УДК 512.552.12

С. І. Білявська, Б. В.Забавський

ЗВ'ЯЗОК АДЕКВАТНИХ КІЛЕЦЬ З ЧИСТИМИ КІЛЬЦЯМИ

Показано, що адекватне кільце є акуратне і комутативна область Безу, в якій нетривіальні скінченні гомоморфні образи є всюди адекватні кільця, є адекватна. Крім того, доведено, що комутативна область Безу з нетеровим спектром є адекватна тоді і тільки тоді, коли довільний ненульовий простий ідеал області міститься в єдиному максимальному ідеалі. Ці результати частково відповідають на питання, поставлені Ларсеном, Шоресом та Левісом.

Адекватні кільця вперше ввів Хелмер як клас кілець, над якими довільна матриця діагоналізується, причому таке кільце є кільцем без умов обриву зростальних ланцюгів ідеалів [1]. Адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі Джекобсона досліджував Капланський [2]. Гілман і Хенріксен показали, що комутативне регулярне кільце є адекватне [3]. Але структурна будова таких кілець описана мало. Можна лише зауважити, що кожен ненульовий простий ідеал адекватної області міститься в єдиному максимальному ідеалі [3]. Наведено [4] приклад комутативної області Безу, в якій довільний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, причому ця область неадекватна.

Надалі під кільцем R розумітимемо комутативне кільце з $1 \neq 0$. Те, що елемент a кільця R є дільником елемента $b \in R$, позначатимемо $a|b$.

Означення 1. Мінімальним простим ідеалом кільця R називають простий ідеал з кільця, який не містить ніяких простих ідеалів, окрім самого себе. Множину всіх мінімальних простих ідеалів кільця R позначатимемо $\min(R)$.

Означення 2. Елемент a кільця R назвемо адекватним, якщо для довільного елемента $b \in R$ елемент a можна подати у вигляді $a = rs$, де $rR + bR = R$, і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ не є власним, тобто $s'R + bR \neq R$.

Нагадаємо, що кільце R називають кільцем Безу, якщо довільний скінченно породжений ідеал кільця R є головний. Комутативне кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент адекватний, називають адекватним кільцем [1–3], а кільце в якому довільний елемент (зокрема і нуль) адекватний – всюди адекватним [5, 6].

Означення 3. Кільце називають PM-кільцем, якщо довільний простий його ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. Відомо, що комутативне PM-кільце є Гельфандове, тобто таке, в якому з умови $a + b = 1$ для елементів $a, b \in R$ існують такі елементи r, s з кільця R, що $(1 + ar)(1 + bs) = 0$ [7].

Означення 4. Кільце R назвемо чистим, якщо для довільного його елемента x існують оборотний елемент $u \in R$ та ідемпотент $e \in R$ такі, що $x = u + e$ [7].

Означення 5. Кільце R назвемо кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in aR$, що $(1 - e) \in (1 - a)R$ [8].

Означення 6. Комутативне кільце R назвемо акуратним, якщо довільний нетривіальний гомоморфний образ кільця є чистим кільцем [8].

Означення 7. Кільце R назвемо кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, якщо задовольняється умова ідемпотентності стабільного рангу 1, тобто для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує ідемпотент $e \in R$ такий, що $a + be$ – оборотний елемент кільця R.

Ідеал комутативного кільця R називають J-ідеалом, якщо він є перетином деякої множини максимальних ідеалів кільця R.

Пригадаємо, що кільце R називають кільцем з нетеровим спектром, якщо R задовольняє умови обриву зростальних ланцюгів J-ідеалів [9].

Теорема 1. Нехай R – комутативне кільце Безу і a – адекватний його елемент. Тоді фактор-кільце R / aR – чисте.

Доведення. Позначимо через $\bar{R} = R / aR$ З праці [10] бачимо, що для доведення цієї теореми досить показати, що $\bar{R}$ є кільце ідемпотентного стабільного рангу 1, тобто для довільних $\bar{b}, \bar{c} \in \bar{R}$ таких, що $\bar{b}\bar{R} + \bar{c}\bar{R} = \bar{R}$, існує ідемпотент $\bar{e} \in \bar{R}$ такий, що $\bar{b} + \overline{ce}$ є оборотний елемент в $\bar{R}$.

Нехай b, c, a – елементи кільця R такі, що $aR + bR + cR = R$. Оскільки a – адекватний елемент кільця R, то існують елементи $r, s \in R$ такі, що $rR + bR = R$, і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ є власний, тобто $s'R + bR \neq R$. Оскільки $rR + sR = R$, то існують елементи $u, v \in R$ такі, що $ru + sv = 1$. (Дійсно, якщо б $rR + sR = hR \neq R$, то $h \mid r$ і $h \mid s$, причому h – необоротний елемент, тоді згідно з означенням того, що a – адекватний елемент, маємо $hR + bR = R$, оскільки $h \mid r$, а також $hR + bR \neq R$, бо $h \mid s$. Отримуємо суперечність).

Розглянемо рівність $(ru)^2 - ru = ru(ru-1) = ru(-sv) = -rsuv = a(-uv) \in aR$.

Бачимо, що образ елемента $\overline{ru}$ за канонічного гомоморфізму $R \to \bar{R}$ є ідемпотент, тобто $(\overline{ru})^2 = \overline{ru}$. Доведемо, що $aR + (b + cru)R = R$. Нехай $(rs)R + (b + cru)R = hR$, причому h – необоротний елемент R. Оскільки $h \mid a$, то $h \mid (rs)$. Якщо $h \mid r$, то з того, що $h \mid (b + cru)$ слідує, що $h \mid b$, а це суперечить тому, що $rR + bR = R$. Отже, $h \mid s$, тоді згідно з означенням адекватного елемента a, $sR + bR = \delta R \neq R$. Оскільки $\delta \mid s$ і $h \mid s$, то $\delta \mid h$, а також $\delta \mid (b + cru)$ звідси $\delta \mid b$ і $\delta \mid (cru)$. Оскільки $ru + sv = 1$, $\delta \mid s$ і $ru = 1 - sv$, причому $\delta \mid (cru)$, то $\delta \mid c$. Отже, δ – необоротний дільник елементів $a, b, c \in R$, що неможливо, оскільки $aR + bR + cR = R$. Отже, $aR + (b + cur)R = R$, тобто кільце $\bar{R}$ є кільце ідемпотентного стабільного рангу 1, а значить, чисте кільце [6]. Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай R – комутативне кільце Безу і a – адекватний його елемент. Тоді

1) R / aR – кільце ідемпотентного стабільного рангу 1;
2) R / aR – чисте кільце;
3) R / aR – кільце з властивістю заміни;
4) R / aR – PM-кільце;
5) R / aR – Гельфандове кільце.

Доведення. Очевидним є доведення цієї теореми, оскільки воно безпосередньо слідує з теореми 1 і праці [10].

Як наслідок, з урахуванням [7] маємо такий очевидний результат.

Теорема 3. Адекватне кільце є акуратне.

Поставимо запитання: нехай a – адекватний елемент комутативного кільця Безу. Якими властивостями володіє образ елемента a за канонічного гомоморфізму $R \to R / aR$? Відповідь на нього дасть така теорема.

Теорема 4. Якщо a – адекватний елемент комутативного кільця Безу, тоді $\overline{0}$ – адекватний елемент фактор-кільця R / aR.

Доведення: Позначимо $\overline{R} = R / aR$. Нехай $\overline{b}$ – довільний елемент фактор-кільця $\overline{R}$ і b – його прообраз за канонічного гомоморфізму $R \to \overline{R}$. Оскільки a – адекватний елемент кільця R, то існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$ і $rR + bR = R$ та $s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. Звідси $\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$ і $\overline{s}'\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}$ за канонічного гомоморфізму $R \to \overline{R}$. Нехай $\overline{t}$ – необоротний в $\overline{R}$ дільник елемента $\overline{s}$, де $\overline{s}$ – образ елемента s за канонічного гомоморфізму $R \to \overline{R}$. Тоді існує елемент k з кільця R такий, що $t|(s + ak)$. Доведемо, що $sR + tR \neq R$. Доводитимемо від супротивного. Припустимо, що $sR + tR = R$. Оскільки $t|(s + ak)$, то $s + ak = t\beta$ для деякого елемента β кільця R. З рівності $s + rsk = t\beta$ $(s(1 + rk) = t\beta)$ та $sR + tR = R$ випливає, що $t|(1 + rk)$, тобто $tR + rR = R$. Оскільки $tR + sR = R$ і $tR + rR = R$, то $tR + rsR = R$, тобто $tR + aR = R$. А це означає, що образ елемента t за канонічного гомоморфізму $R \to \overline{R}$ є оборотний елемент, а це суперечить вибору елемента $\overline{t}$. Отже, $sR + tR = uR \neq R$. Згідно з означенням елемента a, маємо, що $uR + bR \neq R$, а отже, і $\overline{u}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}$. Оскільки $\overline{u}$ – дільник елемента $\overline{t}$, то $\overline{t}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}$. Отже, дійсно $\overline{0}$ – адекватний елемент в $\overline{R}$. Теорема доведена.

Виникає обернене запитання: а якщо у фактор-кільці R / aR, $\overline{0}$ є адекватний елемент, то чи буде елемент a – адекватний елемент кільця R?

Теорема 5. Нехай R – комутативна область Безу. Якщо $\overline{0}$ – адекватний елемент в R / aR, тоді a – адекватний елемент кільця R.

Доведення. Позначимо через $\overline{R} = R / aR$. Нехай у кільці R / aR існують елементи $\overline{r}, \overline{s}$ такі, що $\overline{0} = \overline{r} \cdot \overline{s}$ для довільного елемента $\overline{b} \in \overline{R}$. Причому $\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$ і для довільного необоротного дільника $\overline{s}'$ елемента $\overline{s}$ маємо $\overline{s}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}$. Оскільки $\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$, то існують елементи $u, v, t \in R$ такі, що $ru + bv = 1 + at$ для довільних прообразів r, b елементів $\overline{r}, \overline{b}$ за канонічного гомоморфізму $R \to R / aR = \overline{R}$. Нехай $aR + rR = \delta R$, тоді $a = \delta a_0$ $r = \delta\, r_0$ для деяких елементів $a_0, r_0 \in R$, причому $a_0 R + r_0 R = R$. Звідси слідує, що $\delta R + bR = R$, бо $ru - at + bv = 1$. Оскільки $\overline{0} = \overline{r} \cdot \overline{s}$, то $rs = a\alpha$ для деякого елемента $\alpha \in R$. Звідси $\delta r_0 s = \delta a_0 \alpha$. Оскільки R – область, тоді $r_0 s = a_0 \alpha$. Так як $r_0 R + a_0 R = R$, то існують елементи t, k з кільця R такі, що $r_0 t + a_0 k = 1$. А це означає, що $r_0 st + a_0 sk = s$. Тобто $a_0 \beta = s$. Отже, $a = \delta a_0$, де $\delta R + bR = R$. Нехай j – необоротний дільник елемента a_0 такий, що $jR + bR = R$. Звідси $\overline{j}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$, а це суперечить тому, що $\overline{j}|\overline{s}$. Крім того, $\overline{j}$ – необоротний елемент кільця $\overline{R}$, бо ними є лише ті елементами, прообрази яких взаємнопрості з a, а $j|a_0$. Отже, $a = \delta a_0$, де $\delta R + bR = R$ і $a_0' R + bR \neq R$ – для довільного необоротного дільника a_0' елемента a_0. Беручи до уваги довільність елемента b, маємо, що

a – адекватний елемент області R. Теорема доведена.

Ця теорема дає відповідь на запитання, поставлене у праці [6], про замкненість адекватного кільця щодо гомоморфних образів. Таким чином, як наслідок, маємо такий результат.

Теорема 6. Нехай R – комутативна область Безу, в якій для довільного необоротного і ненульового елемента a фактор-кільце R/aR є всюди адекватне, тоді R – адекватна область.

Доведення. Оскільки $a \neq 0$ і a – необоротний, тоді фактор-кільце R/aR є всюди адекватне, а це означає, що $\overline{0} \in R/aR$ є адекватний елемент. Таким чином, з теореми 5 одержуємо, що a – адекватний елемент. Звідси R – адекватна область. Теорема доведена.

Згідно з теоремою 2, в комутативному кільці Безу R для довільного адекватного елемента $a \in R$ фактор-кільце R/aR є чисте. Природно виникає запитання про обернену ситуацію: за яких обставин з умови, що R/aR є чисте кільце, випливає, що a – адекватний елемент кільця R? Таким чином, отримуємо такий частковий результат.

Теорема 7. Нехай R – комутативна область Безу, а також a – ненульовий і необоротний елемент області R такий, що R/aR є чисте кільце, причому множина $\min(R/aR)$ є скінченна. Тоді a – адекватний елемент області R.

Доведення. Оскільки чисте кільце є PM-кільцем, то через те, що $\min(R/aR)$ є скінченна множина слідує, що R/aR має лише скінченну кількість максимальних ідеалів $M_1, M_2, \ldots M_n$. Нехай $P_1, P_2, \ldots P_n$ – всі мінімальні прості ідеали кільця і $\overline{R} = R/aR$. Позначимо $P(\overline{R}) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} P_i$ – перетин всіх простих ідеалів. Згідно з Китайською теоремою про лишки, маємо $\overline{R}/P(\overline{R}) = \overline{R}/P_1 \oplus \overline{R}/P_2 \oplus \ldots \oplus \overline{R}/P_n$. Зауважимо, оскільки $\overline{R}$ – PM-кільце, то $\overline{R}/P_i$ – локальні області для довільних $i = 1, \ldots n$, тобто $\overline{R}/P_i$ - чисте кільце для довільного $i = 1, \ldots n$. Отже, $\overline{R}/P(\overline{R})$ - чисте кільце. Оскільки $\overline{R}/P(\overline{R})$ є ортогонально скінченне, тобто $\overline{1} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \ldots + \overline{e}_n$, де $\overline{e}_i^2 = \overline{e}_i$, $i = 1, \ldots n$ і $\overline{e}_i \overline{e}_j = \overline{0}$ для довільних i, j таких, що $i \neq j$. Доведемо, що $\overline{R}$ теж є ортогонально скінченне. Справді, якщо б $\overline{R}$ було ортогонально нескінченне, тоді існувало б нескінченне число ортогональних ідемпотентів $e_1, e_2, \ldots$ кільця $\overline{R}$ таких, що $e_i \neq e_j$ при $i \neq j$. Оскільки $\overline{R}/P(\overline{R})$ – ортогонально скінченне, то для $i \neq j$ маємо $\overline{e}_i \neq \overline{e}_j$. А це означає, що $e_i - e_j \in P(\overline{R})$. Згідно з властивостями ніль-радикала $1 - e_i + e_j = u$ – оборотний елемент $\overline{R}$. Тоді $(1 - e_i)u^{-1} + e_j u^{-1} = 1$. Звідси $e_i e_j u^{-1} = e_i$ і $e_i(1 - e_j) = 0$, отже, $e_i = e_i e_j$. Аналогічно доводиться, що $e_j = e_j e_i$. Отже, $e_i = e_j$. Оскільки $\overline{R}$ – ортогонально скінченне, тоді R – напівдосконале кільце. А це свідчить про існування локальних ортогональних ідемпотентів $e_1, e_2, \ldots e_n \in \overline{R}$ таких, що $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = 1$ в $\overline{R}$. Отже, $\overline{R} = e_1\overline{R} \oplus e_2\overline{R} \oplus \ldots \oplus e_n\overline{R}$, причому $e_i\overline{R}$ – локальне кільце Безу [6], тобто кільце нормування. Так як кільце нормування є всюди адекватне [6], а пряма сума всюди адекватних кілець є всюди адекватна[5], то отримуємо, що R/aR – всюди адекватне кільце. А це означає, що $\overline{0}$ – адекватний елемент фактор-кільця R / aR. Враховуючи результати теореми 5, маємо, що a – адекватний елемент області R. Теорема доведена.

З теореми 7 як наслідок отримуємо часткову відповідь на питання, поставлене у праці [6]. Чи буде комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, адекватною областю?

Теорема 8. Нехай R – комутативна область Безу з нетеровим спектром. Тоді R – адекватна область тоді і тільки тоді, коли довільний простий ідеал міститься в єдиному максимальному.

Доведення. Оскільки R – комутативна область Безу з нетеровим спектром, тоді для довільного ненульового і необоротного елемента a кільця фактор-кільце R / aR має скінченну множину мінімальних простих ідеалів. За теоремою 7 необхідність є очевидна. Достатність безпосередньо отримується з [6]. Теорема доведена.

1. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, № 2. – P. 225–236.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–492.
3. *Gilman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 82. – P. 362–365.
4. *Brener J. W., Conrad P. F., Montgomery J.* Lattice-ordered groups and conjecture for adequate domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – 43, № 1. – P. 31–35.
5. *Забавський Б. В.* Адекватні кільця елементарних дільників зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів // Алгебра і топологія. – Львів: ЛНУ, 1996. – С. 74–78.
6. *Larsen M., Levis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P. 231–248.
7. *McGovern W.* Neat rings // J. of Pure and Appl. Algebra. – 2006. – 205. – P. 243–265.
8. *Nicholson.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – 229. – P. 269–278.
9. *Shores T., Wiegand R.* Some criteria for Hermite rings and elementary divisor rings // Can. J. Math. – 1974. – № 6. – P. 1380–1383.
10. C*amillo V. P., Yu H. P.* Exchange rings? Units and idempotents // Comm. Algebra. – 1994. – 22. – P. 4737–4749.

СВЯЗЬ АДЕКВАТНЫХ КОЛЕЦ С ЧИСТЫМИ КОЛЬЦАМИ

Показано, что адекватное кольцо является аккуратньым. Также выявлено, что коммутативная область Безу, в которой нетривиальные конечные гомоморфные образы везде адекватные, есть адекватной областю. Кроме того, доказано, что коммутативная область Безу с нетеровым спектром адекватная тогда и только тогда, когда произвольний ненулевой простой идеал области содержится в едином максимальном идеале. Эти результаты частично отвечают на вопросы, поставленные Ларсеном, Шоресом и Левисом.

CONNECTION OF AN ADEQUATE RINGS WITH A CLEAN RINGS.

In this paper showed, that an adequate ring is a neat ring. It is proved, that a commutative Bezout domain in which non trivial finite homomorphism images are always adequate is an adequate. Moreover, it is showed, that a commutative Bezout domain with noetherian spectrum is an adequate if and only if any non-zero prime ideal of a domain contains in a singular maximal ideal. This results are particular answer on a questions asked by Larsen, Shores and Levis.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
22.09.10