптотичній категорії. Зафіксуємо натуральне число n. Нехай K_n позначає категорію множин потужності $\leq n$ і Set_f – категорію скінченних множин. Відомо, що кожен нормальний функтор F степеня $\leq n$ в категорії $Comp$ єдиним чином визначений своїм звуженням на K_n [1, 2]. При цьому кожен об'єкт категорії Set_f ототожнюють з дискретним топологічним простором, а цей простір, будучи скінченним, є об'єктом категорії $Comp$.

Нагадаємо означення фінітного нормального функтора степеня $\leq n$ у категорії $Comp$. Нехай $F : \mathrm{K}_n \to \mathrm{Set}_f$ – функтор, який задовольняє такі властивості:

– $F(\varnothing) = \varnothing$;

– $F(\{*\}) = \{*\}$;

– якщо $i : X \to Y$ є вкладенням, то відображення $F(i) : F(X) \to F(Y)$ теж є вкладенням; (зокрема, якщо $X \subset Y$, то природно ототожнюємо множину $F(X)$ з підмножиною $F(i)(F(X))$ в $F(Y)$);

– $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$; (зокрема, якщо $a \in F(X)$, то множина $\mathrm{supp}(a) = \cap\{A \subset X \mid a \in F(A)\}$ є носієм для a);

– якщо $f : X \to Y$ – відображення і $a \in F(X)$, то $\mathrm{supp}(F(f)(a)) = f(\mathrm{supp}(a))$;

– якщо $f : X \to Y$ – сюр'єктивне відображення, то $F(f) : F(X) \to F(Y)$ теж сюр'єктивне.

Тоді для довільного компактного гаусдорфового простору X простір $F(X)$ є визначений як належно топологізована множина $\lim\limits_{\to}\{F(A) \mid X \supset A - \text{скінченна}\}$ [7]. Наведено [14] приклади фінітних нормальних функторів скінченого степеня. Тепер, маючи функтор $F : \mathrm{K}_n \to \mathrm{Set}_f$, діємо аналогічно, щоб означити функтор в асимптотичній категорії.

Нехай (X, d) – метричний простір. Сім'я $\exp_f X$ непорожніх скінченних підмножин в X є частково впорядкована за вкладенням. Означимо множину $F(X)$ як пряму границю прямої системи $\{F(A), F(\iota_{AB}); \exp_f X\}$. Тут для $A, B \in \exp_f X$ таких, що $A \subset B$, визначаємо $\iota_{AB} : A \to B$ як відображення вкладення. Для довільної $A \in \exp_f X$ ототожнюємо $F(A)$ з відповідною підмножиною в $F(X)$ для відображення $F(\iota_A)$ так, що $\iota_A : A \to X$ є граничним відображенням вкладення. Нехай потужність носіїв є n. Тоді степінь функтора F теж є n.

Для довільних двох відображень $f, g : X \to Y$ з метрикою d на просторі Y визначимо відстань між ними як $\sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Використаємо цей самий символ d для позначення відстані між відображеннями. Маючи нормальний функтор $F : \mathrm{K}_n \to \mathrm{Set}_f$ і метричний простір (X, d), означуємо метричний простір $(F(X), \hat{d})$ таким чином.

Нехай $a, b \in F(X)$, тоді

$$
\begin{aligned}
\hat{d}(a,b) = \quad & \inf\{\sum_{i=1}^{m} d(f_{2i-1}, f_{2i}) \mid f_{2i-1}, f_{2i} : A_i \to X \text{ такі, що існують} \\
& c_i \in F(A_i),\ \mathrm{supp}(c_i) = A_i,\ i = 1, \dots, m, \text{ такі, що} \\
& a = F(f_1)(c_1),\ F(f_2)(c_1) = F(f_3)(c_2), \\
& \dots, \\
& F(f_{2m-1})(c_m) = F(f_{2m-2})(c_{m-1}),\ F(f_{2m})(c_m) = b\}.
\end{aligned}
$$

Кажемо, що відображення $f_1, \dots, f_{2m}$ та елементи $c_1, \dots, c_m$ утворюють ланцюг між a та b. Номер m – довжина цього ланцюга.

Доведено [14] , що введена на множині $F(X)$ функція $\hat{d}$ є метрика.

Зауваження 1. *Для означеної вище метрики* $\hat{d}$ *виконуються такі оцінки:*

якщо $a, b \in F(X),\ a \neq b$, то $\alpha \le \hat{d}(a,b) \le 2\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(a) \cup \mathrm{supp}(b))$, де $\alpha = \min\{d(x,y) \mid x \in \mathrm{supp}(a), y \in \mathrm{supp}(b) \mid x \neq y\} > 0$.

Таким чином, отримано функтор скінченного степеня в асимптотичній категорії.

Означення 1. *Якщо* $F : \mathrm{K}_n \to \mathrm{Set}_f$ *– функтор, описаний вище (для* *нього зберігаємо те саме позначення* F*), то отримуємо функтор, який називаємо нормальним фінітним функтором степеня* $\leq n$ *в асимптотичній категорії.*

В асимптотичній категорії розглядаємо метрично власні асимптотично ліпшицеві відображення. Постає запитання, чи зберігає ці відображення означений вище функтор? Нагадаємо, що метричний простір (X, d) називають дискретним, якщо існує $c > 0$ таке, що $d(x, y) \geq c$ для кожних $x, y \in X, x \neq y$.

Віддаль Громова–Гаусдорфа $d_{GH}(X, Y)$ між метричними просторами X, Y – це інфімум відстаней між $i(X)$ та $j(Y)$ для ізометричних вкладень $i : X \to Z$, $j : Y \to Z$ в деякий метричний простір Z.

Лема 1. *Нехай* (X, d) *– метричний простір. Тоді* X *грубо ізоморфний деякому дискретному метричному просторові.*

Доведення. Нехай $c > 0$. Позначимо через Y максимальну c-сітку в X, тобто максимальний за включенням простір $Y \subset X$ такий, що $d(x, y) \geq c$ для кожних $x, y \in Y$, $x \neq y$. Існування такого простору Y випливає з леми Цорна. Тоді $d_{GH}(X, Y) \leq c$, і сформульоване вище твердження леми 1 випливає з Твердження 1.2 з праці [8]. ◊

Лема 2. *Нехай* (X, d) *– дискретний метричний простір. Тоді кожне асимптотично ліпшицеве відображення* $f : X \to Y$*, де* (Y, ρ) *– метричний простір, є ліпшицеве.*

Доведення. Нехай f – (λ, s)-ліпшицеве відображення, c – константа з означення дискретного метричного простору. Приймемо $\lambda' = \lambda + \frac{s}{c}$. Тоді, якщо $x, y \in X$, то :

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + s \leq \lambda d(x, y) + s\frac{d(x, y)}{c} = \lambda' d(x, y),$$

тобто f – λ-ліпшицеве відображення. ◊

Зазначимо, що за лемою **1** кожен метричний простір грубо ізоморфний дискретному метричному просторові. Позначимо через A_d категорію, об'єктами якої є дискретні метричні простори, а морфізмами – асимптотично ліпшицеві відображення.

Твердження 1. *Нехай* $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ *– асимптотично ліпшицеве відображення дискретних метричних просторів,* F *– нормальний функтор зі скінченними носіями. Тоді* $F(f) : (F(X), \hat{d}) \to (F(Y), \hat{\rho})$ *– асимптотично ліпшицеве відображення.*

Доведення. Нехай $a, b \in F(X)$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існують $c_1 \in F(A_1), ..., c_k \in F(A_k)$ для деяких скінченних множин $A_1, ..., A_k$ та відображення $f_{2i-1}, f_{2i} : A_i \to X$, $i = 1, ..., k$, такі, що

$$F(f_1)(c_1) = a, F(f_{2i})(c_{i-1}) = F(f_{2i+1})(c_i),\ i = 1, ..., k-1, F(f_k)(c_k) = b$$

і $\sum_{i=1}^{k} d(f_{2i-1}, f_{2i}) = \hat{d}(a, b) + \varepsilon.$

Оскільки кожне асимптотично ліпшицеве відображення дискретних просторів є ліпшицеве (див. лему **2**), то існує $\lambda > 0$ таке, що $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ для кожних $x, y \in X$.

Тоді одержуємо:

$F(ff_1)(c_1) = F(f)(a),\ F(ff_{2i})(c_{i-1}) = F(ff_{2i+1})(c_i),\ i = 1,\dots,k-1,$

$F(ff_k)(c_k) = F(f)(b).$

Звідси випливає, що

$$\hat{\rho}(F(f)(a), F(f)(b)) \le \sum_{i=1}^{k} \rho(ff_{2i-1}, ff_{2i}) \le \lambda \sum_{i=1}^{k} d(f_{2i-1}, f_{2i}) \le \lambda(\hat{d}(a,b) + \varepsilon).$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ − довільне, то одержуємо, що $F(f)$ − ліпшицеве відображення. ◊

Наслідок 1. *Якщо F − фінітний нормальний функтор зі скінченними носіями, то описана конструкція з означення* **1** *визначає коваріантний функтор в категорії A_d .*

Наслідок 2. *Означений вище функтор F зберігає нерозтягуючі відображення.*

Для кожного нормального функтора скінченного степеня $F : \mathrm{K}_n \to \mathrm{S}et_f$ означене відображення $\eta_X : X \to F(X)$ (див. [5]); відображення η_X ставить у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $\eta_X(x)$ таку, що $\mathrm{supp}(\eta_X(x)) = \{x\}$.

Твердження 2. *Нехай (X,d) − метричний простір. Відображення $\eta_X : (X,d) \to (F(X), \hat{d})$ є ізометричне вкладення.*

Доведення. Нехай $x, y \in X$ і $d(x,y) = \alpha$. Розглянемо відображення

$f_1, f_2 : \{*\} \to X, f_1(*) = x,\ f_2(*) = y.$

Нехай $c = \eta_{\{*\}}(*)$ − єдина точка з множини $F(\{*\})$. З рівності $d(f_1, f_2) = d(f_1(*), f_2(*)) = d(x,y)$ випливає, що $\hat{d}(\eta_X(x), \eta_X(y)) \le d(x,y).$

Доведемо, що $\hat{d}(\eta_X(x), \eta_X(y)) \ge d(x,y).$

Справді, припустивши протилежне, матимемо, що існують відображення $f_{2i-1}, f_{2i} : A_i \to X, i = 1,\dots,k,$ і $c_i \in F(A_i)$ такі, що:

$F(f_1)(c_1) = \eta_X(x), F(f_{2i})(c_i) = F(f_{2i+1})(c_{i+1}),\ i = 1,\dots,k-1, F(f_{2k})(c_k) = \eta_X(y),$

причому $\sum_{i=1}^{k} d(f_{2i-1}, f_{2i}) < d(x,y).$ Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\mathrm{supp}(c_i) = A_i,\ i = 1,\dots,k.$ Індуктивно побудуємо послідовність $z_1,\dots,z_k,\ z_i \in A_i,\ i = 1,\dots,k$. Нехай $z_1 \in A_1$ − довільне. Припустимо, що точки $z_i,\ i < j$, вже вибрані, де $j \le k$. Тоді нехай z_j − довільне таке, що $f_{2j-1}(z_j) = f_{2j-2}(z_{j-1})$. Очевидно, що $f(z_k) = y$.

Маємо тоді $d(x,y) \le \sum_{i=1}^{k} d(f_{2i-1}(z_i), f_{2i}(z_i)) \le \sum_{i=1}^{k} d(f_{2i-1}, f_{2i}) < d(x,y),$ що призводить до суперечності. ◊

Лема 3. *Нехай $x \in X$ і $r > 0$. Тоді для кожного $a \in F(X)$ умови $\mathrm{supp}(a) \subset B_r(x)$; $\hat{d}(a, \eta_X(x)) < r$ еквівалентні.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) Нехай $A = \mathrm{supp}(a)$, $f_1 : \mathrm{supp}(a) \to X$ − вкладення і $f_2 : \mathrm{supp}(a) \to \{x\} \subset X$ − стале відображення. Тоді $\hat{d}(a, \eta_X(x)) \le d(f_1, f_2) < r.$

2) $\Rightarrow$ 1) Нехай $\hat{d}(a, \eta_X(x)) < r$ і $y \in \mathrm{supp}(a)$. Існують

A_i, f_i та $c_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$ з означення метрики $\hat{d}$, тобто, $\sum_{i=1}^{k} d(f_{2i-1}, f_{2i}) < r$.

Тоді існують точки $z_i \in A_i$ такі, що

$f_1(z_1) = y, f_{2i}(z_i) = f_{2i+1}(z_{i+1}), i = 1, .., k-1, f_{2k}(z_k) = x.$

Звідси $d(x, y) \le d(y, f_2(z_1)) + d(f_2(z_1), f_2(z_2)) + \ldots + d(f_{2k-1}(z_k), x) < r$. ◊

Твердження 2. *Нехай* $f : X \to Y$ *– метрично власне відображення. Тоді відображення* $F(f) : F(X) \to F(Y)$ *теж метрично власне.*

Доведення. Нехай $A \subset F(Y)$ – обмежена множина. Тоді існує $a \in F(Y)$ і $r > 0$ таке, що $A \subseteq \hat{B}_r(a)$ (через $\hat{B}$ позначаємо відповідні кулі в $F(X)$). Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $a = \eta_Y(y)$.

За лемою **3** одержуємо, що для кожного $c \in A, \mathrm{supp}(c) \subset B_r(y)$. Оскільки відображення f метрично власне, то існують $x \in X$ та $s > 0$ такі, що $f^{-1}(B_r(y)) \subset B_s(x)$. З умови збереження прообразів випливає, що для кожного $b \in (F(f))^{-1}(A)$ маємо: $\mathrm{supp}(b) \subset B_s(x)$.

Знову ж таки, за лемою **3**, отримуємо, що $\hat{d}(b, \eta_X(x)) < s$. Остаточно одержуємо: $F(f)^{-1}(A) \subset \hat{B}_s(\eta_X(x))$, тобто відображення $F(f)$ є метрично власне. ◊

Нехай (X, d) – метричний простір і $Y \subset X$. Тоді $F(Y) \subset F(X)$. Наведений нижче приклад показує, що метрика, індукована на $F(Y)$ з $(F(X), \hat{d})$, взагалі кажучи, відмінна від метрики $\hat{d}\,|_Y$ (тут через $d\,|_Y$ позначаємо обмеження метрики d на Y).

Приклад 1.

Нехай $F = \exp_2 \coprod \exp_2$ (тут $\coprod$ означає суму в категорії функторів; див. [4]). Розглянемо $X = \{x, y, z\}$ і метрику d на X означимо умовами:

$$d(x, y) = d(y, z) = 1,\ d(x, z) = 2.$$

Нехай $Y = \{x, z\}$. Існує дві різні точки $a, b \in F(Y) \subseteq F(X)$ такі, що $\mathrm{supp}(a) = \mathrm{supp}(b) = \{x, z\}$. Легко бачити, що $\hat{d}(a, b) \le 2$, оскільки можна прийняти $A_1 = A_2 = Y, f_1 = 1_{A_1}, f_2 = f_3$ – стале відображення в точку $\{y\}$, $f_4 = 1_{A_2}$. З іншого боку, покажемо, що $\hat{d}\,|_Y\,(a, b) = 4$.

Справді, нехай $A_i, c_i, f_{2i-1}, f_{2i}, i = 1, \ldots, k,$ взяті з означення метрики $\hat{d}$. Оскільки $a \ne b$, то існує таке i, що $f_{2i}(A_i) = f_{2i+1}(A_{i+1}) = \{*\}$. Тоді $\hat{d}\,|_Y\,(a, b) \ge d(1_Y, f_{2i}) + d(1_Y, f_{2i+1}) = 4$.

Нерівність $\hat{d}\,|_Y\,(a, b) \le 4$ очевидна.

Узагальнення на випадок S **-контрольованого асимптотичного виміру**. Задачу збереження функторами скінченного степеня класичного виміру dim розглядав В. Басманов [1, 2]. Він отримав певні точні оцінки для цього виміру. Аналоги цих оцінок для асимптотичного виміру отримані в праці [13].

Далеким узагальненням асимптотичного виміру та асимптотичного виміру Ассуада–Нагати є так званий S-контрольований асимптотичний вимір, означений в [12] для напівгруп S неперервних функцій на R_+. Доведено [14], що введений нормальний функтор в асимптотичній категорії зберігає нульовий асимптотичний вимір в сенсі Громова та нульовий асимптотичний вимір Ассуада–Нагати. Доведемо, що цей функтор зберігає нульовий S-контрольований асимптотичний вимір. З усіма необхідними поняттями та термінами можна ознайомитись у праці [12].

Дамо означення S-контрольованого асимптотичного виміру.

Нехай S – асимптотично контрольована напівгрупа. Метричний простір (X,d) має S-контрольований асимптотичний вимір більший або рівний за n (позначають $asdim_S X \le n$), якщо існує функція $f \in S$ та $s_0 > 0$ такі, що для довільного $s > s_0$ існує s-диз'юнктне покриття U простору X таке, що $\mathrm{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{U}_i$ і кожна сім'я U_i є $f(s)$-обмежена.

Наступна теорема є узагальненням [12] у випадку просторів нульового асимптотичного виміру.

Теорема 3. *Нехай F – функтор скінченного степеня в асимптотичній категорії, означений вище. Тоді для кожного метричного простору X такого, що $asdim_S X = 0$, маємо $asdim_S F(X) = 0$.*

Доведення. Нехай X – метричний простір і $asdim_S X = 0$. Тоді існує функція $f \in S$ та $s_0 > 0$ такі, що для кожного $s > s_0$ існує s-диз'юнктне покриття U простору X таке, що $\mathrm{mesh}\ \mathrm{U} < f(s)$. З побудови покриття $\tilde{\mathrm{U}}$ в доведенні теореми 3.1 з праці [14] випливає, що існує $N \in N$ таке, що $\mathrm{mesh}\ \tilde{\mathrm{U}} < N \mathrm{mesh}\ \mathrm{U} < N f(s)$.

За означенням контрольованої напівгрупи, не зменшуючи загальності, можна вважати, що існує $g \in S$ така, що $g(s) \ge N$ для кожного $s \ge s_0$. Тоді $Nf(s) \le (g \circ f)(s)$ і отримуємо: $\mathrm{mesh}\ \tilde{\mathrm{U}} < (g \circ f)(s)$.

Доведення S-диз'юнктності сімей U_i таке ж саме, як і в теоремі 3.1 з праці [14].

Це означає, що $asdim_S F(X) = 0$.◊

Зауваження 2. *Отриманий результат виконується і для асимптотичного виміру лінійного типу.*

Автор висловлює подяку професору М. Зарічному за керівництво та допомогу під час написання цієї статті.

1. *Басманов В. Н.* Размерность и некоторые функторы с конечными носителями // Вестник МГУ. Сер. Математика и механика. – 1981. – № 6. – С. 48–50.
2. *Басманов В. Н.* Ковариантные функторы, ретракты и размерность // ДАН СССР. – 1983. – **271**, № 5 – С. 1033–1036.
3. *Заричный М. М.* Итерированные суперрасширения // Общая топология – М.: МГУ, 1986. – **167**. – С. 45–59.
4. *Зарічний М. М.* Категорія нормальних функторів // Вісник ЛДУ. Сер. мех.-мат. – 1986. – № 25. – С. 52–56.
5. *Федорчук В. В.* О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 5. – С. 169–208.

6. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Извест. АН СССР. – Сер. Математика. – 1990. – **54**, № 2. – С. 396–417.
7. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 3. – С. 3–62.
8. *Dranishnikov A.* Asymptotic topology // Russian Math. Surveys. – 2000. – **55**, No. 6. – P. 71–116.
9. *Dranishnikov A. N., Smith J.* On asymptotic Assouad–Nagata dimension // Topol. Appl. – 2007. – **154**, № 4. – P. 934–952.
10. *Dranishnikov A., Zarichnyi M.* Universal spaces for asymptotic dimension // Topol. Appl. – 2004. – **140**, No. 2–3. – P. 203–225.
11. *Gromov M.* Asymptotic invariants for infinite groups // Lecture Note Ser.– 1993. – **182**. – 295 p.
12. *Higes J.* Theoria de la dimension en espacions metricos: MS Thesis (Dimension theory on metric spaces). – Departamento de Geometria y Topologia. Universidad Computense de Madrid, 2006. – 116 p.
13. *Radul T., Shukel' O.* Functors of finite degree and asymptotic dimension // Матем. студії. – 2009. – **31**, № 2. – С. 204–206.
14. *Shukel' O.* Functors of finite degree and asymptotic dimension zero // Матем. студії. – 2008. – **29**, № 1. – С. 101–107.
15. *Torunczyk H., West A.* Hilbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **89**, № 2. – P. 329–335.

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

Рассмотрены аналоги понятия нормального финитного функтора конечной степени, определенного в категории компактов Е. В. Щепиным, в асимптотической категории Дранишникова *A* и асимптотической категории Роу *R*. Исследованы некоторые геометрические свойства полученных функторов. Доказано, что определенные таким образом финитные нормальные функторы конечной степени сохраняют класс пространств нулевой асимптотической размерности для разных определений асимптотической размерности.

SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF NORMAL FUNCTORS OF FINITE DEGREE IN THE ASYMPTOTIC CATEGORY

A paper is devoted to the investigation of geometric properties of functors in the asymptotic category. The notion of normal finite functor of finite degree in the asymptotic category is defined. It proved some geometric properties of this functors. Also it is proved that the considered functors preserve the class of asymptotic dimension zero for various definitions of asymptotic dimension.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
12.10.10