УДК: 517.946

А. М. Кузь, Б. Й. Пташник

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА У КЛАСІ ФУНКЦІЙ, МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і простору $\mathbb{R}^p$, досліджено задачу з інтегральними умовами за часовою координатою для рівняння Клейна–Гордона у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі. Для усунення проблеми малих знаменників, які виникли під час побудови розв'язку задачі, використано метричний підхід.

В останні роки значна увага математиків спрямована на дослідження задач з інтегральними умовами, які є узагальненням дискретних нелокальних умов. Інтегральні умови часто використовують під час моделювання деяких процесів теплопровідності, вологоперенесення, явищ, що виникають у турбулентній плазмі, у задачах математичної біології, під час дослідження деяких обернених задач математичної фізики тощо.

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними вивчали у різних аспектах раніше [3, 6–13, 15, 18, 20 та ін.]. Зокрема [3, 6, 7, 13, 20], розглядаючи мішані задачі з інтегральними умовами за просторовими змінними, встановили умови єдиності та існування узагальненого розв'язку за допомогою методів Гальоркіна та апріорних оцінок.

Вивчали [8–12, 15, 18] задачі з інтегральними умовами за часовою змінною та умовами періодичності і майже періодичності за просторовими координатами. Такі задачі є умовно коректні за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, для усунення якої у згаданих працях використано метричний підхід.

У цьому дослідженні, що є розвитком [10], результати праці [18], де вивчали задачу з інтегральними умовами у вигляді моментів за часовою змінною для гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами, однорідного за порядком диференціювання, в класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами, поширено на гіперболічні рівняння другого порядку з молодшими членами та загальніші нелокальні умови. Розглянуто також квазіперіодичні функції.

Основні позначення. Використовуватимемо такі позначення:

$x = (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p$, $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_p^2}$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$; $s = (s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$; $\tilde{s} = (s_0, s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\tilde{s}| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$; $\mu_k = (\mu_{k_1},\dots,\mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$, $(\mu_k, x) = \mu_{k_1}x_1 + \dots + \mu_{k_p}x_p$; $D^p = (0,T)\times\mathbb{R}^p$, $\Pi_H^p = [0,H]^p$, $K_T = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \le t, \tau \le T\}$; $[a]$ і $\{a\}$ – ціла та дробова частини числа $a \in \mathbb{R}$; C_j, $j = 1,2,\dots$, – додатні сталі, які не залежать від k та μ_k; $C_B^n(\bar{D}^p)$ – простір функцій $u(t,x)$, які є n раз неперервно диференційовними в області $\bar{D}^p$ за всіма змінними і майже періодичними за x [5, 19], із нормою

$$\|u; C_B^n(\bar{D}^p)\| = \sum_{0 \le |\tilde{s}| \le n} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|\tilde{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$C_B^n(\mathbb{R}^p)$ – підпростір функцій із $C_B^n(\bar{D}^p)$, які не залежать від t; $C_B^{(0,n)}(\bar{D}^p)$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 41–53.

– простір функцій $y(t,x)$, які в області $\bar{D}^p$ є n раз неперервно диференційовними та майже періодичними за x і неперервними за змінною t, із нормою

$$\left\|u;C_B^{(0,n)}(\bar{D}^p)\right\| = \sum_{0\le|s|\le n}\max_{t\in[0,T]}\sup_{x\in\mathbb{R}^p}\left|\frac{\partial^{|s|}y(t,x)}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}\right|.$$

Формулювання задачі. В області D^p розглядаємо задачу

$$L[u] := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u + c^2 u = f(t,x), \quad (t,x)\in D^p, \tag{1}$$

$$U_j[u] := \alpha_j\, u|_{t=t_j} + \beta_j\int_0^T t^{r_j}u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j=1,2, \quad x\in\mathbb{R}^p, \tag{2}$$

в якій $a>0, c>0$; $t_1=0, t_2=T, \alpha_j,\beta_j\in\mathbb{R}, \alpha_j^2+\beta_j^2\ne 0, j=1,2$; $r_1,r_2\in\mathbb{N}, r_2>r_1$; $\Delta=\sum_{j=1}^p \partial^2/\partial x_j^2$; функції $f(t,x)$ та $\varphi_j(x), j=1,2,$ є рівномірні майже періодичні за x зі заданим спектром $M_p := \{\mu_k, k\in\mathbb{Z}^p\}$, $\mu_{-k}=-\mu_k$, які розвиваються в ряди Фур'є

$$f(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k(t)\exp(i\mu_k,x), \;\; \varphi_j(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_{jk}\exp(i\mu_k,x), \;\; j=1,2, \tag{3}$$

де

$$f_k(t)=\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int_{\Pi_H^p} f(t,x)\exp(-i\mu_k,x)dx, \;\; \varphi_{jk}=\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int_{\Pi_H^p}\varphi_j(x)\exp(-i\mu_k,x)dx.$$

Припустимо, що існують додатні сталі d_1, d_2, σ такі, що справджується умова

$$\forall\mu_k\in M_p \qquad d_2|k|^\sigma \le |\mu_k| \le d_1|k|^\sigma. \tag{4}$$

Надалі використовуватимемо такі очевидні нерівності:

$$\forall\mu_k\in M_p \qquad \|\mu_k\| \le |\mu_k| \le \sqrt{p}\,\|\mu_k\|. \tag{5}$$

Зауважимо, що рівняння (1) описує поведінку релятивістських елементарних частинок із цілим спіном та масою спокою c.

Єдиність розв'язку задачі. Майже періодичний за x зі спектром M_p розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(i\mu_k,x). \tag{6}$$

Підставивши ряди (3), (6) у рівняння (1) та умови (2), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t), k\in\mathbb{Z}^p$, відповідно, таку задачу:

$$l[u_k] := \frac{d^2u_k(t)}{dt^2} + \left(a^2\|\mu_k\|^2 + c^2\right)u_k(t) = f_k(t), \tag{7}$$

$$U_j[u_k] := \alpha_j u(t_j) + \beta_j\int_0^T t^{r_j}u_k(t)dt = \varphi_{jk}, \quad j=1,2. \tag{8}$$

Поряд із задачами (1), (2) та (7), (8) розглядатимемо відповідні їм однорідні задачі

$$L[u]=0, \tag{1'}$$

$$U_1[u]=0, \quad U_2[u]=0, \tag{2'}$$

та

$$l[u_k] = 0, \tag{7'}$$

$$U_1[u_k] = 0, \quad U_2[u_k] = 0. \tag{8'}$$

Рівняння (7') має таку фундаментальну систему розв'язків: $u_{k1}(t) = \exp(i\gamma_k t)$, $u_{k2}(t) = \exp(-i\gamma_k t)$, де

$$\gamma_k = \sqrt{a^2 \|\mu_k\|^2 + c^2}. \tag{9}$$

Характеристичний визначник $\Delta(\mu_k, T) = \|U_j[u_{km}]\|_{j,m=1,2}$ задачі (7), (8) обчислюємо за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) = (\alpha_1 + \beta_1 I_{12})(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 I_{21}) - \\ - (\alpha_1 + \beta_1 I_{11})(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 I_{22}), \end{aligned} \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned} I_{nj} := I_{nj}(\mu_k, T) = \frac{(-1)^{r_n(j+1)} r_n!}{(i\gamma_k)^{r_n+1}} - \\ -\sum_{m=1}^{r_n+1} \frac{(-1)^{(m+1)} r_n!}{(r_n - m + 1)!} \frac{T^{r_n - m+1}}{(i\gamma_k)^m} \exp((-1)^j i\gamma_k T), \quad n, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Задача (7), (8) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ [17].

Теорема 1. *Для того, щоб задача (1), (2) мала не більше одного майже періодичного за x зі спектром M_p розв'язку у просторі $C_B^2(\bar{D}^p)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in M_p \quad \Delta(\mu_k, T) \neq 0. \tag{12}$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що для деякого $\mu_{k^0} \in M_p$ $\Delta(\mu_{k^0}, T) = 0$. Тоді існують нетривіальні розв'язки $u_{k^0}(t)$ задачі (7'), (8') вигляду $u_{k^0}(t) = C_{1k^0} \exp(i\gamma_{k^0} t) + C_{2k^0} \exp(-i\gamma_{k^0} t)$, де C_{1k^0}, C_{2k^0} визначають з однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} C_{1k}(\alpha_1 + \beta_1 I_{12}) + C_{2k}(\alpha_1 + \beta_1 I_{21}) = 0, \\ C_{1k}(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 I_{11}) + C_{2k}(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 I_{22}) = 0 \end{cases}$$

при $\mu_k = \mu_{k^0}$, визначник якої збігається з $\Delta(\mu_{k^0}, T)$. Тому задача (1'), (2') має нетривіальні розв'язки $u(t,x) = u_{k^0}(t) \exp(i\mu_{k^0}, x)$, а розв'язок задачі (1), (2), якщо існує, не буде єдиним.

Достатність. Нехай справджується умова (12). Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(t,x), u_2(t,x)$ задачі (1), (2) з простору $C_B^2(\bar{D}^p)$ зі спектром M_p. Тоді функція $\tilde{u}(t,x) = u_2(t,x) - u_1(t,x)$ є розв'язком задачі (1'), (2') з простору $C_B^2(\bar{D}^p)$, причому функції $\tilde{u}(t,x), L[\tilde{u}], U_1[\tilde{u}], U_2[\tilde{u}]$ є майже періодичні за x зі спектром M_p і розвиваються в ряди Фур'є вигляду (6). Ряди Фур'є для функцій $L[\tilde{u}]$, $U_1[\tilde{u}]$ та $U_2[\tilde{u}]$ співпадають з рядами, отриманими шляхом застосування операторів L, U_1, U_2 до ряду Фур'є функції $\tilde{u}(t,x)$. Із рівності Парсеваля для функцій $L[\tilde{u}]$, $U_1[\tilde{u}]$, $U_2[\tilde{u}]$ випливає, що кожний із коефіцієнтів Фур'є $\tilde{u}_k(t)$ функції $\tilde{u}(t,x)$ є розв'язком задачі (7'), (8'). Оскільки $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ для всіх $\mu_k \in M_p$, то задача (7'), (8') має лише тривіальні розв'язки для всіх $\mu_k \in M_p$. Тоді з неперервності $\tilde{u}(t, x)$ та теореми про єдиність розвинення майже періодичної функції в ряд Фур'є випливає, що $\tilde{u}(t, x) \equiv 0$, тобто $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$. ■

Зауваження 1. Якщо в умовах (2) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то

$$\Delta(\mu_k, T) = \alpha_1 \alpha_2 (\exp(i\gamma_k T) - \exp(-i\gamma_k T)),$$

і умова (12) набуває вигляду

$$\forall \mu_k \in M_p, \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad a^2 \|\mu_k\|^2 + c^2 \neq m^2 (\pi / T)^2 .$$

Існування розв'язку задачі. Вважатимемо, що виконується умова (12). Тоді для кожного $\mu_k \in M_p$ існує єдиний розв'язок $u_k(t)$ задачі (7), (8), який зобразимо у вигляді суми

$$u_k(t) = V_k(t) + W_k(t), \tag{13}$$

де $V_k(t)$ − розв'язок задачі (7'), (8), а $W_k(t)$ − розв'язок задачі (7), (8').

Для кожного $\mu_k \in M_p$ розв'язок задачі (7'), (8) дає формула

$$V_k(t) = C_{1k} u_{k1}(t) + C_{2k} u_{k2}(t), \tag{14}$$

де коефіцієнти C_{1k}, C_{2k} визначають із системи алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{1k}(\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{I}_{12}) + C_{2k}(\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{I}_{21}) = \varphi_{1k}, \\ C_{1k}(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 \mathrm{I}_{11}) + C_{2k}(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 \mathrm{I}_{22}) = \varphi_{2k}, \end{cases} \tag{15}$$

визначник якої збігається з $\Delta(\mu_k, T)$. Знайшовши розв'язок системи (15) за формулами Крамера і підставивши його в (14), отримуємо:

$$V_k(t) = \sum_{j,m=1}^{2} \frac{\Delta_{mj}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} \exp((-1)^{m+1} i\gamma_k t), \tag{16}$$

де

$$\Delta_{1j}(\mu_k, T) = \alpha_2 \exp((-1)^j \gamma_k T) + \beta_2 \mathrm{I}_{2j}, \;\; \Delta_{2j}(\mu_k, T) = \alpha_1 + \beta_1 \mathrm{I}_{1j}, \;\; j = 1, 2. \tag{17}$$

За умови (12) для кожного $\mu_k \in M_p$ існує єдина функція Гріна $G_k(t, \tau) := G(\mu_k; t, \tau)$ задачі (7), (8'), за допомогою якої розв'язок задачі (7), (8') зображає формула

$$W_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{18}$$

У квадраті K_T (крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$) функцію $G_k(t, \tau)$ визначає формула

$$G_k(t, \tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t - \tau)}{2\gamma_k} \sin(\gamma_k (t - \tau)) + \frac{1}{\Delta(\mu_k, T)} \sum_{j=1}^{2} F_j(\tau, \mu_k) \Delta_j(t, \mu_k), \tag{19}$$

де

$$F_j(\tau, \mu_k) = \frac{1}{2\gamma_k} \left[\alpha_j \sin(\gamma_k((j-1)T + (-1)^{j+1}\tau)) - \frac{\beta_j r_j!}{\gamma_k^{r_j+1}} \sin\left(\frac{r_j + 1}{2}\pi - \gamma_k \tau \right) - \right.$$

$$\left. -\beta_j \sum_{m=0}^{r_j} \frac{r_j!(T^{r_j - m} \sin(\gamma_k(T - \tau) + (m+1)\frac{\pi}{2}) - 2\tau^{r_j - m} \sin((m+1)\frac{\pi}{2})}{(r_j - m)!\, \gamma_k^{m+2}} \right], \; j = 1, 2, \tag{20}$$

причому вважаємо, що $0! = 1$;

$$\Delta_1(t,\mu_k) = \exp(i\gamma_k t)(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 I_{21}) - \exp(-i\gamma_k t)(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 I_{22}), \quad (21)$$

$$\Delta_2(t,\mu_k) = \exp(i\gamma_k t)(\alpha_1 + \beta_1 I_{11}) - \exp(-i\gamma_k t)(\alpha_1 + \beta_1 I_{12}). \quad (22)$$

На стороні $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата K_T функцію $G_k(t,\tau)$ довизначаємо за неперервністю справа (зліва).

На підставі формул (6), (13), (16), (18) отримуємо формальний розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \left(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau + \sum_{j,l=1}^{2} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)} \varphi_{jk} \exp((-1)^{l+1} i\gamma_k t) \right) \exp(i\mu_k, x). \quad (23)$$

Ряд (23) є розбіжним, бо вираз $|\Delta(\mu_k,T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in M_p$.

Для дослідження існування класичного розв'язку задачі (1), (2) знадобляться такі твердження про оцінки зверху коефіцієнтів Фур'є рівномірних майже періодичних функцій.

Лема 1. *Якщо* $v(x) \in C_B^n(\mathbb{R}^p)$ *і має спектр* M_p, *то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$|v_k| \le p^n \left\| v; C_B^n(\mathbb{R}^p) \right\| |\mu_k|^{-n}, \quad \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}. \quad (24)$$

Доведення. Коефіцієнти Фур'є функції $v(x)$ визначають формули

$$v_k = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} v(x) \exp(-i\mu_k, x) dx, \quad \mu_k \in M_p. \quad (25)$$

Нехай n − парне число, тобто $n = 2m$. Інтегруючи двічі частинами по кожній змінній $x_1, \dots, x_p$ у правих частинах формул (25) та підсумовуючи результати, отримуємо:

$$\|\mu_k\|^2 v_k = -\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \exp(-i\mu_k, x) dx, \quad \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}. \quad (26)$$

Застосовуючи аналогічну процедуру у формулах (26) і т.д., після m-го кроку знаходимо, що

$$\|\mu_k\|^{2m} v_k = (-1)^m \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} V(x) \exp(-i\mu_k, x) dx, \quad \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}, \quad (27)$$

де $V(x) = \sum_{|s|=m} \frac{m!}{s_1! \cdots s_p!} \frac{\partial^{2m} v(x)}{\partial x_1^{2s_1} \cdots \partial x_p^{2s_p}}$. Врахувавши, що $\sum_{|s|=m} \frac{m!}{s_1! \cdots s_p!} = p^m$ (див. [1, с.626]), на підставі (27) отримуємо:

$$\|\mu_k\|^{2m} |v_k| \le \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} |V(x) \exp(-i\mu_k, x)| dx \le \sup_{x\in\mathbb{R}^p} |V(x)| \le$$

$$\le p^m \max_{|s|=m} \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{2m} v(x)}{\partial x_1^{2s_1} \cdots \partial x_p^{2s_p}} \right| \right\} \le p^m \left\| v; C_B^{2m}(\mathbb{R}^p) \right\|, \quad \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}. \quad (28)$$

Із рівностей (5), (28) випливає, що

$$|v_k| \le p^{2m} \left\| v; C_B^{2m}(\mathbb{R}^p) \right\| |\mu_k|^{-2m}, \quad \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}. \quad (29)$$

Нехай $n = 2m + 1$. Провівши у формулах (27) інтегрування частинами по кожній змінній, отримуємо для кожного $j \in \{1, \dots, p\}$ такі рівності:

$$\left\|\mu_k\right\|^{2m}\mu_{k_j}v_k = i^{2m+1}\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{\Pi_H^p}\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}\exp(-i\mu_k,x)dx,\quad \mu_k\in M_p\setminus\left\{\vec{0}\right\}. \quad (30)$$

Звідси випливають оцінки

$$\left\|\mu_k\right\|^{2m}\left|\mu_k\right|\left|v_k\right| \le \sum_{j=1}^{p}\sup_{x\in\mathbb{R}^p}\left|\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}\right| \le p^{m+1}\left\|v;C_B^{2m+1}(\mathbb{R}^p)\right\|,\ \ \mu_k\in M_p\setminus\left\{\vec{0}\right\}. \quad (31)$$

На підставі (5), (29), (31) отримуємо:

$$\left|v_k\right| \le p^{2m+1}\left\|v;C_B^{2m+1}(\mathbb{R}^p)\right\|\left|\mu_k\right|^{-(2m+1)},\ \mu_k\in M_p\setminus\left\{\vec{0}\right\}. \quad (32)$$

З нерівностей (30), (32) випливає, що для довільного $n\in\mathbb{N}$ справджуються нерівності

$$\left|v_k\right| \le p^n\left\|v;C_B^n(\mathbb{R}^p)\right\|\left|\mu_k\right|^{-n},\quad \mu_k\in M_p\setminus\left\{\vec{0}\right\}. \ ■$$

Лема 2. *Якщо* $y(t,x)\in C_B^{(0,n)}(\bar{D}^p)$ *і має спектр* M_p, *то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|y_k(t)\right| \le p^n\left\|y;C_B^{(0,n)}(\bar{D}^p)\right\|\left|\mu_k\right|^{-n},\quad \mu_k\in M_p\setminus\left\{\vec{0}\right\}. \quad (33)$$

Доведення аналогічне доведенню леми 1. ■

Теорема 2. *Нехай справджується умова (12) та існує стала* $\eta>0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k\in M_p$ *виконується нерівність*

$$\left|\Delta(\mu_k,T)\right| \ge \left|\mu_k\right|^{-\eta}. \quad (34)$$

Якщо $f(t,x)\in C_B^{(0,[\eta+p/\sigma]+2)}(\bar{D}^p)$, $\varphi_j(x)\in C_B^{[\eta+p/\sigma]+3}(\mathbb{R}^p)$, $j=1,2$, *де* σ *– стала з оцінок (4), то існує розв'язок задачі (1), (2) із простору* $C_B^2(\bar{D}^p)$, *який зображається формулою (23) і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j=1,2$.

Доведення. На підставі формули (23) отримуємо:

$$\begin{aligned}\left\|u;C_B^2(\bar{D}^p)\right\| &= \sum_{0\le|\vec{s}|\le 2}\max_{t\in[0,T]}\sup_{x\in\mathbb{R}^p}\left|\frac{\partial^{|\vec{s}|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\exp(i\mu_k,x)+\right.\\ &\left.+\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j,m=1}^{2}\frac{\Delta_{mj}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)}\varphi_{jk}\frac{\partial^{|\vec{s}|}\left(\exp\left((-1)^{m+1}i\gamma_k t+(i\mu_k,x)\right)\right)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}\right|\le\\ &\le A+\sum_{|k|>0}\left(C_3\sum_{s_0=0}^{2}\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right|\left|\mu_k\right|^{2-s_0}+\right.\\ &\left.+C_4\sum_{j,m=1}^{2}\frac{\left|\Delta_{mj}(\mu_k,T)\right|}{\left|\Delta(\mu_k,T)\right|}\left|\varphi_{jk}\right|\left|\mu_k\right|^2\right), \end{aligned} \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned}A &= \sum_{j=0}^{2}\max_{t\in[0,T]}\left|u_0^{(j)}(t)\right| \le C_5(\left|\varphi_{10}\right|+\left|\varphi_{20}\right|)+C_6\max_{t\in[0,T]}\left|f_0(t)\right|\le\\ &\le C_5\sum_{j=1}^{2}\left\|\varphi_j;C_B^{[\eta+p/\sigma]+3}(\mathbb{R}^p)\right\|+C_6\left\|f;C_B^{(0,[\eta+p/\sigma]+2)}(\bar{D}^p)\right\|. \end{aligned} \quad (36)$$

Із формул (17), (20)–(22) випливає, що

$$\left|F_j(\tau,\mu_k)\right| \le \sqrt{p/4a^2}\left(\left|\alpha_1\right|+\left|\beta_1\right|(r_j+1)!(1+3T^{r_j})\right)\left|\mu_k\right|^{-1} = C_7\left|\mu_k\right|^{-1},\ j=1,2, \quad (37)$$

$$\left|\Delta_j(t,\mu_k)\right| \le 2\sqrt{p}\left(|\alpha_1| + |\beta_1|(r_j+2)!(1+T^{r_j})\right)|\mu_k|^{-1} = C_8\,|\mu_k|^{-1}, \quad j = 1,2, \tag{38}$$

$$\left|\Delta_{lj}(\mu_k,T)\right| \le C_9, \quad l,j = 1,2, \tag{39}$$

де $C_9 = \max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|\} + \max\{|\beta_1|,|\beta_2|\}\, r_2!T^{r_2}$.

На підставі (18)−(22), (34) та (37), (38) отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right| \le C_{10}\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|\,|\mu_k|^{s_0+\eta-1}, s_0 = 0,1,2. \tag{40}$$

Із оцінок (34), (35), (39), (40) випливає, що

$$\left\|u;C_B^2(\bar{D}^p)\right\| \le A + \sum_{|k|>0}\left(C_3C_{10}\,|\mu_k|^{\eta+1}\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)| + 2C_4C_9\,|\mu_k|^{\eta+2}\left(|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|\right)\right). \tag{41}$$

За умов теореми, на підставі лем 1, 2, справджуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)| \le p^{[\eta+p/\sigma]+2}\left\|f;C_B^{(0,[\eta+p/\sigma]+2)}(\bar{D}^p)\right\||\mu_k|^{-([\eta+p/\sigma]+2)}, \ \mu_k\in M_p\setminus\{\vec{0}\}, \tag{42}$$

$$\left|\varphi_{jk}\right| \le p^{[\eta+p/\sigma]+3}\left\|\varphi_j;C_B^{[\eta+p/\sigma]+3}(\mathbb{R}^p)\right\||\mu_k|^{-([\eta+p/\sigma]+3)}, \ j = 1,2,\ \mu_k\in M_p\setminus\{\vec{0}\}. \tag{43}$$

На підставі оцінок (4), (36), (41)−(43) одержуємо:

$$\left\|u;C_B^2(\bar{D}^p)\right\| = \left(C_{11}\left\|f;C_B^{(0,[\eta+p/\sigma]+2)}(\bar{D}^p)\right\| + C_{12}\sum_{j=1}^{2}\left\|\varphi_j;C_B^{[\eta+p/\sigma]+3}(\mathbb{R}^p)\right\|\right)\sum_{|k|>0}|k|^{-z}, \tag{44}$$

де $z = p + (1-\{\eta+p/\sigma\})\sigma, C_{11} = \max\{C_6, C_3C_{10}/d_2\}, C_{12} = \max\{C_5, 2C_4C_9/d_2\}$.

Оскільки $z > p$, то ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|k|^{-z}$ збіжний. Позначимо його суму через S_z. Тоді оцінка (44) набуде вигляду

$$\left\|u;C_B^2(\bar{D}^p)\right\| = C_{13}\left\|f;C_B^{(0,[\eta+p/\sigma]+2)}(\bar{D}^p)\right\| + C_{14}\sum_{j=1}^{2}\left\|\varphi_j;C_B^{[\eta+p/\sigma]+3}(\mathbb{R}^p)\right\|, \tag{45}$$

де $C_{13} = S_zC_{11}$, $C_{14} = S_zC_{12}$. Із (44) випливає доведення теореми. ■

Метричні оцінки малих знаменників. З'ясуємо, коли виконується оцінка (34). Використаємо методику праці [18] (див. також [14, §7.4]).

Позначимо

$$\Delta_1(\mu_k,T) = \Delta(\mu_k,T)(i\gamma_k)^{r_2+r_1+2}. \tag{46}$$

Враховуючи (10), (11), (46), отримуємо:

$$\Delta_1(\mu_k,T) = Q_1(\mu_k,T)e^{-i\gamma_kT} + Q_2(\mu_k,T)e^{i\gamma_kT} + Q_3(\mu_k,T),$$

де $Q_1(\mu_k,T)$, $Q_2(\mu_k,T)$ − поліноми степеня r_2 відносно T, $Q_3(\mu_k,T)$ − поліном степеня r_2+r_1 відносно T.

Побудуємо функції $g_{kj} := g_j(\mu_k;T), j = 0,1,2$, так:

$$g_{k0} = \frac{d^{r_2+r_1+1}}{dT^{r_2+r_1+1}}\Delta_1(\mu_k,T) = Q_4(\mu_k,T)e^{-i\gamma_kT} + Q_5(\mu_k,T)e^{i\gamma_kT}, \tag{47}$$

де $Q_4(\mu_k,T)$, $Q_5(\mu_k,T)$ − поліноми степеня r_2 за змінною T;

$$g_{k1} = \frac{d^{r_2+1}}{dT^{r_2+1}}\left(e^{i\gamma_kT}g_{k0}\right) = \frac{d^{r_2+1}}{dT^{r_2+1}}\left(Q_4(\mu_k,T) + Q_5(\mu_k,T)e^{2i\gamma_kT}\right) =$$

$$= \left(2^{r_2+1}(\alpha_1(i\gamma_k)^{r_1+1} + \beta_1r_1!)\beta_2(i\gamma_k)^{3r_2+r_1+2}T^{r_2} + Q_6(\mu_k,T)\right)e^{2i\gamma_kT}, \tag{48}$$

де $Q_6(\mu_k, T)$ – поліном за змінною T, степінь якого менший, ніж r_2;

$$g_{k2} = \frac{d^{r_2}}{dT^{r_2}}\left(e^{-2i\gamma_k T} g_{k1}\right) = 2^{r_2+1} r_2!\,(\alpha_1 (i\gamma_k)^{r_1+1} + \beta_1 r_1!)\beta_2 (i\gamma_k)^{3r_2+r_1+2}. \qquad (49)$$

Оцінимо знизу величину $|g_{k2}| = 2^{r_2+1} r_2!\,|\beta_2|\gamma_k^{3r_2+r_1+2}\left|\alpha_1 (i\gamma_k)^{r_1+1} + \beta_1 r_1!\right|$. Нехай $R(\mu_k) = \left\{\mu_k \in M_p : |\mu_k| > \frac{1}{a}\sqrt{(2|\beta_1/\alpha_1|\, r_1!)^{2/(r_1+1)} - c^2}\right\}$. Якщо r_1 – непарне число, то для всіх $\mu_k \in R(\mu_k)$ виконується оцінка $\left|\alpha_1 (i\gamma_k)^{r_1+1} + \beta_1 r_1!\right| \ge \left||\alpha_1|\gamma_k^{r_1+1} + |\beta_1|\,r_1!\right| \ge |\alpha_1/2|\gamma_k^{r_1+1} > |\alpha_1/2|(a/\sqrt{p})^{r_1+1}|\mu_k|^{r_1+1}$.

Якщо r_1 – парне, то для всіх $\mu_k \in M_p$ справедлива нерівність

$$\left|\alpha_1 (i\gamma_k)^{r_1+1} + \beta_1 r_1!\right| \ge \left|\beta_1 r_1! \pm i\alpha_1 \gamma_k^{r_1+1}\right| \ge |\alpha_1|\gamma_k^{r_1+1} > |\alpha_1|(a/\sqrt{p})^{r_1+1}|\mu_k|^{r_1+1}.$$

Отже, для всіх $\mu_k \in R(\mu_k)$ справджується оцінка

$$|g_{k2}| \ge C_{15}\,|\mu_k|^{3r_2+2r_1+3}, \quad C_{15} = 2^{r_2+1} r_2!\,|\alpha_1\beta_2|(a/\sqrt{p})^{3r_2+2r_1+3}. \qquad (50)$$

Зафіксуємо вектор $\mu_k = \bar{\mu}_k \in R(\mu_k)$. Із нерівності (50) випливає, що виконується хоча б одна з нерівностей $|\mathrm{Re}\, g_{k2}| \ge \frac{C_{15}}{\sqrt{2}}|\bar{\mu}_k|^{3r_2+2r_1+3}$, $|\mathrm{Im}\, g_{k2}| \ge \frac{C_{15}}{\sqrt{2}}|\bar{\mu}_k|^{3r_2+2r_1+3}$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що справджується нерівність

$$|\mathrm{Re}\, g_{k2}| \ge \frac{C_{15}}{\sqrt{2}}|\bar{\mu}_k|^{3r_2+2r_1+3}. \qquad (51)$$

Нехай $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}_+$ – довільний інтервал. Тоді, на підставі (49)–(51), згідно з лемою 3.4 із [14] отримуємо, що при $\mu_k = \bar{\mu}_k$

$$\mathrm{mes}\left\{T \in [t_1, t_2] : \left|\mathrm{Re}(e^{-2i\gamma_k T} g_{k1})\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}\right\} \le C_{16}\,|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\sigma},$$

де $\lambda_1 = -3r_2 - 2r_1 - 3 + pr_2/\sigma + \varepsilon_1/\sigma$, $\varepsilon_1 \in (0, \sigma/3)$. Тобто існує підмножина $D_0 \subset [t_1, t_2]$, $\mathrm{mes}\, D_0 > t_2 - t_1 - C_{16}|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\sigma}$, така, що для всіх $T \in D_0$ виконується нерівність $\left|\mathrm{Re}(e^{-2i\gamma_k T} g_{k1})\right| \ge |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}$. Враховуючи, що $|g_{k1}| = \left|e^{-2i\gamma_k T} g_{k1}\right| \ge \left|\mathrm{Re}(e^{-2i\gamma_k T} g_{k1})\right|$, отримуємо, що для всіх $T \in D_0$ виконується нерівність

$$|g_{k1}| \ge |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}. \qquad (52)$$

Згідно з нерівністю (52) множину $D_0 \subset [t_1, t_2]$ розбиваємо на такі підмножини A_0 і B_0 $(D_0 = A_0 \cup B_0)$:

$$\forall T \in A_0 \quad |\mathrm{Re}\, g_{k1}| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}, \qquad (53)$$

$$\forall T \in B_0 \quad |\mathrm{Im}\, g_{k1}| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}. \qquad (54)$$

Зауважимо, що множини A_0 і B_0 складаються, відповідно, з інтервалів A_0^j і B_0^m, кількість яких оцінимо нижче.

Враховуючи, що $\mathrm{Re}\, g_{k1} = \frac{d^{r_2+1}}{dT^{r_2+1}}\mathrm{Re}(e^{i\gamma_k T} g_{k0})$, згідно з лемою 3.4 із [14], отримуємо такі оцінки:

$$\operatorname{mes}\left\{T \in A_0^j : \left|\operatorname{Re}(e^{i\gamma_k T} g_{k0})\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}\right\} \le C_{17} |\bar{\mu}_k|^{-(p+1+\varepsilon_2/(r_2+1))/\sigma}, \tag{55}$$

де $\lambda_2 = (r_2+1)(p/\sigma+1) + \lambda_1 + \varepsilon_2/\sigma$, $\varepsilon_2 \in (0, \sigma/3)$.

Оцінимо зверху кількість інтервалів A_0^j. З нерівності (53) випливає, що на кожному з цих інтервалів (крім, можливо, двох крайніх) функція $y(T) := \operatorname{Re}\frac{\partial g_{k1}}{\partial T} = Q_7(\bar{\mu}_k, T)\cos(2\bar{\gamma}_k T) + Q_8(\bar{\mu}_k, T)\sin(2\bar{\gamma}_k T)$, де $Q_j(\bar{\mu}_k, T), j = 7, 8,$ – поліноми степеня r_2 за змінною T; $\bar{\gamma}_k$ визначаємо за формулою (9) при $\mu_k = \bar{\mu}_k$, згідно з теоремою Ролля, має хоча б один нуль. Отже, для оцінки кількості інтервалів A_0^j достатньо оцінити кількість нулів функції $y(T)$ на відрізку $[t_1, t_2]$. Функція $y(T)$ має на відрізку $[t_1, t_2]$ стільки нулів, скільки нулів має функція

$$\bar{y}(z) = Q_7(\bar{\mu}_k, z/\bar{\gamma}_k)\cos(2z) + Q_8(\bar{\mu}_k, z/\bar{\gamma}_k)\sin(2z)$$

на відрізку $[\bar{\gamma}_k t_1, \bar{\gamma}_k t_2]$. Зауважимо, що функція $\bar{y}(z)$ є розв'язком диференціального рівняння $(d^2/dz^2 + 4)^{r_2+1}\bar{y}(z) = 0$. З теореми Валле−Пуссена (див. теорему 2.5 із [14]) випливає, що існує додатна стала h_0 така, що інтерполяційна $2r_2+2$-точкова задача для цього рівняння на інтервалі довжини h_0 має єдиний розв'язок. Отже, функція $\bar{y}(z)$, яка не є тотожним нулем, на інтервалі довжини h_0 не може мати більше ніж $2r_2+1$ нулів. Тоді на інтервалі довжини $|\bar{\gamma}_k(t_2 - t_1)|$ кількість нулів функції $\bar{y}(z)$ не перевищує числа $|\bar{\gamma}_k(t_2 - t_1)|(2r_2+1)/h_0$. Зі сказаного вище та (9) випливає, що кількість інтервалів A_0^j множини A_0 не перевищує величини $C_{18}|\bar{\mu}_k|$.

На підставі (55) отримуємо таку оцінку:

$$\operatorname{mes}\left\{T \in A_0 : \left|\operatorname{Re}(e^{i\gamma_k T} g_{k0})\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}\right\} \le C_{19} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\sigma}, \tag{56}$$

де $C_{19} = C_{17}C_{18}$. Аналогічно

$$\operatorname{mes}\left\{T \in B_0 : \left|\operatorname{Im}(e^{i\gamma_k T} g_{k0})\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}\right\} \le C_{20} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\sigma}. \tag{57}$$

На основі нерівностей (56), (57)

$$\operatorname{mes}\left\{T \in D_0 : \left|e^{i\gamma_k T} g_{k0}\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}\right\} \le C_{21} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\sigma},$$

де $C_{21} = C_{19} + C_{20}$. Отже, існує така підмножина $D_1 \subset D_0$, $\operatorname{mes} D_1 > t_2 - t_1 - C_{16}|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\sigma} - C_{21}|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\sigma}$, що для всіх $T \in D_1$ виконується нерівність

$$|g_{k0}| = \left|e^{i\gamma_k T} g_{k0}\right| \ge |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}. \tag{58}$$

Враховуючи (47) і (58), аналогічно отримуємо, що для всіх $T \in D_2 \subset D_1$, $\operatorname{mes} D_2 > t_2 - t_1 - C_{16}|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\sigma} - C_{21}|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\sigma} - C_{22}|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_3/(r_2+r_1+1))/\sigma}$ справджується оцінка

$$|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| \ge |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2 - (r_2+r_1+1)(p/\sigma+1) - \varepsilon_3/\sigma}, \quad \varepsilon_3 \in (0, \sigma/3),$$

яка після підстановки значень λ_2, λ_1 буде:

$$|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| \ge |\bar{\mu}_k|^{r_2+r_1+1-(3r_2+r_1+2)p/\sigma-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{59}$$

З останнього твердження випливає, що для всіх $T \in F(\bar{\mu}_k) := [t_1, t_2] \setminus D_2$ виконується нерівність $|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| < |\bar{\mu}_k|^{r_2+r_1+1-(3r_2+r_1+2)p/\sigma-\varepsilon}$, причому

$$\operatorname{mes} F(\bar{\mu}_k) \le C_{16} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\sigma} + C_{21} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\sigma} +$$

$$+C_{22} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_3/(r_2+r_1+1))/\sigma} \le C_{23} |\bar{\mu}_k|^{-\frac{p}{\sigma}-\frac{\delta}{\sigma}},$$

де $\delta = \min\{\varepsilon_1/(r_2\sigma), \varepsilon_2/((r_2+1)\sigma), \varepsilon_3/((r_2+r_1+1)\sigma)\}$. Оскільки, згідно з (4), ряд $\sum_{|k|>0} |\bar{\mu}_k|^{-p/\sigma-\delta/\sigma}$ є збіжний, то за лемою Бореля–Кантеллі [16] міра тих $T \in [t_1, t_2]$, для яких нерівність $|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| < |\bar{\mu}_k|^{r_2+r_1+1-(3r_2+r_1+2)p/\sigma-\varepsilon}$ справджується для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in R(\mu_k)$, рівна нулеві. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in [t_1, t_2]$ нерівність (59) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M_p$. Оскільки пряму $\mathbb{R}$ можна покрити зліченною кількістю інтервалів $[t_1, t_2]$, то нерівність (59) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M_p$.

На підставі (9), (47), (59) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T)| = \frac{|\Delta_1(\mu_k, T)|}{\gamma_k^{r_2+r_1+2}} \ge C_{24} |\mu_k|^{-\frac{p(3r_2+r_1+2)}{\sigma}-1-\varepsilon}, \; C_{24} = \left(\frac{p}{2a^2}\right)^{(r_2+r_1+2)/2}, \; \varepsilon \in (0,1),$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M_p$. Із вище сказаного випливає таке твердження.

Теорема 3. *Для довільних фіксованих* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, a, c$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *оцінка (34) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in M_p$, *якщо* $\eta > p(3r_2 + r_1 + 2)/\sigma + 1$.

Квазіперіодичні функції. Підкласом класу рівномірних майже періодичних функцій є квазіперіодичні функції [2].

Нехай $\Omega = \{\omega_{jm} \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, p, \; m = 1, \dots, p\}$ – такий набір чисел, що

$$\mu_j(k) := k_1\omega_{1j} + \dots + k_p\omega_{pj} \ne 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}, \quad j = 1, \dots, p, \tag{60}$$

а $\mu(k) = (\mu_1(k), \dots, \mu_p(k))$ – вектор, складений з лінійних форм (60).

Функцію $v(x)$, яка визначена і неперервна за $x_1, \dots, x_p$ в $\mathbb{R}^p$ і допускає розвинення в ряд Фур'є

$$v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} v_k \exp(i\mu(k), x), \qquad v_k = \lim_{H \to \infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi_H^p} v(x) \exp(-i\mu(k), x) dx,$$

називають квазіперіодичною із частотною базою Ω.

Простори квазіперіодичних функцій, аналогічні просторам $C_B^n(\mathbb{R}^p)$, $C_B^n(\bar{D}^p)$, $C_B^{(0,n)}(\bar{D}^p)$, позначатимемо через $C_\Omega^n(\mathbb{R}^p)$, $C_\Omega^n(\bar{D}^p)$, $C_\Omega^{(0,n)}(\bar{D}^p)$.

Розглянемо задачу (1), (2), коли функції $f(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, є квазіперіодичні за змінними $x_1, \dots, x_p$ із частотною базою Ω і розвиваються в ряди Фур'є вигляду

$$f(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} f_k(t) \exp(i\mu(k), x), \quad \varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp(i\mu(k), x), \quad j = 1, 2,$$

де $\mu(k) = \big(\mu_1(k), \ldots, \mu_p(k)\big)$, а $\mu_j(k)$ − лінійні форми вигляду (60).

Із (60) випливає, що $|\mu_j(k)| \le C_{25}\,|k|,\, j = 1, \ldots, p,$ де $C_{25} = \max\limits_{j,m \in \{1,\ldots,p\}} \{|\omega_{jm}|\}$.

Із теореми Грошева [4] випливає, що для всіх, крім скінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$, оцінка $|\mu_j(k)| > 1/p\,|k|^{-(1+\varepsilon)}, \varepsilon > 0,$ справджується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p^2}$) векторів $\{\omega_{jm} \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, p, m = 1, \ldots, p\} \in \mathbb{R}^{p^2}$.

Надалі вважатимемо, що частотна база Ω є така, що справджуються оцінки

$$(1/p)|k|^{-(1+\varepsilon)} < |\mu_j(k)| \le C_{25}\,|k|, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}. \tag{61}$$

Квазіперіодичний за x зі частотною базою Ω розв'язок задачі (1), (2), шукаємо у вигляді ряду $u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu(k), x)$, де кожен із коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, відповідно, є розв'язком задачі

$$\bar{l}[u_k] := \frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + \left(a^2\,\|\mu(k)\|^2 + c^2\right) u_k(t) = f_k(t), \tag{62}$$

$$U_1[u_k] = \varphi_{1k}, \qquad U_2[u_k] = \varphi_{2k}. \tag{63}$$

Позначимо $\tilde{\gamma}_k = \sqrt{a^2\,\|\mu(k)\|^2 + c^2}$. Тоді характеристичний визначник $\Delta(\mu(k), T)$ задачі (62), (63) обчислюємо за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) = (\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{I}_{12})(\alpha_2 \exp(-i\tilde{\gamma}_k T) + \beta_2 \mathrm{I}_{21}) - \\ - (\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{I}_{11})(\alpha_2 \exp(i\tilde{\gamma}_k T) + \beta_2 \mathrm{I}_{22}), \end{aligned} \tag{64}$$

де $\mathrm{I}_{nj}, n, j = 1, 2,$ визначають формули (11), в яких γ_k потрібно замінити на $\tilde{\gamma}_k$.

Теорема 4. *Для того, щоб задача (1), (2) мала не більше одного квазіперіодичного за x зі частотною базою Ω розв'язку у просторі $C^2_\Omega(\bar{D}^p)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \Delta(\mu(k), T) \ne 0. \tag{65}$$

Доведення виконуємо за схемою доведення теореми 1. ∎

За умови (65) квазіперіодичний за x розв'язок задачі (1), (2) зобразимо у вигляді формального ряду

$$\begin{aligned} u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \Bigg(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau + \\ + \sum_{j,l=1}^{2} \frac{\Delta_{lj}(\mu(k), T)}{\Delta(\mu(k), T)} \varphi_{jk} \exp((-1)^{l+1} i\tilde{\gamma}_k t) \Bigg) \exp(i\mu(k), x), \end{aligned} \tag{66}$$

де $\Delta_{lj}(\mu(k), T),\ l, j = 1, 2,$ і $G_k(t,\tau), k \in \mathbb{Z}^p$, визначають формули (17), (20), в яких γ_k потрібно замінити на $\tilde{\gamma}_k$.

Лема 3. *Якщо $v(x) \in C^n_\Omega(\bar{D}^p), w(t,x) \in C^{(0,n)}_\Omega(\bar{D}^p)$, то для їх коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$|v_k| \le p^{n-1} \frac{\|v; C^n_\Omega(\bar{D}^p)\|}{|k|^{n(1+\varepsilon)}}, \quad \max_{t \in [0,T]} |w_k(t)| \le p^{n-1} \frac{\|w; C^{(0,n)}_\Omega(\bar{D}^p)\|}{|k|^{n(1+\varepsilon)}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\},$$

де ε − як завгодно мале число.

Доведення виконуємо за схемою доведення леми 1, враховуючи оцінки (61). ∎

Теорема 5. *Нехай справджується умова (65) та існує стала* $\tilde{\eta} > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості)* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu(k), T)| \geq |k|^{-\eta}. \tag{67}$$

Якщо $f(t,x) \in C_{\Omega}^{(0,[(\tilde{\eta}+p+1)/(1+\varepsilon)]+1)}(\bar{D}^p)$, $\varphi_j(x) \in C_{\Omega}^{[(\tilde{\eta}+p+2)/(1+\varepsilon)]+1}(\mathbb{R}^p)$, $j = 1, 2$, $\varepsilon \in (0,1)$, *то існує розв'язок задачі (1), (2) із простору* $C_{\Omega}^2(\bar{D}^p)$, *який зображається формулою (66) і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x), j = 1, 2$.

Доведення виконуємо за схемою доведення теореми 2 із врахуванням оцінок (61) та леми 3. ■

Теорема 6. *Для довільних фіксованих* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, a, c$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *оцінка (67) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *якщо* $\tilde{\eta} > (p+2)(3r_2 + r_1 + 2) + 2r_1 + 3 - (3r_2 + 2r_1 + 3)\varepsilon$.

Доведення виконуємо за схемою доведення теореми 3 із врахуванням оцінок (61). ■

Висновок. Результати роботи можна поширити на гіперболічні рівняння вигляду

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2\Delta + c_j^2\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D^p,$$

які описують поведінку системи m релятивістських елементарних частинок із масами спокою $c_j, j = 1, \ldots, m$.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1969, – 248 с.
3. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.,* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Мат. моделирование. – 2000. – **12**, № 1. – С. 94–103.
4. *Грошев А. В.* Теорема о системе линейных форм // Докл. АН СССР. – 1938. – **19**, № 3. – С. 151–152.
5. *Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. В.* Элементы теории функций. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1963. – 244с.
6. *Данилкина О. Ю.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Вестник СамГУ. – 2007. – № 6(56). – С. 141–153.
7. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача с нелинейными интегральными условиями для гиперболического уравнения // Вестн. Сам. гос. ун-та. – 2009. – № 1(18). – С. 26–32.
8. *Илькив В.С., Пташник Б.И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.
9. *Ількiв В. С., Магеровська Т. В.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2008. – №625. – С. 12-19.
10. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна–Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами// Тези доп. Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача (Львів, 25–27 травня 2009р.): Львів, 2009. – С. 215–217.
11. *Медвідь О. М.* Задача з розподіленими даними для факторизованих рівнянь із частинними похідними// Мат. вісник НТШ. – 2005. – **2**. – С. 135–146.

12. *Панчишин К.* Крайова задача з інтегральними умовами для гіперболічного рівняння другого порядку // http://pinchuckfund.org/storage/students /works/2007/4.doc
13. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 1. – С. 88–95.
14. *Нелокальні* крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
15. *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. –**46**, № 4. – С. 98-107.
16. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
17. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308с.
18. *Штабалюк П. І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С. 153–165.
19. *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions. – Dover Publications, Inc., Cambridge, 1954, – 180 p.
20. *Mesluob S., Bouziani A.* Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations // J. of Appl. Math. – 2001. – № 3. – P. 107–116.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В области, что является декартовым произведением отрезка $[0,T]$ и пространства $\mathbb{R}^p$, исследовано задачу с интегральными условиями по временной координате для уравнения Клейна–Гордона в классе почти периодических по пространственным переменным функциям. Найдено критерий единственности и достаточные условия существования решения задачи. Для решения проблемы малых знаменателей, которые возникли при построении решения задачи, использован метрический подход.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE KLEIN-GORDON EQUATION IN A CLASS OF FUNCTIONS, ALMOST PERIODIC FOR SPATIAL VARIABLES.

In the domain, which is a Cartesian product of a segment $[0,T]$ and space $\mathbb{R}^p$, the problem with integral conditions for time coordinate for the Klein-Gordon equation in a class of almost periodic for space variables functions is investigated. A criterion of the uniqueness and sufficient conditions of the existence of the solution are established. To solve the problem of small denominators which appear in constructing of the solution of the problem, the metric approach is used.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.10.10