УДК 511.42+511.72

В. С. Ільків[1,2], І. Я. Савка[2]

МЕТРИЧНА ОЦІНКА ДИСКРИМІНАНТА МНОГОЧЛЕНА НА ЛІНІЙНОМУ МНОГОВИДІ

Встановлено метричну оцінку знизу для дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на лінійному многовиді.

Під час дослідження задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема задач з нелокальними умовами, виникає потреба оцінки знизу дискримінанта характеристичного многочлена диференціального рівняння [4, 6]. Цю оцінку використовують для доведення існування розв’язку цих задач у певних шкалах функціональних просторів (просторів Соболєва).

Формулювання задачі, основні позначення та припущення. Нехай $L(\lambda, x, \xi)$ – многочлен парного степеня n за змінними λ та ξ

$$L(\lambda, x, \xi) \equiv \lambda^n + B_1(\xi)\lambda^{n-1} + \ldots + B_n(\xi) + g(x, \xi) \equiv l(\lambda, \xi) + g(x, \xi), \qquad (1)$$

а функція $D(x, \xi)$ – дискримінант многочлена $L(\lambda, x, \xi)$ за змінною λ, де $l(\lambda, \xi) \equiv \lambda^n + B_1(\xi)\lambda^{n-1} + \ldots + B_n(\xi)$; $g(x, \xi) = x_1\xi_1^n + \ldots + x_p\xi_p^n$; $B_j(\xi) = \sum\limits_{|s| \le j} B_j^s \xi^s$, $B_j^s \in \mathrm{R}$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathrm{Z}_+^p$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathrm{R}^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{R}^p$. Позначимо $\|x\| = \left(x_1^2 + \ldots + x_p^2\right)^{1/2}$, $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_p\xi_p$.

Припущення щодо коефіцієнтів многочлена $L(\lambda, x, \xi)$ такі: B_j^s – фіксовані дійсні числа, x_j – параметри; вектор параметрів x належить лінійному многовиду (площині) M, що задається системою лінійних алгебричних рівнянь

$$Ax^T = b^T, \qquad (2)$$

де $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{r,p}$ – прямокутна матриця розміру $r \times p$ з дійсними елементами; $b = (b_1, \ldots, b_r)$ – дійсний вектор; T – операція транспонування.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $r < p$ і матриця A_0, яка складена з перших r стовпців матриці A, є невироджена.

Розглянемо питання про оцінку знизу степенем $\tilde{k}^{-\delta}$ величин $D(x, k)$, $k \in \mathrm{Z}^p$, де $\tilde{k} = \left(1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2\right)^{1/2}$, $\delta \in \mathrm{R}$, за великих значень $\tilde{k}$, та про міру множини векторів $x \in M$, для яких справджується ця оцінка, тобто про можливість виконання нерівності

$$|D(x, k)| \ge \tilde{k}^{-\delta} \qquad (3)$$

на лінійному многовиді M для деякого дійсного числа δ.

Нерівність (3) характеризує діофантові властивості многочлена L на лінійному многовиді M. Вона не завжди виконується; наприклад, за фіксованих $k \in \mathrm{Z}^p$ та $x \in M$ для жодного дійсного числа δ, якщо многочлен $L(\cdot, x, \xi)$ має кратні корені.

Проблему оцінювання дискримінанта (встановлення оцінки (3)) розглянуто у монографії [6] для незалежних параметрів $x_1, \ldots, x_p$ та в працях [2, 7] – для одновимірного достатньо гладкого многовиду (гладкої кривої).

Допоміжні леми. Для доведення основного результату роботи використовуватимемо допоміжні леми.

Лема 1 [3]. *Нехай* $f : [y', y''] \to \mathrm{R}$ *– така функція однієї змінної* y, *що* $f \in C^m[y', y'']$ *і* $| f^{(m)}(y) | \geq \sigma > 0$ *для всіх* $y \in [y', y'']$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність* $\operatorname{meas}\{y \in [y', y''] : |f(y)| < \varepsilon\} \leq 2m\sqrt[m]{\varepsilon/\sigma}$.

Для формулювання та доведення наступної леми введемо такі множини: Π – p-вимірний паралелепіпед, зокрема $\Pi = \prod_{i=1}^{p}[x_i', x_i'']$, Π_j – $(p-1)$-вимірний паралелепіпед вигляду $\Pi_j = \prod_{i=1, i\neq j}^{p}[x_i', x_i'']$, $j = 1, \ldots, p$, де x_i' і x_i'' – такі фіксовані числа, що $x_i' < x_i''$.

Лема 2. *Нехай* $f : \Pi \to \mathrm{R}$, $f \in C^m(\Pi)$, *і нехай функція* f *задовольняє систему диференціальних рівнянь із частинними похідними*

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m} = f_i, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

де f_i – деякі сталі. Якщо вектор $z = (z_1, \ldots, z_p)$ є неортогональний до вектора $F = (f_1, \ldots, f_p)$, то для довільного $\varepsilon > 0$ виконується оцінка

$$\operatorname{meas}\{x \in \Pi : |f(x)| < \varepsilon\} \leq c_1 \sqrt[m]{\varepsilon \, \mathrm{P}\, z \, \mathrm{P} \, / \, | (z, F) |},$$

де $c_1 = 2m\sqrt[2m]{p} \max_{i=1,\ldots,p} \operatorname{meas}\Pi_i$.

Доведення. Нехай $|f_j| = \max_{i=1,\ldots,p} |f_i|$, тоді $j \in \{1, \ldots, p\}$ і справджується нерівність

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right| = |f_j| \geq \frac{|(z, F)|}{\|z\| \sqrt{p}}.$$

Оскільки за фіксованих $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_p$ функція $f(x)$ задовольняє умови леми 1, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{meas}\{x_j \in [x_j', x_j''] : |f(x)| < \varepsilon\} \leq 2m\sqrt[2m]{p} \sqrt[m]{\varepsilon \, \mathrm{P}\, z \, \mathrm{P} \, / \, | (z, F) |}.$$

Інтегруючи останню нерівність за параметрами $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_p$ по паралелепіпеду Π_j, отримаємо

$$\operatorname{meas}\{x \in \Pi : | f(x) | < \varepsilon\} \leq 2m\sqrt[2m]{p} \operatorname{meas}\Pi_j \sqrt[m]{\varepsilon \, \mathrm{P}\, z \, \mathrm{P} \, / \, | (z, F) |},$$

а звідки – шукану оцінку міри. Лему доведено.

Наслідок. *Нехай* $m = 1$ *і виконуються умови леми 2. Якщо*

$$|(z, \operatorname{grad} f)| \geq \rho_1 > 0,$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ виконується оцінка

$$\operatorname{meas}\{x \in \Pi : | f(x) | < \varepsilon\} \leq c_2 \varepsilon \|z\| / \rho_1, \qquad c_2 = 2\sqrt{p} \max_{i=1,\ldots,p} \operatorname{meas}\Pi_i.$$

Основний результат. Для формулювання основного результату дослідження скористаємось [2,7] поняттям δ-нормальності щодо дискримінанта многочлена $L(\lambda, x, \xi)$, де дійсне число δ – показник нормальності.

Означення 1. *Вектор* x, $x \in \mathrm{R}^p$, *називають* δ*-нормальним, якщо для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathrm{Z}^p$ *виконується нерівність* (3).

Із означення 1 випливає, що δ_1-нормальний вектор є також δ_2-нормальним вектором, якщо $\delta_2 > \delta_1$, тобто множина δ_1-нормальних векторів може лише розширюватися зі зростанням числа δ.

Далі розглянемо підмноговид $\bar{M}$ многовиду M, визначений деяким фіксованим $(p-r)$-вимірним паралелепіпедом P за формулою $\bar{M} = M \cap (\mathrm{R}^r \times P)$. Очевидно, многовид $\bar{M}$, як і многовид M, має розмірність $p-r$.

Із рівності (2) отримуємо параметричне зображення многовиду $\bar{M}$ в просторі R^p за домопогою вектора параметрів $t = (t_{r+1},\dots,t_p)$, а саме для довільного $t \in P$ вектор

$$x(t) = (x_1(t),\dots,x_r(t),t_{r+1},\dots,t_p),$$

де $\left(x_1(t),\dots,x_r(t)\right)^T = A_0^{-1}b^T - A_0^{-1}A_1t^T$, а матриця A_1, складена з останніх $p-r$ стовпців матриці A, належить $\bar{M}$, і навпаки, якщо $x \in \bar{M}$, то вектор $(x_{r+1},\dots,x_p)$ належить P.

Означення 2. *Многовид $\bar{M}$ називають δ-нормальним, якщо для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі R^{p-r}) векторів $t \in P$ елемент многовиду $x(t)$ є δ-нормальний вектор.*

Позначимо через α_{ij} елементи матриці $A_0^{-1}A_1$ і розглянемо однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\left[E \mid A_0^{-1}A_1\right]\beta = 0, \tag{4}$$

де E – одинична матриця порядку r, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_p)^T$.

Теорема. *Нехай система* (4) *має розв'язок* β *із додатними компонентами, тоді многовид* $\bar{M}$ *є* δ*-нормальний, якщо* $\delta > (p-n)(n-1)$.

Доведення. Нехай $\lambda_i(x,\xi)$, $i = 1,\dots,n$, – корені многочлена $L(\lambda,x,\xi)$ за змінною λ, тоді його дискримінант $D(x,\xi)$ має вигляд

$$D(x,\xi) = \prod_{1\le s<q\le n}\left(\lambda_s(x,\xi) - \lambda_q(x,\xi)\right)^2.$$

З іншого боку, $D(x,\xi)$ є результант [5] многочлена $L(\lambda,x,\xi)$ та його похідної $\partial L(\lambda,x,\xi)/\partial\lambda$ і зображений формулою

$$D(x,\xi) = (-1)^{n(n-1)/2}n^nL\left(\mu_1(\xi),x,\xi\right)\cdot\ldots\cdot L\left(\mu_{n-1}(\xi),x,\xi\right), \tag{5}$$

де $\mu_j(\xi)$ – корені многочлена $\partial L(\lambda,x,\xi)/\partial\lambda$, тобто розв'язки алгебричного рівняння

$$\mu^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{n}B_j(\xi)\mu^{n-1-j} = 0.$$

Враховуючи параметричне подання $x(t)$ лінійного многовиду $\bar{M}$, із формул (1) та (5) для всіх $t \in P$ та $k \in \mathrm{Z}^p \setminus \{0\}$ маємо рівності

$$D\left(x(t),k\right) = (-1)^{n(n-1)/2}n^nL\left(\mu_1(k),x(t),k\right)\cdot\ldots\cdot L\left(\mu_{n-1}(k),x(t),k\right), \tag{6}$$

$$L\left(\mu_j(k),x(t),k\right) = l(\mu_j(k),k) + g(x(t),k), \quad j = 1,\dots,n-1. \tag{7}$$

Формула (6) визначає дискримінант $D(x(t),k)$ як функцію незалежних параметрів $t_{r+1},\ldots,t_p$ вектора t.

Оцінимо знизу кожну із функцій $L_j(t,k)$, $j=1,\ldots,n-1$, де $L_j(t,k)\equiv$ $\equiv L\left(\mu_j(k),x(t),k\right)$, стосовно вектора параметрів t із паралелепіпеда P.

Оскільки $g(x(t),k)=x_1(t)k_1^n+\ldots+x_r(t)k_r^n+t_{r+1}k_{r+1}^n+\ldots+t_pk_p^n$, то для $i=r+1,\ldots,p$ похідна $\partial L_j/\partial t_i$ не залежить від t і виконується рівність

$$\frac{\partial L_j(t,k)}{\partial t_i}=\frac{\partial g(x(t),k)}{\partial t_i}=k_i^n-\sum_{s=1}^{r}\frac{x_s(t)}{\partial t_i}k_s^n=k_i^n-\sum_{s=1}^{r}\alpha_{si}k_s^n. \tag{8}$$

Оскільки (4) є однорідна система алгебричних рівнянь, то можемо вважати, що вектор z, складений з компонент $\beta_{r+1},\ldots,\beta_p$ розв'язку системи (4), має одиничну норму: $\|z\|=\sqrt{\beta_{r+1}^2+\ldots+\beta_p^2}=1$. Із формули (8) знаходимо, що

$$(z,\operatorname{grad}\,g)=\sum_{i=r+1}^{p}\beta_ik_i^n-\sum_{s=1}^{r}\sum_{i=r+1}^{p}\alpha_{si}\beta_ik_s^n.$$

Із системи (4) випливають рівності $\beta_s=-\sum_{i=r+1}^{p}\alpha_{si}\beta_i$, $s=1,\ldots,r$. Оскільки за умовою теореми розв'язок β має всі додатні компоненти $\beta_1,\ldots,\beta_p$, то

$$(z,\operatorname{grad}\,L_j)=(z,\operatorname{grad}\,g)=\sum_{i=1}^{p}\beta_ik_i^n\ge C_1\tilde{k}^n,\ \forall k\in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}, \tag{9}$$

де $C_1=\min\limits_{i=1,\ldots,p}\beta_i/(p+1)^{n/2}>0$.

Введемо для кожного $k\in \mathbb{Z}^p$ множини $N_k^1,\ldots,N_k^{n-1}$ за формулою

$$N_k^j=\left\{t\in P:\left|L_j(t,k)\right|<n^{\frac{n}{1-n}}\tilde{k}^{\frac{\delta}{1-n}}\right\},$$

а також множини $N^1,\ldots,N^{n-1}$, де N^j – множина точок $t\in P$, для яких безліч разів (стосовно k) виконується нерівність $\left|L_j(t,k)\right|<n^{\frac{n}{1-n}}\tilde{k}^{\frac{\delta}{1-n}}$.

Із формул (8) та (9) випливає, що кожна з функцій $L_j(t,k)$ задовольняє умови наслідку, з якого для кожного фіксованого вектора $k\ne 0$ отримаємо оцінку для міри множини N_k^j:

$$\operatorname{meas}N_k^j\le C_2C_1^{-1}\tilde{k}^{-(n+\delta/(n-1))},\ j=1,\ldots,n-1,$$

де $C_2=2n^{\frac{n}{1-n}}\sqrt{p-r}\max\limits_{i=r+1,\ldots,p}\operatorname{meas}P_i$, P_i – проекція P вздовж осі t_i.

Оскільки ряд $\sum\limits_{k\in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\operatorname{meas}N_k^j$ є збіжний при $\delta>(p-n)(n-1)$, то на підставі леми Бореля–Кантеллі маємо, що множина тих точок $t\in P$, які потрапляють у нескінченну кількість множин N_k^j, $k\in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$, дорівнює нулеві, тобто $\operatorname{meas}N^j=0$ для кожного j, $j=1,\ldots,n-1$. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p-r}$) векторів $t\in P$ нерівності

$$\left|L_j(t,k)\right| \ge n^{\frac{n}{1-n}} \tilde{k}^{\frac{\delta}{1-n}}, \qquad j = 1,\dots,n-1, \tag{10}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathrm{Z}^p$.

Оскільки

$$D\left(x(t),k\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n \prod_{j=1}^{n-1} L_j(t,k),$$

то із нерівностей (10) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^{p-r}) векторів $t \in P$ нерівність $\left|D\left(x(t),k\right)\right| \ge \tilde{k}^{-\delta}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathrm{Z}^p$, якщо $\delta > (p-n)(n-1)$, тобто елемент $x(t)$ є δ-нормальний. Із означень 1 та 2 отримуємо твердження теореми.

Зауваження. *Якщо степінь n многочлена L непарний, то, подавши L у вигляді*

$$L(\lambda,x,\xi) \equiv l(\lambda,\xi) + x_1\xi_1^{n-1} + \ldots + x_p\xi_p^{n-1},$$

можна аналогічно показати δ-нормальність многовиду $\bar{M}$, якщо $\delta > (p-n+1)(n-1)$.

Приклади. Наведемо приклади многовидів, для яких виконується умова теореми, і дамо цій умові геометричне та алгебричне тлумачення.

Нехай $\mathrm{R}^p_{>0} = \{x \in \mathrm{R}^p : x_i > 0, i = 1,\dots,p\}$ − додатний ортант.

Приклад 1. Нехай $r = 1$, тоді рівняння (2) задає гіперплощину M у просторі R^p, а система (4) зведеться до одного рівняння

$$\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \alpha_{13}\beta_3 + \ldots + \alpha_{1p}\beta_p = 0, \tag{11}$$

яке матиме розв'язок β із множини $\mathrm{R}^p_{>0}$, якщо, наприклад, $\alpha_{1j} < 0$ для деякого індекса j, $2 \le j \le p$.

За фіксованого додатного β_1 рівність (11) можна геометрично тлумачити як належність точки $(\beta_2,\dots,\beta_p)$ гіперплощині у просторі R^{p-1}, яка задається рівнянням $\beta_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1p}y_p = 0$; вона означає, що скалярний добуток векторів $(-\alpha_{12},\dots,-\alpha_{1p})$ та $(y_2,\dots,y_p)$ дорівнює β_1. Очевидно, що (11) не виконується, коли площина $\beta_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1p}y_p = 0$ не перетинає жодну додатну координатну піввісь.

Приклад 2. Припустимо, що число p − парне і $r = p/2$, тоді матриця $A_0^{-1}A_1$ буде квадратною порядку r.

Нехай $(\beta_1,\dots,\beta_r) = (\nu\beta_{r+1},\dots,\nu\beta_{2r})$, де $\nu > 0$. Тоді існування розв'язку $(\beta_1,\dots,\beta_{2r})$ із множини $\mathrm{R}^p_{>0}$ системи (4) зводиться до встановлення існування додатного власного значення ν матриці $(-A_0^{-1}A_1)$ і відповідного власного вектора $(\beta_{r+1},\dots,\beta_{2r})$ із підпростору $\mathrm{R}^r_{>0}$.

Для деяких типів матриць встановлено існування таких величин [1, 8]. Зокрема, О. Перон виявив, що кожна додатна матриця має власний вектор із додатними компонентами, якому відповідає додатне власне число. Це ж твердження Г. Фробеніус довів для множини нерозкладних невід'ємних матриць [1]. Відомо, що стохастична матриця [1] має власне значення 1 та відповідний власний вектор $(1,\dots,1)$.

Отже, при $p = 2r$ система (4) має додатний розв'язок β, якщо матриця $\left(-A_0^{-1}A_1\right)$ є або додатна, або нерозкладна невід'ємна, або стохастична.

Висновки. Питання про діофантові наближення на многовиді дискримінанта многочлена виникає тоді, коли точка x належить деякому многовиду M із простору R^p, який має нульову міру Лебега у цьому просторі, тому що раніше встановлені метричні оцінки знизу дискримінанта для векторів x із незалежними компонентами [6] не розрізняють такі многовиди – множини нульової міри.

Точність оцінки визначають через показник нормальності многовиду; в знайдено залежність, що пов'язує цей показник із порядком n многочлена L та кількістю p його параметрів.

Дослідження підтримані ДФФД України (Договір Ф-25/108).

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
2. *Ільків В. С.* Уточнення оцінок дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Прикл. проблеми механіки і математики – 2007. – Вип. 5. – С. 28–35.
3. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.
4. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.
5. *Калинина Е. А., Утешев А. Ю.* Теория исключения: Уч. пос. – СПб.: НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.
6. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
7. *Симотюк М. М.* Метричні оцінки дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Мат. вісник НТШ. – 2006. – **3**. – С. 149–156.
8. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

МЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДИСКРИМИНАНТА МНОГОЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНОМ МНОГООБРАЗИИ

Установлено метрическую оценку снизу для дискриминанта многочлена, коэффициенты которого лежат на линейном многообразии.

METRIC ESTIMATE FOR THE DISCRIMINANT OF A POLYNOMIAL ON LINEAR MANIFOLD

The metric estimate from below for the discriminant of a polynomial whose coefficients belong to linear manifold is established.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 21.11.10