УДК 512.553.2

М. Я. Комарницький, М. О. Малоїд

ТЕОРЕМА ДЕ-МАРКО І ОРСАТТІ ДЛЯ СПЕКТРА ЦІГЛЕРА МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНОГО МОДУЛЯ

Введено поняття lpm-модуля над асоціативним кільцем та Ціглерового спектра для мультиплікаційних модулів. Розглянуто чисто-мультиплікаційні модулі і доведено аналог теореми Де-Марко і Орсатті про ретрактність максимального спектра в просторі $Spec_{Zg}(M)$. Основні результати сформульовано в теоремах 1, 2 і 3.

Мультиплікаційні модулі вперше вивчав Барнар [1], який навів приклади та встановив елементарні їх властивості. Подальші результати мультиплікаційних модулів над некомутативними кільцями висвітлено в оглядовій статті Туганбаєва [4]. Деякі дані про них опубліковано в статтях [5, 6].

Нижче встановлено аналог відомого результату італійських математиків Де-Марко та Орсатті, який стосувався первинного спектра комутативного кільця, в якому кожний ненульовий первинний ідеал міститься в єдиному максимальному [2]. Введено поняття *lpm-модуля* та вивчено деякі властивості первинного Spec(R) та максимального Max(R) спектрів мультиплікаційного модуля над асоціативним кільцем R з ненульовою одиницею.

Термінологія та попередні відомості. Введемо означення і нагадаємо деякі факти, необхідні для подальшого викладу та формулювання результатів.

Означення 1. Нехай R − довільне кільце, M − лівий R-модуль. Назвемо M мультиплікаційним модулем, якщо для кожного його підмодуля N існує такий ідеал B кільця R, що $N=BM$ [4].

Нагадуємо, що кожен циклічний модуль мультиплікаційний, зокрема, кожен простий. Відомо, що дистрибутивні модулі характеризуються тією умовою, що всі їх скінченнопороджені підмодулі мультиплікаційні [4].

Означення 2. Кільце R називають інваріантним зліва (інваріантним справа), якщо кожен лівий (правий) ідеал цього кільця є двосторонній. Інваріантну область називають дуо-областю [4].

Використовуватимемо загальноприйняті позначення:
Spec(M) − множина первинних підмодулів модуля M;
$Max(M)$ і $Min(M)$ − множини максимальних і мінімальних первинних підмодулів модуля M.

Крім цього, вираз $Spec_{Zg}(M)$ позначатиме множину всіх чисто-первинних підмодулів модуля M (див. означення).

Нехай M − лівий R-модуль, N − довільний його підмодуль. Нехай $\mathrm{U}_l(\mathrm{N})=\{\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}_l(\mathrm{M}) | \mathrm{N} \not\subset \mathrm{P}\}$. Через $\xi(M)$ позначатимемо сім'ю всіх підмножин $U = U_l(N) \subseteq Spec_l(M)$. Якщо для кожної пари підмодулів L_1, L_2 модуля M існує такий підмодуль H, що $U_l(L_1) \cap U_l(L_2) = U_l(H)$, то $\xi(M)$ містить порожню множину та весь простір $Spec_l(M)$. Окрім того, $\xi(M)$ є замкнена відносно довільних об'єднань та скінченних перетинів. Отже, $Spec_l(M)$ буде *топологічним простором з топологією Зариського.* Окрім цього, зазначимо, що модуль M тоді називають топологічним правим R-модулем або правим R-модулем з топологією Зариського. Тому $Spec(R)$ та $Max(R)$ можемо розглядати як топологічні простори.

Лема 1. Нехай M − ненульовий мультиплікаційний R-модуль. Тоді:

1. Кожен власний підмодуль модуля *M* міститься в деякому максимальному підмодулі модуля *M*.

2. Підмодуль *K* буде максимальним в *M* тоді і лише тоді, коли існує такий максимальний ідеал *Q* кільця *R*, що $K = QM \neq M$.

Означення 3. Два максимальні підмодулі M_1 та M_2 лівого модуля *M* називаються зв'язаними, якщо $M / M_1 \cong M / M_2$.

Некомутативний аналог теореми Де-Марко та Орсатті.

Означення 4. Нехай *M* – довільний лівий мультиплікаційний модуль. Такий модуль називають *lpm-модулем* (лівим pm-модулем), якщо кожен первинний його підмодуль має, з точністю до ізоморфізму, один простий гомоморфний образ.

Тобто, якщо $f : P \to S_1$, $g : P \to S_2$ – два довільні модульні гомоморфізми і S_i, $i = 1,2$ – прості підмодулі модуля *M*, де *P* – первинний підмодуль модуля *M*, то $S_1 \cong S_2$.

Означення 5. Нехай *M* – довільний лівий мультиплікаційний модуль. Його називають lpm-модулем (лівим pm-модулем), якщо кожен первинний підмодуль цього модуля міститься, з точністю до зв'язності, в єдиному максимальному підмодулі модуля *M*.

Доведемо еквівалентність цих означень.

Теорема 1. Означення 4 та 5 еквівалентні.

Доведення.

Доведемо необхідність. Нехай маємо модуль *M*, котрий буде lpm-модулем (у сенсі означення 4.). Розглянемо первинний підмодуль *P* модуля *M*. Припустимо, що не виконується умова другого означення, тобто існують такі два різні максимальні підмодулі M_1 та M_2 модуля *M*, що $P \subseteq M_1$ і $P \subseteq M_2$. Оскільки M_1 та M_2 – різні максимальні підмодулі, то $M_1 + M_2 = M$, і M / M_i, $i = 1,2$, буде простим підмодулем. Окрім цього, $P \subset M_1 \Rightarrow P \subset M$. Тоді $M_1 / P \subset M / P$. Побудуємо гомоморфізми: $f : M / P \to M / M_1$ та $g : M / P \to M / M_2$. Оскільки *M* – lpm-модуль, то за означенням 4 $M / M_1 \cong M / M_2$. Це можливо лише тоді, коли $M_1 = M_2$. Суперечність.

Доведемо достатність. Нехай M – мультиплікаційний lpm-модуль (у сенсі означення 5), *P* – первинний підмодуль цього модуля. Розглянемо два довільні модульні гомоморфізми: $f : P \to S_1$ і $g : P \to S_2$, де S_i, $i = 1,2$ – прості підмодулі модуля *M*. Тоді $Kerf = M_1$ та $Kerg = M_2$ будуть максимальні підмодулі модуля *M*, при цьому існуватимуть такі ідеали *I* та *J*, для котрих $Kerf = IP$ та $Kerg = JP$. За Лемою 1, ідеали *I* та *J* будуть максимальними. Окрім цього, $P \subseteq I$ та $P \subseteq J$.

З іншого боку, *P* – первинний підмодуль мультиплікаційного модуля *M*, а отже, існує такий первинний ідеал *Q* кільця *R*, що *P*=*QM*. Тоді $Q \subseteq I$ та $Q \subseteq J$; $QP \subseteq IP = M_1$, $QP \subseteq JP = M_2$. Тому первинний підмодуль *P* міститься в двох різних максимальних підмодулях. Отримали суперечність, яка доводить теорему.

Одним з основних результатів цієї статті є такий.

Теорема 2 Нехай *M* – лівий мультиплікаційний *R*-модуль і *Max(M)* – ретракт простору *Spec(M)*. Тоді *M* – lpm-модуль.

Доведення. Нехай $\mu : Spec(M) \to Max(M)$ – неперервна ретракція і $\mu(K) = H$ для первинного підмодуля *K* і максимального підмодуля *H* модуля *M*. Тоді замкнена множина $\mu^{-1}(H)$ міститиме $\overline{\{K\}}$, тобто довільний максимальний підмодуль H', що міститиме K. Оскільки відображення μ – неперервна ретракція, то $H=\mu(H')=H'$. Тому $H'=H$ буде єдиний максимальний підмодуль, що містить K. Це завершує доведення.

Звідси отримуємо декілька наслідків.

Наслідок 1. Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lpm-модуля M містить єдиний мінімальний первинний підмодуль.

Наслідок 2. Простір $Min(M)$ мінімальних первинних підмодулів буде ретрактом простору $Spec(M)$.

Властивості чисто-мультиплікаційних модулів. Перейдемо до вияснення взаємозв'язків між різними типами спектрів мультплікаційних модулів. Спочатку введемо поняття Ціглерового спектра, використовуючи чисто-ін'єктивні модулі та формульні підгрупи.

Означення 6. Модуль N називають чисто-ін'єктивним, якщо він є інєктивний над чистими вкладеннями, тобто як тільки $f: A\to B$ – чисте вкладення, $g: A\to N$ – довільний морфізм, то існує такий морфізм $h: B\to N$, що $h\circ f=g$.

Означення 7. Нехай M – модуль, N – його підмодуль. Нехай $v: N\to M$ – канонічне ін'єктивне відображення. Тоді відображення $1\otimes v: F\otimes N\to F\otimes M$ називають канонічним, де $1: F\to F$ – одиничне відображення. Якщо канонічне відображення є ін'єктивне для всіх підмодулів F, то N називають чистим підмодулем в M.

Означення 8. Нехай R – кільце. Під точками Ціглерового спектра розумітимемо класи ізоморфізму нерозкладних чисто-ін'єктивних модулів. Базою простору будуть всі множини такого вигляду: $\varphi/\psi=\{N\in Zg_M : \varphi(N)/\psi(N)\neq 0\}$, де $\varphi(N)$ та $\psi(N)$ – формульні підгрупи [3].

Зауважимо, що раніше поняття Ціглерового спектра ввели лише для кілець. Тут пропонуємо ввести його аналог для модулів. Але для цього потрібно виконати певну підготовчу роботу.

Означення 9. Якщо умова мультиплікаційності виконується лише для чистих підмодулів, то модуль називатимемо чисто-мультиплікаційним.

Нам потрібні ще деякі додаткові властивості чисто-мультиплікаційних модулів.

Твердження 1. Гомоморфний образ чисто-мультиплікаційного модуля буде чисто-мультиплікаційним модулем.

Доведення. Розглядатимемо ліві модулі. Нехай M – чисто-мультиплікаційний модуль над кільцем R, $h: M\to\overline{M}$ – епіморфізм, $\overline{N}$ – чистий підмодуль в $\overline{M}$. Тоді існує чистий підмодуль N з M, для якого $h(N)=\overline{N}$. Окрім цього, знаємо, що існує такий ідеал B кільця R, що $N=BM$ – чистий підмодуль. Тоді $\overline{N}=h(N)=h(BM)=Bh(M)=B\overline{M}$, де $\overline{M}$ – чисто-мультиплікаційний модуль. Доведено.

Твердження 2. Нехай R – кільце з комутативним множенням ідеалів, M – лівий чисто-мультиплікаційний модуль, B – такий ідеал кільця R, що $M=BM$. Тоді $N=BN$ для кожного чистого підмодуля N з M.

Доведення. За припущенням $M=BM$, M – чисто-мультиплікаційний модуль. Тому існує такий ідеал C кільця R, що $N=CM=CBM$. За даними теореми $BC=CB$, $N=CBM=BCM=BN$. Твердження доведене.

Твердження 3. Для лівого модуля M над кільцем R такі властивості еквівалентні:

1. Модуль M – чисто-мультиплікаційний;
2. Для кожного чистого циклічного підмодуля X модуля M існує такий лівий ідеал B, що $X=BM$;

3. Для кожного чистого підмодуля X з M існує множина $\{X_i\}_{i\in I}$ чистих підмодулів з X та множина таких ідеалів $\{B_i\}_{i\in I}$, що $X=\sum_{i\in I} X_i$, $X_i = MB_i$ для кожного $i \in I$.

Доведення. Імплікація $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна.

$(2) \Rightarrow (3)$. Нехай X – підмодуль модуля M, $\{X_i\}_{i\in I}$ – множина чистих циклічних підмодулів X, і $B_i = (X_i : M)$ $(i \in I)$. За припущенням $X_i \subseteq MB_i \subseteq X_i$ для всіх i. Оскільки $X=\sum_{i\in I} X_i$, маємо $\{X_i\}$ і $\{B_i\}$ – відповідні множини.

$(3) \Rightarrow (1)$. Нехай X – чистий підмодуль модуля M. За припущенням існує множина $\{X_i\}$ чистих під модулів X та множина $\{B_i\}$ таких ідеалів кільця R, що $X=\sum_{i\in I} X_i$ і $X_i = MB_i$ для кожного $i \in I$. Позначимо через B ідеал $\sum_{i\in I} B_i$ кільця R. Тоді

$$X=\sum_{i\in I} X_i = \sum_{i\in I} MB_i = M(\sum_{i\in I} B_i) = MB,$$

а це означає, що M чисто-мультиплікаційнй модуль і все доведено.

Ціглерів спектр мультиплікаційних модулів.

Означення 10. Нехай M – довільний модуль, N – його підмодуль. Назвемо N чисто-нерозкладним підмодулем, якщо чисто-ін'єктивна оболонка фактор-модуля M/N буде нерозкладним модулем.

Введемо також поняття Ціглерового спектра для модуля M, який позначимо через Zg_M.

Означення 11. Нехай M – мультиплікаційний модуль, N – підмодуль M. Під точками Ціглерового спектра розумітимемо класи ізоморфізму модулів вигляду $H(M/N)$, де N пробігає чисто-нерозкладні підмодулі модуля M. Базою простору будуть всі множини такого вигляду: $\varphi/\psi = \{N \in Zg_M : \varphi(N)/\psi(N) \neq 0\}$, де $\varphi(N)$ та $\psi(N)$ – формульні підгрупи.

Означення 12. Нехай M – мультиплікаційний модуль, N – його підмодуль. Модуль M називатимемо *pim-модулем*, якщо кожен чисто-нерозкладний підмодуль міститься в єдиному максимальному підмодулі.

Теорема 3. Нехай M – лівий чисто-мультиплікаційний R-модуль, і $Max(M)$ – ретракт простору $Spec_{Zg}(M)$. Тоді M – pim-модуль.

Доведення. Відомо, що $Spec_{Zg}(M)$ – множина всіх чистих первинних підмодулів модуля M. Нехай $\mu : Spec_{Zg}(M) \to Max(M)$ – неперервна ретракція. Існує властивість для мультиплікаційних підмодулів, що кожен власний підмодуль модуля M міститься в максимальному підмодулі M. Якби виконувалося попереднє припущення і для чисто-мультиплікаційного модуля, то $\mu(K) = H$, K – довільний чисто-первинний підмодуль, H – максимальний підмодуль модуля M. Тоді $\mu^{-1}(H)$ міститиме $\overline{\{K\}}$ – довільний максимальний підмодуль H', що міститиме K. Оскільки μ неперервна ретракція, то $H = \mu(H') = H'$. Тому $H' = H$ буде єдиним максимальним підмодулем, що містить K. Теорема доведена.

1. *Barnard A.* Multiplication Modules // J. of Algebra. – 1981 – **71**, №1. – P. 174–178.
2. *De Marco G. and Orsatti A.* Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal // Proc. Amer. Math Soc. – 1971. – **30**. – P. 459–466.
3. *Prest Mike*. Topological and geometric aspects of Ziegler spectrum. // Proceeding of Conference on Infinite Modules Bielefeld Birkhäuser, 2000.
4. *Tuganbaev A. A.* Multiplication Modules // J. of Mathematical Sciences. – 2004. –**123**, № 2. – P. 3839–3905.
5. *Zhang Guoyin, Tong Wenting, Wang Fanggui* Multiplication Modules, in Which Every Prime Submodule Is Contained in a Unique Maximal Submodule // Communications in algebra. – 2004. – **32**, Issue 5. – P. 1945–1959.
6. *Zhang Guoyin, Tong Wenting, Wang Fanggui* Spectrum of noncomutative ring // Communications in algebra. – 2006. – **34,** Issue 8. – P. 2795–2810.

ТЕОРЕМА ДЕ-МАРКО И ОРСАТТИ ДЛЯ СПЕКТРА ЦИГЛЕРА МУЛЬТИПЛИКАЦИОННОГО МОДУЛЯ

Введено понятие lpm-модуля над ассоциативним кольцом и Циглерового спектра для мультипликационных модулей. Рассмотрены чисто-мультипликационные модули, и доказывают аналог теоремы Де-Марко и Орсатти о ретрактности максимального спектра в пространстве $Spec_{Zg}(M)$. *Главные результаты статьи сформулированы в виде теорем 1, 2 и 3.*

GENERALIZATION OF THE THEOREM OF DE-MARCO AND ORSATTI ON THE MULTIPLICATION MODULES

In this paper, we introduce the concept of lpm-module over associative ring and the concept of Ziegler spectrum for multiplication module. Pure-multiplication modules are considered and analogue of theorem of De-Marko and Orsatti about the retraction of maximal spectrum of the space $Spec_{Zg}(M)$ *is proved. The main results of this paper are formulated in the theorems 1, 2 and 3.*

Львів. нац. ун-тет імені Івана Франка, Львів

Поступила
04.10.10