УДК 512.552.12

І. С. Васюник

ОБЛАСТЬ БЕЗУ З ЄДИНИМ МАКСИМАЛЬНО НЕГОЛОВНИМ ПРАВИМ ІДЕАЛОМ, ДЕ ВИКОНУЄТЬСЯ УМОВА ДУБРОВІНА І ДОВІЛЬНИЙ АТОМ – ДУО-ЕЛЕМЕНТ, Є ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Доведено, що права область Безу з єдиним максимально неголовним правим ідеалом, де виконується умова Дубровіна і довільний атом – дуо-елемент, є областю елементарних дільників.

Відомо, що дистрибутивна область Безу елементарних дільників – це дуо-область [1]. Прикладами областей елементарних дільників можуть бути області головних ідеалів [2]. Та все ж існують ширші класи областей елементарних дільників, ніж областей головних ідеалів [3, 4]. Але всі ці області мають ту спільну властивість, що вони є областями Безу, які відрізняються від областей головних ідеалів неголовними однобічними ідеалами. Беручи до уваги індукованість множини неголовних правих (лівих) ідеалів, у праці [4] ввели максимально неголовні праві (ліві) ідеали. Там же вивчений вплив структури таких ідеалів на будову цих кілець, а також на можливу діагональну редукцію матриць над ними. М. І. Дубровін показав, що напівлокальне напівпервинне кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного $a \in R$ існує елемент $b \in R$ такий, що $RaR = bR = Rb$ (сьогодні цю умову називають «умовою Дубровіна»).

Нижче вперше розглянуто кільця Безу з єдиним максимально неголовним правим ідеалом, який не є двосторонній, що є кільцями елементарних дільників [4]. Показано, що права область Безу, в якій виконується умова Дубровіна, де довільний атом є дуо-елемент з єдиним максимально неголовним правим ідеалом, є областю елементарних дільників.

Під кільцем R розуміємо асоціативне кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$. Праве (ліве) кільце Безу – це кільце, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головний. Область Безу – це область, яка є правою і лівою одночасно. Дуо-кільце – це кільце, в якому довільний однобічний ідеал є ідеалом. Елемент a області R називають дуо-елементом, якщо $aR = Ra$, а факторіальним, якщо він є оборотним, або його можна зобразити у вигляді добутку нерозкладних елементів області R, причому два довільні такі розклади ізоморфні [7]. Скажемо, що елемент a є повним дільником елемента b області R, якщо $RbR \subseteq aR \cap Ra$.

Кільце R називають кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця A над R володіє канонічною діагональною редукцією, тобто для A над R знайдуться оборотні матриці P та Q відповідних розмірів, що $PAQ = D$, де $D = (d_{ij})$ – діагональна матриця така, що $d_{ii}R \cap Rd_{ii} \supseteq Rd_{i+1,i+1}R, i = \{1, 2, \ldots\}$. Якщо над R довільна 1×2 (2×1) матриця володіє канонічною діагональною редукцією, то кільце R є правим (лівим) кільцем Ерміта. Кільце Ерміта – це кільце, яке є правим і лівим одночасно [6].

Розглянемо відоме твердження [4], яке часто використовують для доведення основної теореми.

Твердження. Нехай R – кільце Безу з єдиним максимальним неголовним ідеалом N. Якщо в матриці $A = (a_{ij})$ над кільцем R хоча б один із елементів факторіальний, то знайдуться оборотні матриці P та Q, що

$$PAQ=\begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \dots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

де f – факторіальний елемент, який є повним дільником всіх елементів матриці B.

Теорема 1. *Нехай R – дуо-область Безу. Тоді R – кільце елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли будь-яка матриця $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$ володіє, канонічною діагональною редукцією.*

Доведення. **Необхідність** очевидна.

Достатність. Оскільки R – область Безу є областю Ерміта [4], то для доведення теореми достатньо показати, що матриця $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ володіє канонічною діагональною редукцією. Нехай $aR+bR+cR=\alpha R$. Тоді $a=\alpha a_0, b=\alpha b_0, c=\alpha c_0$, де $a_0R+b_0R+c_0R=R$. Звідси

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_0 & \alpha b_0 \\ 0 & \alpha c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки α – дуо-елемент, то матриця $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ діагоналізується тоді і тільки тоді, коли діагоналізується матриця $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix}$. Дійсно, якщо існують зворотні матриці P та Q над R такі, що

$$P\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

де ε_1 – дільник ε_2, то існує зворотна матриця P' така, що

$$P'\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P,$$

а отже,

$$P'\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} \alpha\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \alpha\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

тобто матриця $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ володіє канонічною діагональною редукцією.

Теорема 2. *Область Безу, де виконується умова Дубровіна, в якій довільний атом є дуо-елементом з єдиним максимально неголовним правим ідеалом, є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай R – область Безу, в якій всі атоми є дуо-елементи з єдиним максимально неголовним правим ідеалом N, де виконується умова Дубровіна. Зауважимо, що N – двобічний і максимально неголовний лівий ідеал [4]. Оскільки область Безу є областю Ерміта [7], то достатньо довести, що довільна верхня трикутна матриця $A=(a_{ij})$ володіє канонічно діагональною редукцією. Оскільки в R виконується умова Дубровіна, то для елементів a_{ij} існує дуо-елемент d і елементи $b_{ij}\in R$ такі, що

$\sum_{i,j} Ra_{ij}R = dR = Rd$ і $a_{ij} = db_{ij}$ для довільних i, j. Зауважимо, що серед елементів b_{ij} існує хоча б один, який не міститься в N, а отже, згідно з [4] є факторіальний. Отже для матриці A існують зворотні матриці P та Q відповідних розмірів, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} d & & 0 \\ & \mathbf{O} & \\ 0 & & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

де f – факторіальний елемент, який є повним дільником довільного елемента матриці C. Індукція за розмірами матриці завершує доведення, що матриця A володіє канонічною діагональною редукцією. Тобто R – кільце елементарних дільників.

Теорема 3. *Дуо-область Безу з єдиним максимально неголовним правим ідеалом є область елементарних дільників.*

Доведення. Нехай R – дуо-область Безу з єдиним максимальним неголовним правим ідеалом N.

Оскільки R – область Ерміта, то розглянемо верхню трикутну матрицю $A = (a_{ij})$. Згідно з теоремою 1, $\sum_{ij} a_{ij}R = R$. З цього випливає, що існує хоча б один елемент з a_{ij}, який не належить до N, а отже, є факторіальний [4]. Згідно з твердженням, для матриці A існують зворотні матриці P та Q відповідних розмірів, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

де f – факторіальний елемент, який є повним дільником довільного елемента матриці C. Індукція за розмірами матриці доводить, що матриця A володіє канонічною діагональною редукцією, а отже, R – область елементарних дільників, що завершує доведення. Теорема доведена.

1. *Забавський Б. В., Комарницький М. Я.* Дистрибутивные области с элементарными делителями // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 7. – С. 1000–1004.
2. *Джекобсон Н.* Теория колец. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 287 с.
3. *Cohn P. M.* Right principal Bezout domain //J. London Math. Soc. – 1987. – 35, № 2. – P. 251–262.
4. *Забавський Б. В.* О некоммутативных кольцах элементарных дилителей // Укр. мат. журн. – 1987. – 39, №4. – С. 440–444.
5. *Дубровин Н. И.* О кольцах с элементарными делителями // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 14–20.
6. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modults // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 469–491.
7. *Amitsur S. A.* Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. S. – 1963. – 15. – P. 59–69.

ОБЛАСТЬ БЕЗУ С ЕДИНСТВЕННЫМ МАКСИМАЛЬНО НЕГЛАВНЫМ ПРАВЫМ ИДЕАЛОМ, ГДЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ ДУБРОВИНА И ПРОИЗВОЛЬНЫЙ АТОМ – ДУО-ЭЛЕМЕНТ, ЕСТЬ ОБЛАСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Показано, что правая область Безу с единственным максимально неглавным правым идеалом в которой выполняется условие Дубровина и все атомы дуо-элементы, является областью элементарных делителей.

BEZOUT DOMAIN, WITH DUBROVIN'S CONDITION, IN WHICH ALL ATOMS ARE DUE-ELEMENTS, WITH THE UNIQUE MAXIMALLY NON-PRINCIPAL RIGHT IDEAL IS ELEMENTARY DIVIZORS DOMAIN

Shown that right Bezout domain, with Dubrovin's condition, in which an atom is a duo-element with the unique maximally non-principal right ideal is elementary divisors domain.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
08.11.10