УДК 517.95

Н. П. Процах

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ПАМ'ЯТІ В НЕЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Встановлено розв'язність мішаної задачі для ультрапараболічного рівняння, яке містить інтегральний оператор. Знайдено класи областей, в яких існує єдиний розв'язок цієї задачі. Отримано деякі оцінки її розв'язку.

Задачі для ультрапараболічних рівнянь здебільшого вивчали у циліндричних областях. Зокрема, праці [4–6, 8, 9] встановлюють умови існування єдиного розв'язку мішаної задачі для ультрапараболічних рівнянь зі степеневими нелінійностями в просторах Соболєва. Праця [7] розвиває ці результати для області, яка може розширюватися чи звужуватися з часом за однією з груп просторових змінних. Отримано [6, 9, 13] деякі оцінки розв'язку при зростанні часової змінної для класів нелінійних ультрапараболічних рівнянь у циліндричних областях.

Під час дослідження розв'язності мішаних задач для гіперболічних та параболічних рівнянь у працях [10, 11] використано метод штрафу, а в [1, 2, 12] – перехід до циліндричної області. Знайдені умови існування розв'язку мішаних задач залежать від типу області та ядра інтегральних операторів.

Нижче в нециліндричній області розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке містить інтегральний оператор. Знайдено класи областей, які з часом можуть розширюватися чи звужуватися, в яких існує єдиний розв'язок цієї задачі. Залежно від вихідних даних задачі встановлено оцінки її розв'язку .

Нехай $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, $D \subset \mathrm{R}^l$ – обмежені області з межами $\partial\Omega \in C^1$ та $\partial D \in C^1$ відповідно; T – фіксоване число з проміжка $(0,\infty)$; $\alpha(t), t \in [0,T]$ – неперервно диференційовна функція така, що $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 0$ для всіх t, $\Omega_t = \{x : x = \alpha(t) \cdot z,\, z \in \Omega\}$, $x \in \Omega_t, y \in D$, $0 < t < T$, $Q_\tau = \{(x,y,t) : x \in \Omega_t,$ $y \in D,\, 0 < t < \tau\}$, $\tau \in (0,\infty)$, $Q \equiv Q_\infty$, $G = \Omega_t \times D$.

В області Q_T для довільного $T > 0$ розглянемо мішану задачу

$$u_t + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i x_i}(x,y,s)\,ds = f(x,y,t); \tag{1}$$

$$u\,|_{S_T^1} = 0; \tag{2}$$

$$u\,|_{\Sigma_T} = 0; \tag{3}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{4}$$

де $S_T = \{(x,y,t) : x \in \Omega_t, y \in \partial D, 0 < t < T\}$; $\Sigma_T = \{(x,y,t) : x \in \partial\Omega_t, y \in D,$ $0 < t < T\}$, $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0\}$,

$S_T^2 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) \geq 0\}$, ν – зовнішня нормаль до S_T.

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 60–70.

Введемо простори

$$V_1(Q) = \{v : v \in H^1(Q), v\,|_{S_T^1} = 0,\ v\,|_{\Sigma_T} = 0\},$$

$$V_2(Q) = \{v : v \in L^2(Q), v_{x_i} \in L^2(Q), i = 1,\dots,n, v\,|_{\Sigma_T} = 0\}.$$

Означення 1. Функцію u з простору $V_1(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ назвемо розв'язком мішаної задачі (1)–(4), якщо вона задовольняє умову (4) та рівність

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} [u_t v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\, u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\, u_{x_i} v_{x_j} - \\ -\sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_0^t g(t-s)\, u_{x_i}\, ds \right) v_{x_i} - f(x,y,t) v]\, dxdydt = 0\end{gathered} \tag{5}$$

для всіх функцій $v \in V_2(Q_T)$.

Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови

(A): $a_{ij} \in L^\infty(0,T; C(\overline{G})), a_{ij} = a_{ji}, \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq a_0\,|\,\xi\,|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i,j = 1,\dots,n$, a_0 – додатна стала;

(G): $g(t) \in C^1([0,T])$;

(L): $\lambda_i \in L^\infty(0,T; C(\overline{G}))$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i = 1,\dots,l$;

(F): $f \in L^2(Q_T)$;

(U): $u_0 \in L^2(G)$.

Нехай $\tilde{Q}_T = \Omega \times D \times (0,T)$; $\tilde{G} = \Omega \times D$; $\tilde{\Sigma}_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$; $\tilde{S}_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$.

Розглянемо в області $\tilde{Q}_T$ допоміжну задачу

$$\begin{gathered} w_t + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i(z,y,t) w_{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} w_{z_i} z_i - \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\tilde{a}_{ij}(z,y,t)}{(\alpha(t))^2} w_{z_i} \right)_{z_j} - \\ -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2} w_{z_i z_i}(z,y,s)\, ds = \tilde{f}(z,y,t); \end{gathered} \tag{6}$$

$$w\,|_{\tilde{S}_T^1} = 0, \tag{7}$$

$$w\,|_{\tilde{\Sigma}_T} = 0, \tag{8}$$

$$\tilde{w}(z,y,0) = u_0(z,y), \tag{9}$$

де $\tilde{S}_T^1 = \{(z,y,t) \in \tilde{S}_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i(z,y,t) \cos(\nu_1, z_i) < 0\}$;

$\tilde{S}_T^2 = \{(x,z,t) \in \tilde{S}_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i(z,y,t) \cos(\nu_1, z_i) \dots 0\}$, ν_1 – зовнішня нормаль до $\tilde{S}_T$; коефіцієнти рівняння (6) та (1) пов'язані співвідношеннями $\tilde{\lambda}_i(z,y,t) = \lambda_i(\alpha(t)z, y, t)$, $\tilde{a}_{ij}(z,y,t) = a_i(\alpha(t)z, y, t)$, $\tilde{f}(z,y,t) = f(\alpha(t)z, y, t)$.

Припускатимемо, що виконується умова

(S) : існує $\Gamma_1 \subset R^{l-1}$ таке, що $\mathrm{mes}\,\Gamma_1 > 0$ і поверхню $\tilde{S}_T^1$ можна подати у вигляді $\tilde{S}_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$.

Також припустимо, що $S_T^1 = \{(x,y,t) : x \in \Omega_t, y \in \Gamma_1, t \in (0,T)\}$.

Позначимо $\Gamma_2 = \partial D \setminus \Gamma_1$.

Означення 2. Функцію w з простору $V_1(\tilde{Q}_T) \cap C([0,T]; L^2(\tilde{G}))$ назвемо розв'язком мішаної задачі (6)–(9), якщо вона задовольняє умову (9) та рівність

$$\int_{\tilde{Q}_T} [w_t\tilde{v} + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i(z,y,t) w_{y_i}\tilde{v} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} z_i w_{z_i}\tilde{v} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ij}(z,y,t)}{(\alpha(t))^2} w_{z_i}\tilde{v}_{z_j} - \left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2} w_{z_j}(z,y,s)\, ds \right) \tilde{v}_{z_i} - \tilde{f}(x,y,t)\tilde{v}]\, dz\, dy\, dt = 0 \tag{10}$$

для всіх функцій $\tilde{v} \in V_2(\tilde{Q}_T)$.

Між задачами (1)–(4) та (6)–(9) існує такий зв'язок: якщо функція w є розв'язком задачі (6)–(9), то функція $u(x,y,t) \equiv w(\frac{x}{\alpha(t)}, y, t)$, $(x,y,t) \in Q$, є розв'язком задачі (1)–(4).

Справді, внаслідок заміни $z = \frac{x}{\alpha(t)}$, де $\alpha(0) = 1$, з рівності (10) після позначення $w(\frac{x}{\alpha(t)}, y, t) = u(x,y,t)$, $\frac{\tilde{v}(\frac{x}{\alpha(t)}, y, t)}{(\alpha(t))^n} = v(x,y,t)$ одержимо рівність (5).

Нехай $\inf\limits_{0 \le t < \infty} \alpha(t) = \alpha_0 > 0$, $\sup\limits_{0 \le t < \infty} \alpha(t) = \alpha_1$. Позначимо $V_3(\tilde{G}) = \{v : v \in L^2(\tilde{G}),$ $v_{x_i} \in L^2(\tilde{G}),\ i = 1,\dots,n\}$.

Лема. *Нехай виконується одна з умов: 1)* $g' \le 0$, $\alpha' \le 0$ *або* $\alpha' \ge 0$, $\int_0^\infty g(\xi)d\xi < \infty$. *Тоді для довільного* $\tau \in [0,\infty)$ *та функцій* $g \in C([0,\infty))$ *і* $w \in L^2(0,\infty, V_3(\tilde{G}))$ *виконується оцінка*

$$\int_{\tilde{Q}_\tau} \left(\int_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{z_i}(z,y,s)}{(\alpha(s))^2} ds \right) w_{z_i}(z,y,t)\, dzdydt \le \le \chi \int_{\tilde{Q}_\tau} \sum_{i=1}^{n} |w_{z_i}|^2 dzdydt - \frac{1}{2} \int_{\Pi_\tau} g\Box \frac{\nabla_z w}{\alpha} dydt, \tag{11}$$

де $\Pi_\tau = (0,\tau) \times D$; $g\Box\nabla_z w = \int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i=1}^{n} |w_{z_i}(z,y,s) - w_{z_i}(z,y,t)|^2 dzds$, а $\chi = g(0)\left(\int_0^\infty \frac{1}{(\alpha(\xi))^2} d\xi \right)$, якщо функції g та α спадають на $[0,\infty)$, та $\chi = \int_0^\infty g(\xi)d\xi$, якщо функція α зростає на $[0,\infty)$, а функція g така, що вказаний інтеграл існує.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що

$$I \equiv \int\limits_{\tilde{Q}_\tau}\left(\int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n \frac{w_{z_i}(z,y,s)}{(\alpha(s))^2}ds\right)w_{z_i}(z,y,t)\;dz\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_\tau}\left(\int\limits_0^t \frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2}\left(\int\limits_{\tilde{\Omega}}\sum_{i=1}^n(|\,w_{z_i}(z,y,s)\,|^2 + |\,w_{z_j}(z,y,t)\,|^2 - |\,w_{z_i}(z,y,s) -\right.\right.$$

$$\left.\left.- w_{z_i}(z,y,t)\,|^2)\;dz\right)\right)ds\,dy\,dt \equiv I_1 + I_2 - \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_\tau} g\Box\frac{\nabla_z w}{\alpha}dydt.$$

Розглянемо такі випадки:

а) g та α спадають на $[0,\infty)$. Тоді $g(t-s) < g(0)$, $\dfrac{1}{\alpha(s)} < \dfrac{1}{\alpha(t)}$. Тому

$$I_1 + I_2 \le \frac{1}{2}g(0)\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{(\alpha(\xi))^2}d\xi\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N\,|^2 dzdydt;$$

б) α зростає на $[0,\infty)$. Тоді $\dfrac{1}{\alpha(s)} < \dfrac{1}{\alpha(0)} = 1$. Тому

$$I_1 \le \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{\tilde{G}}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N(z,y,s)\,|^2 dzdyds\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_s^\tau g(t-s)dt\int\limits_{\tilde{G}}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N(z,y,s)\,|^2 dzdy\right]ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_0^{\tau-s} g(\xi)d\xi\int\limits_{\tilde{G}}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N(z,y,s)\,|^2 dzdy\right]ds \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty g(\xi)d\xi\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N(z,y,t)\,|^2\;dz\,dy\,dt$$

та

$$I_2 \le \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_0^t g(t-s)ds\int\limits_{\tilde{G}}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N(z,y,t)\,|^2 dzdy\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_0^t g(\xi)d\xi\int\limits_{\tilde{G}}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N\,|^2 dzdy\right]dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty g(\xi)d\xi\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |\,w_{z_i}^N(z,y,t)\,|^2 dzdydt.$$

Врахувавши отримані оцінки, одержимо (11). ◊

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (G), (L), (F), (U), (S) та одна з умов: а)* $g' \le 0$, $\alpha' \le 0$ *або б)* $\alpha' \ge 0$, $\int\limits_0^\infty g(\xi)d\xi < \infty$. *Якщо, крім того,* $\alpha(t) \in C^2[0,\infty), \alpha(0) = 1$, $\left|\dfrac{\alpha''}{\alpha}\right| < +\infty$; $\tilde{a}_{iz_i}, \tilde{a}_{iy_j}, \tilde{a}_{it} \in L^\infty(Q_T)$, $\tilde{f}_{y_j}, \tilde{f}_t \in L^2(\tilde{Q}_T)$, $u_0 \in V_3(\tilde{G}), i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,l$; $g' \in C([0,T])$; $f\,|_{\tilde{S}_T^1} = 0$ *та* $\dfrac{a_0}{\alpha_1^2} - \chi > 0$, *то існує розв'язок мішаної задачі (6)–(9).*

Д о в е д е н н я. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональна база простору $H_0^2(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, де φ^k – власні функції задачі $\Delta_z u = \nu u$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$, які відповідають власним значенням ν_k; $\{\psi^m\}_{m=1}^{\infty}$ – ортогональна база простору $\{v : v \in H^1(D),\, v\,|_{\Gamma_1} = 0\}$, ортонормована в $L^2(D)$, де ψ^m $(m \geq 1)$ – власні функції задачі

$$\Delta_y u = \mu u, \quad u\Big|_{\Gamma_1} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{12}$$

які відповідають власним значенням μ_m. Тут $\Delta_z = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial z_n^2}$; $\Delta_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial y_l^2}$.

Нехай $w^N(z,y,t) = \sum\limits_{k,m=1}^{N} c_{k,m}^N(t)\varphi^k(z)\psi^m(y)$, $N \in N$, де $c_{k,m}^N(t)$, $\{k,m\} = 1,\ldots,N$, є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}\int\limits_{\tilde G}[w_t^N\varphi^k(z)\psi^m(y) + \sum_{i=1}^{l}\tilde\lambda_i(z,y,t)w_{y_i}^N\varphi^k(z)\psi^m(y) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}w_{z_i}^N z_i\varphi^k(z)\psi^m(y) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\tilde a_{ij}(z,y,t)}{(\alpha(t))^2}w_{z_i}^N(\varphi^k(z))_{z_j}\psi^m(y) - \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^t\frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2}w_{z_i}^N(z,y,s)ds\right)\times \\ \times(\varphi^k(z))_{z_j}\psi^m(y) - \tilde f(z,y,t)\varphi^k(z)\psi^m(y)]dxdy = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

$$c_{k,m}^N(0) = u_{0,k,m}^N;\; w_0^N(z,y) = \sum_{k,m=1}^{N}u_{0,k,m}^N\varphi^k(z)\psi^m(y),\; \lim_{N\to\infty}\left\|w_0^N - u_0\right\|_{V_3(\tilde G)} = 0. \tag{14}$$

Згідно з теоремою Каратеодорі [3] розв'язок цієї задачі існує і належить до простору $C^1([0,\tau_0])$, де $\tau_0 \leq T$. Домножимо (13) на $c_{k,m}^N(t)e^{-\nu t}$, $\nu = \operatorname*{ess\,sup}_{Q} |\,\tilde\lambda_{iy_i}\,| + 2$, підсумуємо за k і m від 1 до N та проінтегруємо за t від 0 до τ. Одержимо:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\tilde Q_\tau}[w_t^N w^N + \sum_{i=1}^{l}\tilde\lambda_i(z,y,t)w_{y_i}^N w^N - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}w_{z_i}^N z_i w^N + \\ + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\tilde a_{ij}(z,y,t)}{(\alpha(t))^2}w_{z_i}^N w_{z_j}^N - \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2}w_{z_i}^N(z,y,s)ds\,w_{z_j}^N - \\ - \tilde f(z,y,t)w^N]e^{-\nu t}dzdydt = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Оцінимо доданки отриманої рівності окремо:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\limits_{\tilde Q_\tau}w_t^N w^N e^{-\nu t}dzdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{\tilde G_\tau}(w^N)^2e^{-\nu t}dzdy - \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_{\tilde G_0}(w_0^N)^2e^{-\nu t}dzdy + \frac{\nu}{2}\int\limits_{\tilde Q_\tau}(w^N)^2e^{-\nu t}dzdydt;\end{aligned}$$

$$I_2 = -\int\limits_{\tilde Q_\tau}w^N\sum_{j=1}^{n}w_{z_j}^N\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_je^{-\nu t}dzdydt = n\int\limits_{\tilde Q_\tau}(w^N)^2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}e^{-\nu t}dzdydt;$$

$$I_3 = \int_{\tilde{Q}_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(z,y,t) \frac{w_{z_i}^N w_{z_j}^N}{(\alpha(t))^2} e^{-\nu t} dzdydt \geq a_0 \int_{\tilde{Q}_\tau} \frac{\sum_{i=1}^{n} | w_{z_i}^N |^2}{(\alpha(t))^2} e^{-\nu t} dzdydt;$$

$$I_4 = \int_{\tilde{Q}_\tau} \sum_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i(z,y,t) w_{y_i}^N w^N e^{-\nu t} dzdydt = \frac{1}{2} \int_{S_2} \sum_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i \, | w^N |^2 \, e^{-\nu t} d\sigma -$$

$$- \frac{\lambda^1 l}{2} \int_{\tilde{Q}_\tau} (w^N)^2 e^{-\nu t} dzdydt,$$

де $\lambda^1 = \operatorname*{esssup}_{Q} | \tilde{\lambda}_{iy_i} |$.

Врахувавши лему 1, знайдемо:

$$I_5 = -\int_{\tilde{Q}_\tau} \left(\int_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{z_i}^N(z,y,s)}{(\alpha(s))^2} ds \right) w_{z_i}^N(z,y,t) e^{-\nu t} dzdydt \geq$$

$$\geq -\chi \int_{\tilde{Q}_\tau} \sum_{i=1}^{n} | w_{z_i} |^2 \, e^{-\nu t} dzdydt + \frac{1}{2} \int_{\Pi_\tau} g \square \frac{\nabla_z w}{\alpha} e^{-\nu t} dydt.$$

Далі

$$I_6 = \int_{\tilde{Q}_\tau} \tilde{f}(z,y,t) w^N e^{-\nu t} dzdydt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\tilde{Q}_\tau} (\tilde{f}(z,y,t))^2 e^{-\nu t} dzdydt + \frac{1}{2} \int_{\tilde{Q}_\tau} (w^N)^2 e^{-\nu t} dzdydt.$$

Тоді з (15) маємо

$$\int_{\tilde{G}_\tau} (w^N)^2 e^{-\nu\tau} dzdy + \int_{\tilde{Q}_\tau} \left[\left(1 + n \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \right) (w^N)^2 + \left(\frac{2a_0}{\alpha_1^2} - 2\chi \right) \sum_{i=1}^{n} | w_{z_i}^N |^2 \right] \times$$

$$\times e^{-\nu t} dzdydt + \int_{\Pi_\tau} g \square \frac{\nabla_z w^N}{\alpha} e^{-\nu t} dydt + \int_{S_2} \sum_{i=1}^{l} \tilde{\lambda} \, |_{S_2} \, (w^N)^2 e^{-\nu t} d\sigma \leq \tag{16}$$

$$\leq \int_{\tilde{Q}_\tau} (\tilde{f}(z,y,t))^2 e^{-\nu t} dzdydt + \int_{\tilde{G}_0} (w_0(z,y))^2 dzdy.$$

З (16) та умови теореми 1 одержимо:

$$\int_{\tilde{G}_\tau} (w^N)^2 e^{-\nu\tau} dzdy + \int_{\tilde{Q}_\tau} \left[(w^N)^2 + \sum_{i=1}^{n} | w_{z_i}^N |^2 \right] e^{-\nu t} dzdydt +$$

$$+ \int_{\Pi_\tau} g \square \frac{\nabla_z w^N}{\alpha} e^{-\nu t} dydt \leq M_1 \left(\int_{\tilde{Q}_\tau} \tilde{f}^2 dzdydt + \int_{D_0} (u_0)^2 dzdy \right), \tag{17}$$

де стала M_1 не залежить від N та T.

Домножимо (13) на власне значення задачі (12) $-\mu_m e^{-\nu t}$ та замінимо вираз $-\mu_m u^N$ на $-\Delta_y u^N$ згідно з (12). Матимемо:

$$\int_{\tilde{Q}_\tau} \left[-(w_t^N - \sum_{i=1}^{n} w_{z_i}^N \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} z_i) \sum_{k=1}^{l} w_{y_k y_k}^N + \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i(z,y,t) w_{y_i}^N w_{y_k y_k}^N - \right.$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}(z,y,t)\frac{w_{z_i}^N}{(\alpha(t))^2}\sum_{k=1}^{l}w_{y_k y_k z_i}^N+\left(\int_0^t\frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2}\sum_{i=1}^{n}w_{z_i}^N ds\right)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{l}w_{y_k y_k z_i}^N\Bigg]e^{-\nu t}dzdydt=-\int_{\tilde{Q}_\tau}\tilde{f}(z,y,t)\sum_{k=1}^{l}w_{y_k y_k}^N e^{-\nu t}dzdydt. \tag{18}$$

Оцінимо доданки цієї рівності окремо:

$$I_1=-\int_{\tilde{Q}_\tau}w_t^N\sum_{j=1}^{l}w_{y_j y_j}^N e^{-\nu t}dzdydt=\frac{1}{2}\int_{\tilde{G}_\tau}\sum_{j=1}^{l}(w_{y_j}^N)^2 e^{-\nu\tau}dzdy-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\tilde{G}_0}\sum_{j=1}^{l}(w_{0y_j}^N)^2dzdy+\frac{\nu}{2}\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{j=1}^{l}(w_{y_j}^N)^2e^{-\nu t}dzdydt;$$

$$I_2=\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}w_{z_i}^N\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i w_{y_j y_j}^N e^{-\nu t}dzdydt=-\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}w_{z_i y_j}^N\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i\times$$
$$\times w_{y_j}^N e^{-\nu t}dzdydt=\frac{n}{2}\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{j=1}^{l}(w_{y_i}^N)^2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}e^{-\nu t}dzdydt;$$

$$I_3=-\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\frac{w_{z_i}^N}{(\alpha(t))^2}\sum_{k=1}^{l}w_{y_k y_k z_j}^N e^{-\nu t}dzdydt\geq$$
$$\geq a_0\int_{\tilde{Q}_\tau}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}|w_{z_i y_k}^N|^2}{(\alpha(t))^2}e^{-\nu t}dzdydt;$$

Використавши лему, знайдемо:

$$I_4=\int_{\tilde{Q}_\tau}\int_0^t\frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2}\sum_{i=1}^{n}w_{z_i}^N ds\sum_{j=1}^{l}w_{y_j y_j z_i}^N e^{-\nu t}dzdydt=$$
$$=-\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\left(\int_0^t\frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2}w_{z_i y_j}^N ds\right)w_{y_j z_i}^N e^{-\nu t}dzdydt\geq$$
$$\geq-\chi\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}|w_{z_i y_j}^N|^2e^{-\nu t}dzdydt+\frac{1}{2}\int_{\Pi_\tau}\sum_{i=1}^{l}g\square\frac{\nabla_z w_{y_i}^N}{\alpha(t)}e^{-\nu t}dzdydt;$$

$$I_5=-\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{i=1}^{l}\tilde{\lambda}_i w_{y_i}^N\sum_{j=1}^{l}w_{y_j y_j}^N e^{-\nu t}dzdydt=\int_{S_2}\sum_{j=1}^{l}\tilde{\lambda}_i\,|w_{y_i}^N|^2e^{-\nu t}d\sigma-$$
$$-\lambda^1\int_{\Pi_\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(w_{y_j z_i}^N)^2e^{-\nu t}dzdydt;$$

$$I_6=-\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{j=1}^{l}\tilde{f}w_{y_i y_i}^N e^{-\nu t}dzdydt\leq\frac{1}{2}\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{j=1}^{l}(\tilde{f}_{y_i})^2e^{-\nu t}dzdydt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\tilde{Q}_\tau}\sum_{j=1}^{l}(w_{y_i}^N)^2e^{-\nu t}dzdydt;$$

З (18) маємо:

$$\int_{\tilde{G}_\tau}\sum_{i=1}^{l}(w_{y_i}^N)^2e^{-\nu\tau}dzdy+\int_{S_2}\sum_{i=1}^{l}\tilde{\lambda}_i(w_{y_i}^N)^2d\sigma+\int_{\tilde{Q}_\tau}\left[\left(1+n\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)(w_{y_i}^N)^2+\right.$$

$$+\left(\frac{a_0}{(\alpha_1)^2}-\chi\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\left.|\,w_{z_iy_j}^N\,|^2\right]e^{-\nu t}dzdydt+\int_{\Pi_\tau}\sum_{j=1}^{l}g\square\frac{\nabla_z w_{y_i}^N(t)}{\alpha(t)}\times$$
$$\times e^{-\nu t}dydt\le\int_{\tilde Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\tilde f_{y_i}^2e^{-\nu t}dzdydt+\int_{\tilde G_0}\sum_{i=1}^{l}u_{0y_i}^2dzdy. \tag{19}$$

Звідси

$$\int_{\tilde G_\tau}\sum_{i=1}^{l}(w_{y_i}^N)^2e^{-\nu\tau}dzdy+\int_{\tilde Q_\tau}\left[(w_{y_i}^N)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}|\,w_{z_iy_j}^N\,|^2\right]e^{-\nu t}dzdydt+$$
$$+\int_{\Pi_\tau}\sum_{j=1}^{l}g\square\frac{\nabla_z w_{y_i}^N(t)}{\alpha(t)}e^{-\nu t}dydt\le M_2\left(\int_{\tilde Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\tilde f_{y_i}^2dzdydt+\int_{\tilde G_0}\sum_{i=1}^{l}u_{0y_i}^2dzdy\right), \tag{20}$$

де стала M_2 не залежить від N та T.

Диференціюємо (13) по t, домножимо на $c_{ijt}^N(t)$ та проінтегруємо за змінною t:

$$\int_{\tilde Q_\tau}\left[(w_{tt}^N-\sum_{i=1}^{n}w_{z_it}^N\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i-\sum_{i=1}^{n}w_{z_i}^N\frac{\alpha''(t)\alpha(t)-(\alpha'(t))^2}{(\alpha(t))^2}z_i)w_t^N+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{l}(\tilde\lambda_{it}(z,y,t)w_{y_i}^N+\tilde\lambda_i(z,y,t)w_{y_it}^N)w_t^N+\sum_{i,j=1}^{n}(\tilde a_{ijt}(z,y,t)\frac{w_{z_i}^N}{(\alpha(t))^2}+$$
$$+\tilde a_{ij}(z,y,t)\frac{w_{z_it}^N}{(\alpha(t))^2}+\tilde a_{ij}(z,y,t)\frac{-2w_{z_i}^N\alpha'(t)}{(\alpha(t))^3}w_{z_it}^N-g(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{z_i}^N}{(\alpha(t))^2}w_{z_it}^N-$$
$$\left.-\left(\int_0^t g'(t-s)\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{z_i}^N}{(\alpha(s))^2}ds\right)w_{z_it}^N\right]dzdydt=\int_{\tilde Q_\tau}f_t(z,y,t)w_t^Ndzdydt, \tag{21}$$

Оцінивши доданки цієї рівності, подібно до оцінок рівностей (15) та (18), та врахувавши, що $\left|\frac{\alpha''}{\alpha}\right|<C,\left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right|<C$, отримаємо оцінку

$$\int_{\tilde G_\tau}(w_t^N)^2e^{-\nu\tau}dzdy+\int_{\tilde Q_\tau}\left[(w_t^N)^2+\sum_{i=1}^{n}|\,w_{z_it}^N\,|^2\right]e^{-\nu t}dzdydt+$$
$$+\int_{\Pi_\tau}g\square\frac{\nabla_z w_t^N(t)}{\alpha(t)}e^{-\nu t}dydt\le M_3\left(\int_{\tilde Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^{l}\tilde f_{y_i}^2+f^2+f_t^2\right]dzdydt+\right. \tag{22}$$
$$\left.+\int_{\tilde G_0}\left[\sum_{i=1}^{l}u_{0y_i}^2+u_{0t}^2+u_0^2\right]dzdy\right),$$

де стала M_3 не залежить від N та T.

З оцінок (17), (20), (22) випливає існування такої підпослідовності послідовності $\{w^N\}_{N=1}^{\infty}$ (за якою збережемо те саме позначення), що при $N\to\infty$

$$w^N\to w,\ w_t^N\to w_t\ *-\text{слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\tilde G)),$$
$$w_{z_i}^N\to w_{z_i}\ \text{слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\tilde G)),\ \ w_{y_j}^N\to w_{y_j}\ \text{слабко в } L^2(\tilde Q),$$

$i=1,\ldots,n,\ j\in 1,\ldots,l.$ З рівності (13) та отриманих збіжностей випливає, що w – розв'язок задачі (6)–(9).

Доведемо єдиність її розв'язку. Нехай існує два розв'язки задачі (6)–(9) w_1 та w_2. Тоді їхня різниця $w \overset{def}{=} w_1 - w_2$ задовольнятиме рівність

$$\int_{\tilde{Q}_T}[w_t w + \sum_{i=1}^{l}\tilde{\lambda}_i(z,y,t)w_{y_i}w - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i w_{z_i}w + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\tilde{a}_{ij}(z,y,t)}{(\alpha(t))^2}\times$$
$$\times w_{z_i}w_{z_j} - \left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{g(t-s)}{(\alpha(s))^2}w_{z_i}(z,y,s)ds\right)w_{z_i}]\,dzdydt = 0 \tag{23}$$

та нульову початкову умову. Врахувавши умови, накладені на коефіцієнти рівняння (6), аналогічно до доведення нерівності (17), одержимо рівність

$$\int_{D_\tau}(w^N)^2dzdy + \int_{\tilde{Q}_\tau}\left[(w^N)^2 + \sum_{i=1}^{n}|w_{z_i}^N|^2\right]dzdydt + \int_{\Pi_\tau}g\,\frac{\nabla w^N}{\alpha}dydt \le 0, \tag{24}$$

тобто, $w = 0$, а отже, і $w_1 = w_2$. ◊

Для розв'язку задачі (1)–(4) виконується нерівність Пуанкаре–Фрідріхса

$$\int_G u^2dxdy \le C_1\int_G\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\,dxdy, \tag{25}$$

де стала C_1 залежить тільки від n та області G.

Позначимо $\nu_0 = n\cdot\inf\limits_{t\in[0,T]}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \lambda^1 + C_1\left(\frac{2a_0}{\alpha_1^2} - 2\chi\right).$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, функція* $u_0 \not\equiv 0$, *число* $\nu_0 > 0$.

Тоді, якщо

1) функція $f \equiv 0$, то

$$\int_G u^2dxdy \le \left(\int_{G_0}u_0^2(x,y)dxdy\right)e^{-\nu_0 t}; \tag{26}$$

2) функція $f(x,y,t)$ для всіх $(x,y)\in G$ задовольняє умову $f(x,y,t) \le f(x,y,0)e^{-Ct}$, де C – додатна стала, $\sup|\alpha(t)| < C_3$, то існує така стала $C_2 > 0$, що для розв'язку задачі (1)–(4) виконується оцінка

$$\int_G u^2dxdy \le \left(\int_{G_0}u_0^2dxdy + C_2\right)e^{-\nu t} \tag{27}$$

для $\nu = \nu_0$, якщо $\nu_0 < 2C$ та $0 < \nu < 2C$, якщо $\nu_0 > 2C$.

Доведення. Аналогічно до доведення оцінки (16), застосувавши нерівність Пуанкаре–Фрідріхса (25), отримуємо нерівність

$$\int_{G_\tau}u^2dxdy + \nu_0\int_{Q_\tau}u^2dxdydt \le M_1\left(\int_{Q_\tau}f^2dxdydt + \int_{G_0}u_0^2dxdy\right). \tag{28}$$

Позначимо $\eta(t) = \int_{G_t}u^2dxdy$. З (28) маємо

$$\eta'(t) \le -\nu_0\eta(t) + M_1\int_{G_t}f^2dxdy. \tag{29}$$

Якщо $f \equiv 0$, то з (29) маємо $\eta(t) \le \eta(0)e^{-\nu_0 t}$.

Якщо $f(x,y,t) \le f(x,y,0)e^{-Ct}$, то з (29) одержимо $\eta'(t) \le -\nu_0\eta(t) + C_4 e^{-2Ct}$, де $C_4 = \sup_G f(x,y,0) \mid \Omega \parallel D \mid C_3$.

Звідси випливає, що існує така стала $C_2 > 0$, що

$$\eta(t) \le (\eta(0) + C_2)e^{-\nu t} \tag{30}$$

де $\nu = \nu_0$, якщо $\nu_0 < 2C$ та $0 < \nu < 2C$, якщо $\nu_0 > 2C$. ◊

1. *Алхутов Ю. А.* L_p разрешимость задачи Дирихле для уравнений теплопроводности в нецилиндрических областях // Мат. сб. – 2002. – **193**, № 9. – С. 3–40.
2. *Камынин Л. И., Масленникова В. Н.* О решении первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрических областях // Там же. – 1962. – **57 (99)**, № 2. – С. 241–264.
3. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
4. *Лавренюк С., Оліскевич М.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 99–114.
5. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1192–1210.
6. *Процах Н. П.* Властивості розв'язків мішаної задачі для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Там же. – 2009. – **61**, № 6. – С. 795–809.
7. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння в нециліндричній області // Наук. вісник Чернів. ун-ту: Математика. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – Вип. 501. – С. 74–81.
8. *Lascialfari F., Morbidelli D. A* boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Diff. Equat. – 1998. – **23**, № 5, 6. – P. 847–868.
9. *Lavrenyuk S., Protsakh N.* Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – **38**. – P. 131–146.
10. *Lions J.-L.* Une remarque sur les problemes d'evolution nonlineaires dans les domaines non cylindriques // Rov. Romaine Pures Appl. Math. – 1964. – **9**. – P. 11–18.
11. *Medeiros L. A.* Non-linear wave equations in domains with variable boundary // Arch. Rational Mech. Anal. – 1972. – **47**, № 1. – P. 47–58.
12. *Santos M.L., Rocha M.P.C., Braga P.L.O.* Global solvability and asymptotic behaviour for a nonlinear coupled system of viscoelastic waves with memory in a noncylindrical domain // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **325**. – P. 1077–1094.
13. Schonbek M. E., Suli E. Decay of the total variation and Hardy norms of solutions to parabolic conservation laws // Nonlinear Analysis. – 2001. – **45**. – P. 515–528.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ПАМЯТИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Доказана разрешимость смешанной задачи для ультрапараболического уравнения с интегральным оператором. Найдены классы областей, в которых существует единственное решение задачи. Получены некоторые оценки решения задачи.

MIXED PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH MEMORY TERM IN NONCYLINDRICAL DOMAIN

The solvability of mixed problem for ultraparabolic equation with the integral operator is established. Some classes of domains where the solution of the mixed problem exists and is unique are found. Some estimates of the solution of the mixed problem are obtained.

Нац. лісотехнічний ун-т України, Львів;
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.10.10