УДК 512.64

В. Р. Зеліско

МАТРИЦІ ТА МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ НАД КІЛЬЦЕМ МНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Встановлено необхідні та достатні умови єдиності факторизації симетричних матриць і єдиності розв'язків матричних рівнянь над кільцем многочленів з інволюцією.

Розв'язання П. С. Казімірським [7] проблеми виділення із матричного многочлена регулярного множника дало змогу знайти необхідні і достатні умови факторизації симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією [4].

Нехай у кільці многочленів $\mathbf{C}[x]$ одним із можливих способів [9] визначена інволюція ∇ :

$$(\alpha) \qquad \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{m} \overline{a}_i (-x)^i ,$$

$$(\beta) \qquad \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{m} a_i (-x)^i ,$$

$$(\gamma) \qquad \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i .$$

На кільце матриць $M_n(\mathbf{C}[x])$ інволюцію ∇ перенесемо так:

$$A(x)^{\nabla} = \| a_{ij}(x) \|^{\nabla} = \| a_{ji}(x)^{\nabla} \| .$$

Многочленну матрицю $A(x)$ називають симетричною, якщо $A(x)^{\nabla} = A(x)$.

Факторизацію симетричної матриці $A(x)$ як зображення її у вигляді

$$A(x) = B(X)C(x)B(x)^{\nabla} , \tag{1}$$

де $B(x)$ та $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – деякі її неособливі, досліджували у праці [9], а в [4] знайдені необхідні і достатні умови факторизації (1), де матриці $B(x)$ та $B(x)^{\nabla}$ є регулярні. Такі факторизації застосовують у прикладних задачах математики і механіки.

Нехай для матриці $A(x)$ із (1) матриця

$$S_A = P(x)A(x)Q(x) = diag(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)) \tag{2}$$

є формою Сміта, тобто за оборотних над $\mathbf{C}[x]$ матриць $P(x)$ та $Q(x)$ існує рівність (2), в якій $\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Припустимо, що форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A = \Phi(x)D(x)\Phi(x)^{\nabla} , \tag{3}$$

де

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) , \ \varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x) , \ \sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i(x) = nr ,$$

а

$$D(x) = \mathrm{diag}(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x)) , \ d_i(x) \mid d_{i+1}(x) , \ i = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Позначимо через Γ, як і у праці [9], множину ∇-нерухомих точок із $\mathbf{C}$. Множина Γ визначена для кожного вказаного вище типу інволюцій. Зокрема, для інволюції (α) множина Γ — уявна вісь $\operatorname{Re} x = 0$, для інволюції (β) – це початок координат $x = 0$, а для інволюції (γ) – $\Gamma = \mathbf{C}$ – уся комплексна площина.

Умова (3) виконується тоді, коли кожний інваріантний множник $\varepsilon_i(x)$ матриці $A(x)$ або не має коренів на множині Γ, або має їх, але кратність кожного такого кореня є парна.

У праці [3] зображення симетричної многочленної матриці $A(x)$ у вигляді (1), де $B(x)$ – регулярна матриця степеня $r \ge 1$ із формою Сміта $S_B = \Phi(x)$, а матриця $C(x) = C(x)^{\nabla}$ має форму Сміта $D(x)$, називають допустимою факторизацією матриці $A(x)$, паралельною факторизації (3) її форми Сміта. Отже, факторизація (1) допустима тоді, коли форма Сміта многочленної матриці дорівнює добутку форм Сміта її співмножників. У цій же публікації знайдені необхідні і достатні умови допустимої факторизації (1), паралельної до факторизації (3), зокрема, використовуючи відомі результати [3, 7, 8], цю умову можна записати у вигляді

$$\det M_{P(x)\|E,\, Ex,\, \ldots,\, Ex^{r-1}\|}(\Phi) \ne 0\,, \tag{4}$$

де $P(x)$ — довільна матриця із (2).

У загальному випадку знайдені [4] необхідні і достатні умови існування факторизації (1), в якій $B(x) = Ex^r + B_1 x^{r-1} + \cdots + B_r$ (E – одинична матриця) – унітальний матричний многочлен степеня r, формою Сміта якого є деяка матриця $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. При цьому необхідно, щоб $\varphi_i(x) \mid \varepsilon_i(x)$. Наступний результат дає умову єдиності такої факторизації.

Теорема 1. *У факторизації (1) симетричної многочленної матриці $A(x)$ унітальний множник $B(x)$ єдиний з формою Сміта $\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ тоді і тільки тоді, коли (1) є допустима факторизація, паралельна факторизації (3) її форми Сміта.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо факторизацію (1), в якій $B(x)$ – унітальний множник степеня r з формою Сміта $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Згідно з результатами праць [7, 11] це означає, що

$$\det M_{V(\Phi)P(x)\|E,\, Ex,\, \ldots,\, Ex^{r-1}\|}(\Phi) \ne 0\,, \tag{5}$$

де

$$V(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ \dfrac{\varphi_2 k_{21}}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & & & \\ \dfrac{\varphi_n k_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \dfrac{\varphi_n k_{n2}}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} & \cdots & \dfrac{\varphi_n k_{n,n-1}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} & 1 \end{pmatrix},$$

$P(x)$ – довільна оборотна матриця зі співвідношення (2),

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, \\ k_{ij0} + k_{ij1}x + \cdots + k_{ijh_{ij}} x^{h_{ij}}, & \text{якщо } (\varphi_i, \varepsilon_j) \ne \varphi_j, \end{cases}$$

$h_{ij} = \deg \dfrac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $i > j$, k_{ijs} – попарно різні змінні величини, які приєднуються до поля $\mathbf{C}$, $s = 0, 1, \ldots, h_i$. Якщо факторизація (1) не є допустимою факторизацією, паралельною до (3), то існує умова $(\varphi_i, \varepsilon_j) \neq \varphi_j$ хоча б для однієї пари i та j, а тому в матриці $V(\Phi)$ хоча б одна змінна k_{ijs} не дорівнює нулю. Тоді коефіцієнти B_i матричного многочлена $B(x) = Ex^r + B_1 x^{r-1} + \cdots + B_r$, знайдені як розв'язки лінійного матричного рівняння згідно з результатами праць [5, 7, 11], також залежать від k_{ijs}, а тому $B(x)$ у факторизації (1) не є єдиний множник із формою Сміта Φ.

Достатність. Нехай факторизація (1) симетричного матричного многочлена $A(x)$ є допустима факторизація, паралельна до факторизації (3) її форми Сміта. Тоді формою Сміта матриці $B(x)^{\nabla}$ у факторизації (1) є матриця $\Phi(x)^{\nabla}$ із розкладу (3), а формою Сміта матриці $C(x)$ є $D(x)$. Згідно з результатами праць [1, 2, 8] унітальний множник $B(x)$ єдиний із формою Сміта $\Phi(x)$.

Наслідок 1. Із теореми 1 та відомих результатів [5, 7, 11], використовуючи узагальнену теорему Безу, дістанемо необхідні та достатні умови існування розв'язку матричного многочленного рівняння

$$X^m A_m + X^{m-1} A_{m-1} + \cdots + X A_1 + A_0 = 0 \tag{6}$$

у таких випадках: 1) усі матриці A_{2k} – ермітові, а всі A_{2k+1} – антиермітові, що відповідає інволюції (α); 2) усі матриці A_{2k} – симетричні, а всі A_{2k+1} – кососиметричні в $M_n(\mathbf{C})$ (інволюція (β)); 3) усі матриці A_i – симетричні в $M_n(\mathbf{C})$ (інволюція (γ)). При цьому розв'язок $X = B$ рівняння (6) є єдиний із жордановою формою, яку визначає матриця $\Phi(x)$, за допустимої факторизації відповідної симетричної многочленної матриці $A(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_0$. Сам розв'язок $X = B$ можна знайти як розв'язок відповідного лінійного матричного рівняння за результатами праць [5, 7, 11].

Зауважимо, що коли матриця $X = B$ є розв'язком рівняння (6), то матриця B^{∇} – розв'язок рівняння $A_m X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \cdots + A_1 X + A_0 = 0$ за таких самих умов, що накладені на коефіцієнти A_i.

Наслідок 2. Використовуючи результати праці [11], легко побачити, що теорема 1 справедлива для факторизації симетричної многочленної матриці над кільцем $\mathbf{R}[x]$ із інволюціями (β) та (γ).

Розглянемо питання про єдиність розв'язків лінійного матричного рівняння

$$A(x)X(x) - Y(x)A(x)^{\nabla} = C(x), \tag{7}$$

де елементи матриць $A(x)$ і $C(x)$ взяті із кільця многочленів $\mathbf{C}[x]$ з інволюцією ∇, яку вводимо в ньому одним із трьох способів (α), (β) чи (γ), а $X(x)$ та $Y(x)$ – невідомі матриці порядку n над $\mathbf{C}[x]$.

Із праці [10] одержуємо, що якщо рівняння (7) має розв'язок, то воно має такий розв'язок $X_0(x), Y_0(x)$, що $\deg X_0 < \deg A(x)$.

Теорема 2. *Лінійне матричне рівняння (7), де $A(x)$ – унітальна матриця ненульового степеня над $\mathbf{C}[x]$, має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли корені $\det A(x)$ не лежать на уявній осі комплексної площини для інволюції (α) в кільці $\mathbf{C}[x]$ або не рівні нулю для інволюції (β). За тотожної інволюції (γ) рівняння єдиного розв'язку не має.*

Д о в е д е н н я. Враховуючи леми 1 і 2 [10], бачимо, що рівняння (7) має єдиний розв'язок $X(x)$, $Y(x)$, де $\deg X < \deg A$, тоді і лише тоді, коли

$$(\det A(x), \det A(x)^{\nabla}) = 1. \quad (8)$$

Знайдемо умови виконання цієї рівності для кожного типу інволюцій.

За інволюції (α), якщо $\det A(x)$ має вигляд $\det A(x) = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_s)$, де $\alpha_i \in \mathrm{C}$, маємо:

$$\det(A(x)^{\nabla}) = (\det A(x))^{\nabla} = (-x - \overline{\alpha}_1)\ldots(-x - \overline{\alpha}_s) = (-1)^s(x - (-\overline{\alpha}_1))\ldots(x - (-\overline{\alpha}_s)).$$

Зобразивши α_k в алгебричній формі $\alpha_k = a_k + b_k i$, бачимо, що умова $\alpha_k = -\overline{\alpha}_k$ виконується, якщо $a_k + b_k i = -(a_k - b_k i) = -a_k + b_k i$, а це можливо лише при $a_k = 0$. Таким чином, рівність (8) не виконується, якщо хоча б один корінь α многочлена $\det A(x)$ лежить на уявній осі комплексної площини (визначеній вище множині Γ ∇-нерухомих точок за інволюції (α)).

За інволюції (β) в $\mathbf{C}[x]$, якщо $\det A(x) = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_s)$, де $\alpha_i \in \mathbf{C}$, то

$$\det(A(x)^{\nabla}) = (\det A(x))^{\nabla} = (-x - \alpha_1)\ldots(-x - \alpha_s)$$

і умова (8) не виконується, якщо хоча б один з коренів $\alpha_i = 0$.

За інволюції (γ) в $\mathbf{C}[x]$, враховуючи те, що $\det A(x) = \det(A(x)^{\nabla})$, одержимо, що умова (8) може виконуватись лише тоді, коли $\deg A(x) = 0$ і $\deg A \neq 0$, а тому в умовах теореми 2 матричне рівняння (7) розв'язку не має. Теорему доведено.

Зауважимо, що коли $\deg A(x) = 0$, тобто коли розглядають лінійні матричні рівняння над полем $\mathbf{C}$ із інволюцією, матимемо такий результат.

Теорема 3. *Лінійне матричне рівняння*

$$AX - XA^{\nabla} = C, \quad (9)$$

де $A, C \in M_n(\mathbf{C})$, *має єдиний розв'язок для нетривіальної інволюції в полі* $\mathbf{C}$ *тоді і лише тоді, коли власні значення матриці* A *не є дійсні чи попарно взаємно спряжені комплексні числа.*

Доведення. Як доведено в праці [9], інволюцію в полі $\mathbf{C}$ можна задати лише двома способами: $z^{\nabla} = z$ і $z^{\nabla} = \overline{z}$, $z \in \mathbf{C}$. Для тотожної інволюції $z^{\nabla} = z$ рівняння (9) є неперервним рівнянням Ляпунова. Умови існування єдиного розв'язку в цьому випадку наведені раніше [6]. За інволюції $z^{\nabla} = \overline{z}$ маємо, що $A^{\nabla} = A^*$ – спряжена матриця до A. Якщо власні значення матриці A є $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то власні значення матриці A^{∇} є $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$. Необхідною і достатньою умовою існування єдиного розв'язку рівняння (9) є $\lambda_i \neq \overline{\lambda}_i$ [6]. Ця умова не виконується, якщо $\lambda_i \in \mathbf{R}$ або якщо серед власних значень матриці A є попарно взаємно спряжені.

Зауваження. Аналогічно можна дістати умови існування єдиного розв'язку лінійного матричного рівняння $AXA^{\nabla} - X = C$, де $A, C \in M_n(\mathbf{C})$, яке узагальнює дискретне рівняння Ляпунова [6].

Зазначимо, що знаходження розв'язків рівняння (7) методом із праці [10] призводить до лінійного матричного рівняння вигляду $AZ - ZB = C$. Для нього умови існування та методи розв'язування досліджували в багатьох публікаціях [6, 10, 12–15].

1. *Зелиско В. Р.* Вопросы факторизации матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – **17**. – С. 28–33.
2. *Зеліско В. Р.* Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. **30**. – С. 36–38.
3. *Зеліско В. Р.* Припустима факторизація і еквівалентність симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією // Алгебра і топологія. Тематичний збірник наукових праць. – К.: ІСДО України, 1993. – С. 53–62.
4. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 91–95.
5. *Зеліско В. Р., Щедрик В. П.* Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування // Там же. – 2005. – **48**, № 4. – С. 20–29.
6. *Икрамов Х. Д.* Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 190 с.
7. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
8. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теор. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 52–61.
9. *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирский мат. журн. – 1973. – **14**, №2. – С. 337–356.
10. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. – 1985. – **37**. – Вып. 6. –С. 789–796.
11. *Щедрик В. П.* Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 370–373.
12. *Feinstein J., Bar-Ness V.* On the Uniqueness of the Minimal Solution to the Matrix Polynomial Equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // J. of the Franklin Institute. – 1980. – **310**, № 2. – P. 131–134.
13. *Gustafson W. H.* Rot's theorem over commutative ring // Linear Algebra and Appl. – 1979. – **23**. – P. 245–251.
14. *Kaczorek T.* Polinomial and rational matrices. Aplications in dynamical systems theory – Communications and Control Engineering. – Dordrecht: Springer, 2007. – 503 p.
15. *Roth W. E.* The equation $AX-YB=C$ and $AX-XB=C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – № 3. – P. 392–396.

МАТРИЦЫ И МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАД КОЛЬЦОМ МНОГОЧЛЕНОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Установлены необходимые и достаточные условия единственности факторизации симметрических матриц и единственности решений матричных уравнений над кольцом многочленов с инволюцией.

MATRICES AND MATRIX EQUATIONS OVER POLYNOMIAL RING WITH INVOLUTION

The necessary and sufficient connections of uniqueness of factorization of symmetric matrices and uniqueness of solutions of matrix equations over polynomial ring with involution are established.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
15.09.10