УДК 512.64+512.55

Н. С. Джалюк, В. М. Петричкович

ПАРАЛЕЛЬНІ ФАКТОРИЗАЦІЇ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗКИ

Наведено короткий огляд результатів, одержаних П. С. Казімірським та його учнями про факторизацію матриць A над різними кільцями, паралельних до факторизацій $\Delta = \varphi\psi$ їх визначників $\det A = \Delta$ (Δ-паралельних факторизацій) та до факторизацій $D^A = \Phi\Psi$ їх канонічних діагональних форм D^A (D-паралельних факторизацій). Введено поняття Δ_i- та D_i-паралельних клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних матриць T, тобто факторизацій матриць T, паралельних до факторизацій $\Delta_i = \varphi_i\psi_i$ та $D_i^T = \Phi_i\Psi_i$ відповідно визначників Δ_i і канонічних діагональних форм D_i^T їх діагональних кліток T_{ii}. Вказано критерії однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць над адекватними кільцями.

Вступ. Добре відома важлива роль факторизацій матриць над різними класами кілець, зокрема над поліноміальними, завдяки їхнім різноманітним застосуванням. Описання факторизацій матриць потребує їхньої класифікації. Нижче наведено деякі типи факторизацій матриць над певними кільцями, паралельних до факторизацій їхніх визначників та канонічних діагональних форм, які описав П. С. Казімірський та його учні. Розглянуто окремо факторизації клітково-трикутних матриць над кільцями з діагональною редукцією матриць та вказані необхідні і достатні умови однозначності з точністю до асоційовності такого типу факторизацій.

Δ-паралельні факторизації матриць. Нехай R − комутативна область з $1 \neq 0$, $M(n,R)$ − кільце $n \times n$-матриць над R, $\Delta = \det A$ − визначник матриці $A \in M(n,R)$.

Припустимо, що матриця $A \in M(n,R)$ неособлива і розкладена у добуток нетривіальних множників

$$A = BC, \tag{1}$$

тобто $B, C \in M(n,R)$ і $B, C \notin GL(n,R)$. Тоді факторизації (1) матриці A відповідає факторизація

$$\Delta = \varphi\psi \tag{2}$$

її визначника $\Delta = \det A$, причому $\varphi = \det B$, $\psi = \det C$.

Означення 1. *Нехай визначник $\Delta = \det A$ матриці $A \in M(n,R)$ розкладений на множники вигляду (2). Факторизацію (1) матриці A таку, що $\det B = \varphi$, $\det C = \psi$, називаємо паралельною до факторизації (2) її визначника Δ або Δ-паралельною факторизацією матриці A.*

Поняття паралельних факторизацій вперше ввів П. С. Казімірський для поліноміальних матриць $A(x) \in M(n, P[x])$, де P − алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль [16, 14]. Найбільш важливими факторизаціями поліноміальних матриць є такі, в яких множники регулярні, зокрема унітальні поліноміальні матриці. Неважко бачити, що не для кожної факторизації $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$ визначника $\Delta(x) = \det A(x)$ (характеристичного полінома $\Delta(x)$) існує Δ-паралельна факторизація матриці $A(x)$ з унітальними множниками.

Спочатку такого типу факторизації поліноміальних матриць П. С. Казімірський розглядав дещо в іншій постановці. Нехай $A(x)$ − регулярна поліноміальна матриця. Множину $K_{A(x)}$ всіх коренів (з урахуванням кратностей) полінома $\Delta(x) = \det A(x)$ розбивають на підмножини K_1 і K_2 і задача полягає в тому, щоб вказати умови існування зображення матриці $A(x)$ у вигляді добутку $A(x) = B(x)C(x)$ регулярних множників $B(x)$ і $C(x)$ таких, що $K_{B(x)} = K_1$ і $K_{C(x)} = K_2$. Аналогічно формулють задачу зображення матриці $A(x)$ у вигляді добутку довільного числа s регулярних множників відповідно до розбиття множини $K_{A(x)}$ на підмножини $K_1,\ldots,K_s$ [9, 11]. Зрозуміло, що такі факторизації $A(x) = B(x)C(x)$ матриці $A(x)$ є паралельні до факторизації $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$ її характеристичного полінома $\Delta(x) = \det A(x)$, де множини $K_{B(x)}$ і $K_{C(x)}$ характеристичних коренів матриць $B(x)$ і $C(x)$ збігаються із множинами коренів поліномів $\varphi(x) = \det B(x)$ і $\psi(x) = \det C(x)$.

Зауважимо, що ще у 1956 році Я. Б. Лопатинський розв'язував подібну задачу. Він вказав необхідні та достатні умови існування для комплексної регулярної поліноміальної матриці $A(x)$ регулярної поліноміальної матриці $B(x)$, яка є лівим дільником $A(x)$, і корені $\det B(x)$ збігаються із виділеними коренями рівняння $\det A(x) = 0$, що відмінні від решти коренів [21].

П. Ланкастер [38] досліджував розкладність на лінійні унітальні множники комплексних регулярних поліноміальних матриць простої структури (елементарні дільники яких лінійні) малих степенів. Якщо $2n$ характеристичних коренів комплексної регулярної поліноміальної матриці $A(x)$ другого степеня і порядку n розбити на дві множини по n характеристичних коренів кожна, які не перетинаються, і існує n лівих лінійно незалежних власних векторів, що відповідають першій множині, і n правих лінійно незалежних власних векторів, що відповідають другій множині характеристичних коренів, то матриця $A(x)$ розкладна на лінійні унітальні множники. Далі вказано спосіб запису множників у розкладі матриці $A(x)$ через зазначені множини лінійно незалежних власних векторів. Аналогічні результати формулюються для регулярних поліноміальних матриць третього та четвертого степенів. П. С. Казімірський цю задачу розв'язав у загальному випадку [16]. Він вказав критерій виділення із регулярної поліноміальної матриці над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль лінійного унітального множника простої структури. Крім того довів, що кожна регулярна поліноміальна матриця простої структури розкладна у добуток лінійних унітальних множників.

На основі введених нових понять матриці значень $M_{G(x)}(\varphi)$ поліноміальної матриці $G(x)$ на системі коренів полінома $\varphi(x)$ [12] (яку раніше називали відповідною матрицею до виділеної множини характеристичних коренів [8, 15]) та супровідної матриці $A_i(x)$ матричного полінома $A(x)$ П. С. Казімірський описав унітальні дільники із заданими їх характеристичними поліномами поліноміальних матриць над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, коли унітальні дільники своїми характеристичними поліномами визначаються однозначно, а отже отримав опис Δ-паралельних факторизацій поліноміальних матриць. Вказав умови існування таких факторизацій, запропонував конструктивний спосіб їх побудови [10, 14] та встановив критерій однозначності унітальних дільників із заданими характеристичними поліномами поліноміальних матриць [1]. Коли множники своїми характеристичними поліномами визначаються однозначно, він також вказав умови існування Δ-паралельних факторизацій поліноміальних матриць з лінійними регулярними множниками [11, 12].

Для поліноміальних матриць над довільними полями такі паралельні факторизації повністю описані у праці [33].

Не для кожної факторизації

$$\Delta(x) = \varphi_1(x) \ldots \varphi_k(x) \tag{3}$$

характеристичного полінома регулярної поліноміальної матриці $A(x)$ є її Δ-паралельна факторизація

$$A(x) = B_1(x) \ldots B_k(x) \tag{4}$$

з регулярними множниками. Встановлено [29], що існують регулярні поліноміальні матриці $A(x)$ без кратних характеристичних коренів і для кожної відповідної факторизації (3) їх характеристичних поліномів $\Delta(x) = \det A(x)$ існують Δ-паралельні факторизації (4). Такі поліноміальні матриці названі абсолютно розкладними. Встановлені також умови абсолютної їх розкладності. У цьому зв'язку вказані нижня та верхня межі для чисел лінійних унітальних дільників регулярних поліноміальних матриць без кратних характеристичних коренів [31] та їх Δ-паралельних факторизацій [30]. П. С. Казімірський описав регулярні поліноміальні матриці, які мають властивість абсолютної виділюваності лінійних унітальних множників, тобто такі, що для кожного дільника $\varphi(x)$ степеня n, де n – порядок матриці $A(x)$, її характеристичного полінома $\Delta(x)$ існує унітальна матриця $B(x)$, $\det B(x) = \varphi(x)$, яка є лівим дільником $A(x)$ [16].

Встановлено [19, 28, 34] зв'язки між існуванням Δ-паралельних факторизацій регулярних поліноміальних матриць з лінійними унітальними множниками і кратностями їх характеристичних коренів та степенями елементарних дільників.

D-паралельні факторизації матриць. Нехай R – комутативна область, в якій кожна матриця $A \in M(n, R)$ має властивість діагональної редукції, тобто існують такі матриці $U, V \in GL(n, R)$, що

$$D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0), \quad \mu_r \neq 0, \tag{5}$$

$\mu_i | \mu_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$. Матрицю D^A називають канонічною діагональною формою матриці A, діагональну матрицю $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m)$, в якій $d_i | d_{i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$ – d-матрицею.

Для матриць $A \in M(n, R)$ над різними кільцями R відомо, що коли матриця $B \in M(n, R)$ є дільником матриці A, то канонічна діагональна форма D^B матриці B є дільником канонічної діагональної форми D^A матриці A [37, 39, 5, 26, 43]. Тому факторизації (1) матриці A відповідає факторизація її канонічної діагональної форми D^A вигляду

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n), \tag{6}$$

де $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, і $\Phi = D^B$. У цьому випадку кажемо, що факторизація (1) матриці A є відповідна до факторизації (6) її канонічної діагональної форми D^A. Таким чином, описання всіх дільників матриці A зводиться до описання її дільників B із заданою канонічною діагональною формою $D^B = \Phi$, де Φ – дільник канонічної діагональної форми D^A матриці A. Такий підхід дав можливість П. С. Казімірському у 1978 році розв'язати проблему виділення регулярних множників із поліноміальної матриці над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль [13, 17]. Він встановив необхідні та достатні умови виділення унітального множника із заданою канонічною діагональною формою із поліноміальної матриці і запропонував ефективний метод побудови виділюваних множників. Як наслідок одержав критерій розв'язності відповідних матричних поліноміальних рівнянь, а також вказав конструктивний метод знаходження їх розв'язків [14].

У факторизації (1) матриці A, що відповідає факторизації (6) її канонічної діагональної форми D^A, матриця B еквівалентна до Φ. Матриця C може бути еквівалентна до Ψ або ж ні.

Приклад 1. Нехай $A \in M(3, \mathbf{Z})$, де

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{Vmatrix},$$

$D^A = \operatorname{diag}(3, 9, 18)$. Матрицю A зобразимо у вигляді добутку

$$A = BC = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ t & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -t & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}, \quad t \in \mathbf{Z}. \tag{7}$$

Факторизації (7) матриці A відповідає факторизація

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(1, 3, 6) \operatorname{diag}(3, 3, 3)$$

її канонічної діагональної форми D^A.

Якщо $t = 3k, k \in \mathbf{Z}$, то матриця C еквівалентна до $\Psi = \operatorname{diag}(3, 3, 3)$, а якщо ж $t \neq 3k, k \in \mathbf{Z}$, то не еквівалентна до Ψ.

Означення 2. *Нехай канонічна діагональна форма D^A матриці A розкладена на множники вигляду (6). Факторизацію (1) матриці A таку, що матриці B і C еквівалентні відповідно до матриць Φ і Ψ, називаємо паралельною до факторизації (6) її канонічної діагональної форми D^A або D-паралельною факторизацією матриці A.*

Для кожної факторизації (6) канонічної діагональної форми D^A матриці A існує факторизація

$$A = BC, \quad B = U^{-1}\Phi, \quad C = \Psi V^{-1} \tag{8}$$

матриці A, де U і V – матриці, які задовольняють співвідношення (5), і ця факторизація матриці A є паралельна до факторизації (6) її канонічної діагональної форми D^A. Однак є факторизації матриці A, як видно із попереднього прикладу, для яких не існує жодної факторизації канонічної діагональної форми D^A матриці A, до якої б вони були паралельні.

Такого типу паралельні факторизації розглянуті у працях [18, 6] для поліноміальних матриць над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Поняття факторизацій матриць, паралельних до факторизацій їх канонічних діагональних форм, введене у [22] для поліноміальних матриць над довільним полем. На основі спеціальної трикутної форми поліноміальної матриці стосовно напівскалярної еквівалентності [32] встановлені умови, за яких кожна факторизація поліноміальної матриці, відповідна до факторизації її канонічної діагональної форми, є D-паралельною факторизацією, та показано класи матриць, які можуть мати лише D-паралельні факторизації. Вказаний критерій існування D-паралельних факторизацій з унітальними множниками поліноміальних матриць над довільним полем, запропонований метод їх побудови та встановлені умови однозначності таких факторизацій. Вказані формули [2], за якими записують всі унітальні дільники із заданою канонічною діагональною формою за умови D-паралельності відповідних факторизацій.

У праці [7] вказані необхідні та достатні умови розкладу комплексної поліноміальної матриці $A(x)$ на лінійні унітальні множники, паралельного до розкладу $D^A(x) = \Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x)$ її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, де $\Phi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ – d-матриці і канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x)$ дорівнює добутку канонічних діагональних форм множників. Доведено також, що такий паралельний розклад матриці $A(x)$ єдиний. Встановлені [27] умови існування розкладів поліноміальних матриць над довільним полем на вказану кількість унітальних множників зазначених степенів, паралельних до розкладів їх канонічних діагональних форм.

Результати щодо паралельних факторизацій матриць над поліноміальними кільцями поширені для матриць над областями головних ідеалів [24] та, більш загально, над комутативними адекватними областями скінченно породжених головних ідеалів [20], які є, як відомо, областями з діагональною редукцією матриць. Використовуючи стандартну форму, встановлену для пар матриць над такими кільцями щодо узагальненої еквівалентності [40, 41], описані D-паралельні факторизації матриць над цими кільцями. Вказано вигляд усіх таких факторизацій та критерій однозначності з точністю до асоційовності D-паралельних факторизацій.

У працях [23, 26] встановлено зв'язки між D-паралельними факторизаціями та діагоналізацією пар матриць. Нехай R – комутативна адекватна область скінченно породжених головних ідеалів і матриця $B \in M(n, R)$ є лівим дільником матриці $A \in M(n, R)$, тобто $A = BC$. Тоді пара матриць (A, B) діагоналізується, тобто існують матриці $U, V_A, V_B \in GL(n, R)$ такі, що $UAV_A = D^A$ і $UBV_B = D^B$ у тому і тільки у тому випадку, коли факторизація $A = BC$ матриці A є D-паралельною факторизацією.

Очевидно, що кожна факторизація матриці A є паралельна до деякої факторизації її визначника Δ, тобто є Δ-паралельна, і навпаки, для кожної факторизації визначника Δ матриці A існує Δ-паралельна факторизація цієї матриці. Останнє справедливо, оскільки для кожної факторизації вигляду (2) визначника Δ матриці A можна побудувати сукупність d-матриць Φ_i таких, що $\det \Phi_i = \varphi$, кожна з яких є дільником канонічної діагональної форми D^A матриці A, тобто

$$D^A = \Phi_i \Psi_i. \tag{9}$$

Тому для матриці A існують факторизації вигляду (8), тобто

$$A = B_i C_i, \ \ B_i = U^{-1}\Phi_i, \quad C_i = \Psi_i V^{-1}, \tag{10}$$

де матриці $U, V \in GL(n, R)$ із співвідношення (5). Факторизації (10) є паралельні і до факторизації (2) визначника Δ матриці A, тобто є Δ-паралельні.

Отже, із визначником φ існує сукупність d-матриць Φ_i таких, що $\det \Phi_i = \varphi$ і Φ_i є лівим дільником D^A. Якщо кільце R факторіальне, то число елементів цієї сукупності скінченне і його неважко обчислити як таке, яке не перевищує числа розкладів натурального числа у суму n невід'ємних доданків, які не спадають.

Отже, клас Δ-паралельних факторизацій матриці A за фіксованої факторизації $\Delta = \varphi\psi$ визначника $\Delta = \det A$ розпадається на підкласи D-паралельних факторизацій щодо факторизацій $D^A = \Phi_i \Psi_i, i = 1, 2, \dots$ канонічної діагональної форми D^A таких, що $\det \Phi_i = \varphi$.

Паралельні клітково-трикутні факторизації матриць. Нехай далі R − адекватне кільце [36], тобто R − область цілісності, в якій кожний скінченно породжений ідеал є головним і для кожного ненульового елемента $a \in R$ і кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи $c, d \in R$, що $a = cd$, причому c є взаємно простим із b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із $b \in R$.

Нехай $T \in M(n, R)$ − неособлива верхня клітково-трикутна матриця, тобто

$$T = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1k} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_{kk} \end{matrix} \right\|, \tag{11}$$

де $T_{ij} \in M(n_i, n_j, R), \quad i, j = 1, \dots, k, \quad i > j$, і нехай матриця T розкладена у добуток клітково-трикутних множників:

$$T = BC = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ 0 & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{kk} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1k} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{kk} \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

де $B_{ii}, C_{ii} \in M(n_i, R), \quad B_{ij}, C_{ij} \in M(n_i, n_j, R), \quad i, j = 1, \dots, k, \quad i > j$. Тоді

$$T_{ii} = B_{ii} C_{ii}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{13}$$

Із факторизації (12) матриці T випливають факторизації її визначника $\det T = \Delta$:

$$\Delta = \varphi\psi, \tag{14}$$

де $\varphi = \det B, \quad \psi = \det C$, та факторизації визначників її діагональних кліток $\det T_{ii} = \Delta_i, \quad i = 1, \dots, k$:

$$\Delta_i = \varphi_i \psi_i, \quad i = 1, \dots, k, \tag{15}$$

де $\varphi_i = \det B_{ii}, \quad \psi_i = \det C_{ii}, \quad i = 1, \dots, k$.

Означення 3. *Нехай визначники* $\Delta_i = \det T_{ii}$ *діагональних кліток* $T_{ii}, \quad i = 1, \dots, k$, *клітково-трикутної матриці* T *розкладені на множники вигляду* (15). *Клітково-трикутну факторизацію вигляду* (12) *матриці* T *таку, що* $\det B_{ii} = \varphi_i, \quad \det C_{ii} = \psi_i, \quad i = 1, \dots, k$, *називаємо паралельною до факторизації* (15) *визначників її діагональних кліток* $T_{ii}, \quad i = 1, \dots, k$, *або коротко −* Δ_i*-паралельною клітково-трикутною факторизацією матриці* T.

Як вже було сказано вище, якщо існує факторизація (14) визначника Δ матриці T, то існує Δ-паралельна факторизація матриці T, але для факторизації (15) визначників Δ_i діагональних кліток T_{ii} матриці T може не існувати Δ_i-паралельної клітково-трикутної факторизації матриці T.

Приклад 2. Нехай

$$T = \left\| \begin{array}{cc:c} 1 & 13 & 8 \\ -6 & 2 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 24 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{matrix} \right\| -$$

клітково-трикутна матриця над $\mathbf{Z}$. Нехай далі визначники діагональних кліток $\det T_{11} = \Delta_1 = 80$ і $\det T_{22} = \Delta_2 = 24$ розкладені на множники

$$\Delta_1 = 8 \cdot 10 = \varphi_1 \psi_1, \tag{16}$$

$$\Delta_2 = 6 \cdot 4 = \varphi_2 \psi_2. \tag{17}$$

Тоді клітки T_{11} та T_{22} (клітка першого порядку) розкладені на множники

$$T_{11} = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix} = B_{11} C_{11}, \tag{18}$$

$$T_{22} = 6 \cdot 4 = B_{22} C_{22} \tag{19}$$

і ці факторизації є паралельні відповідно до факторизацій (16), (17) їхніх визначників Δ_1, Δ_2.

Не існує клітково-трикутної факторизації вигляду

$$T = \begin{Vmatrix} B_{11} & Y \\ 0 & B_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{11} & X \\ 0 & C_{22} \end{Vmatrix}, \tag{20}$$

Що відповідає факторизаціям (18), (19) діагональних кліток T_{11} і T_{22} та є паралельна до факторизацій (16), (17) їхніх визначників Δ_1, Δ_2.

Дійсно, факторизація (20) існує тоді і тільки тоді, коли матричне рівняння

$$B_{11} X + Y C_{22} = T_{12}$$

має розв'язок. Згідно з теоремою Рота [42, 35] це рівняння не має розв'язку, бо матриці

$$\begin{Vmatrix} B_{11} & T_{12} \\ 0 & C_{22} \end{Vmatrix} = \left\Vert\begin{array}{cc:c} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 \end{array}\right\Vert \text{ та } \begin{Vmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{Vmatrix} = \left\Vert\begin{array}{cc:c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 \end{array}\right\Vert$$

не є еквівалентні.

Оскільки всі інші факторизації кліток T_{11} і T_{22}, паралельні до факторизацій (16) та (17) їх визначників Δ_1 і Δ_2, є асоційованими до факторизацій (18) і (19) відповідно, то і для них не існує відповідних їхніх клітково-трикутних факторизацій матриці T, паралельних до факторизацій (16), (17) визначників діагональних кліток.

Умови існування Δ_i-паралельних клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів та класи клітково-трикутних матриць, які мають з точністю до асоційовності лише Δ_i-паралельні клітково-трикутні факторизації встановлені в праці [4].

Означення 4. *Нехай канонічні діагональні форми* D_i^T *діагональних кліток* $T_{ii}, i = 1, \ldots, k,$ *клітково-трикутної матриці* T *вигляду* (11) *розкладені на множники*

$$D_i^T = \Phi_i \Psi_i = \operatorname{diag}(\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{in_i}) \operatorname{diag}(\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in_i}), \tag{21}$$

$i = 1, \ldots, k,$ *де* $\varphi_{il} \,|\, \varphi_{i,l+1}, l = 1, \ldots, n_i - 1$. *Клітково-трикутну факторизацію вигляду* (12) *матриці* T *таку, що* $D^{B_{ii}} = \Phi_i$ *і матриці* C_{ii} *еквівалентні до* Ψ_i, *називаємо паралельною до факторизації* (21) *канонічних діагональних форм* D_i^T *її діагональних кліток* $T_{ii}, i = 1, \ldots, k$, *або коротко* – D_i*-паралельною клітково-трикутною факторизацією матриці* T.

Однозначність паралельних клітково-трикутних факторизацій матриць.

Теорема 1. *Нехай* $T \in M(n, R)$ − *неособлива верхня клітково-трикутна матриця вигляду* (11) *і її діагональні клітки розкладені на множники вигляду* (13). *Тоді існує єдина з точністю до асоційовності клітково-трикутна факторизація вигляду* (12) *матриці* T *відповідна до факторизації* (13) *її діагональних кліток* T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, *у тому і тільки у тому випадку, коли*

$$(\det B_{ss}, \det C_{s+t,s+t}) = 1 \text{ для всіх } s = 1, \ldots, k-1, \quad t = 1, \ldots, k-s.$$

Доведимо теорему 1 аналогічно, як і теорему про однозначність відповідних клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних матриць над областями головних ідеалів із праці [3].

Теорема 2. *Нехай* $T \in M(n, R)$ − *неособлива верхня клітково-трикутна матриця вигляду* (11) *і канонічні діагональні форми* D_i^T *її діагональних кліток* T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, *розкладені на множники вигляду* (21). *Тоді існує єдина з точністю до асоційовності* D_i*-паралельна клітково-трикутна факторизація матриці* T *у тому і тільки у тому випадку, коли*

а) $(\det \Phi_s, \det \Psi_{s+t}) = 1$ *для всіх* $s = 1, \ldots, k-1$, $t = 1, \ldots, k-s$,

б) Ψ_i, $i = 1, \ldots, k$, *є* d*-матрицями.*

Доведення. Достатність. Нехай факторизації (13) діагональних кліток T_{ii} матриці T паралельні до факторизацій (21) канонічних діагональних форм D_i^T кліток T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$. Тоді, враховуючи умову *а*) і теорему 1, маємо, що існує єдина з точністю до асоційовності факторизація (12) матриці T, відповідна до факторизації (13) діагональних кліток T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$.

Нехай

$$T_{ii} = \tilde{B}_{ii}\tilde{C}_{ii}, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{22}$$

інші факторизації кліток T_{ii}, паралельні відповідно до факторизацій (21) канонічних діагональних форм D_i^T кліток T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$. Тоді аналогічно, як у попередньому випадку, існує єдина з точністю до асоційовності факторизація

$$T = \tilde{B}\tilde{C} = \begin{Vmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \ldots & \tilde{B}_{1k} \\ 0 & \tilde{B}_{22} & \ldots & \tilde{B}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{B}_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \ldots & \tilde{C}_{1k} \\ 0 & \tilde{C}_{22} & \ldots & \tilde{C}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{C}_{kk} \end{Vmatrix} \tag{23}$$

матриці T, відповідна до факторизації (22) діагональних кліток T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$. За виконання умови б) на основі результатів праць [24, 25, 20] факторизації (13) і (22) кліток T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, асоційовані. Тепер неважко показати, що факторизації (12) і (23) матриці T, які паралельні до факторизацій (21) канонічних діагональних форм D_i^T кліток T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, є асоційовані.

Необхідність. Нехай матриця T має єдину з точністю до асоційовності клітково-трикутну факторизацію (12), паралельну до факторизації (21) канонічних діагональних форм D_i^T її діагональних кліток T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, а отже, за теоремою 1 виконується умова а). Оскільки діагональні клітки B_{ii}, C_{ii}, $i = 1,\dots,k$, у факторизації (12) матриці T неособливі, то із єдиності, з точністю до асоційовності, факторизації (12) матриці T випливає єдиність відповідних факторизацій (13) кліток T_{ii}, $i = 1,\dots,k$. Тому на основі результатів праць [24, 25, 20] виконується умова б) теореми.

Теорему доведено.◊

Теорема 3. *Нехай* $T \in M(n, R)$ *− неособлива верхня клітково-трикутна матриця вигляду* (11) *і визначники* Δ_i *її діагональних кліток* T_{ii}, $i = 1,\dots,k$ *розкладені на множники вигляду* (15). *Тоді існує єдина з точністю до асоційовності* Δ_i*-паралельна клітково-трикутна факторизація матриці* T *у тому і тільки у тому випадку, коли виконуються умови*

а) $(\varphi_s, \psi_{s+t}) = 1$ *для всіх* $s = 1,\dots,k-1$, $t = 1,\dots,k-s$;

б) $((\varphi_i, \psi_i),\ d^{T_{ii}}_{n_i-1}) = 1$, $i = 1,\dots,k$.

Доводимо цю теорему аналогічно, як і теорему 2 з використанням результатів про однозначність D - і Δ-паралельних факторизацій матриць [24, 25, 20].

Наслідок. *Нехай* $T \in M(n, R)$ *− неособлива верхня клітково-трикутна матриця вигляду* (11) *і канонічні діагональні форми* D_i^T *її діагональних кліток* T_{ii}, $i = 1,\dots,k$, *розкладені на множники вигляду* (21). *Тоді існує єдиний з точністю до правої асоційовності лівий клітково-трикутний дільник* B *матриці* T *такий, що канонічними діагональними формами його діагональних кліток* $B_{11},\dots,B_{kk}$ *є відповідно матриці* $\Phi_1,\dots,\Phi_k$ *у тому і тільки у тому випадку, коли*

а) $(\det\Phi_s, \det\Psi_{s+t}) = 1$ *для всіх* $s = 1,\dots,k-1$, $t = 1,\dots,k-s$,

б) $(\mu_{il}, \varphi_{in_i}) = 1$, $l = 1,\dots,n_i - 1$, $i = 1,\dots,k$.

1. *Грига Б. С., Казімірський П. С.* До питання єдиності виділення унітального множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. − 1976. − № 4. − С. 293−295.

2. *Джалюк Н. С.* Опис паралельних факторизацій многочленних матриць // Наук. вісник Ужгор. ун-ту. Сер. математика і інформатика. − Ужгород: УжНУ, 2009. − Вип. 19. − С. 31−37.

3. *Джалюк Н. С.* Однозначність клітково-трикутних факторизацій матриць над кільцями головних ідеалів // Доп. НАН України. − 2010. − № 1. − С. 7−12.

4. *Джалюк Н., Петричкович В.* Факторизація клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. вісник НТШ. − 2007. − **4.** − С. 79−89.

5. *Забавский Б. В., Казимирский П. С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований // Укр. мат. журн. − 1984. − **36**, № 2. − С. 256−258.

6. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. − 1980. − Вып. 12. − С. 14−21.

7. *Зелиско В. Р.* О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. − 1980. − **32**, № 6. − С. 807−810.

8. *Казімірський П. С.* До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники // Доп. АН УРСР. − 1964. − № 4. − С. 446−448.

9. *Казімірський П. С.* Про розклад поліноміальної матриці на множники // Там же. − 1965. − № 7. − С. 847−849.

10. *Казімірський П. С.* Про виділення регулярного множника з матричного многочлена // Там же. − 1971. − № 8. − С. 686−687.

11.*Казімірський П. С.* Про розклад матричного многочлена на множники // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 315–325.

12.*Казімірський П. С.* Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники // Там же. – 1977. – **29**, № 5. – С. 653–658.

13.*Казімірський П. С.* Розв'язання проблеми виділення регулярного множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 12. – С. 1075–1078.

14.*Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.

15.*Казимирский П. С.* К разложению квадратной полиномиальной матрицы в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 115–119.

16.*Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 29–40.

17.*Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.

18.*Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 52–61.

19.*Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальной матрицы на линейные множители // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 8. – С. 3–9.

20.*Комарницький М. Я., Петричкович В. М.* Теоретико-структурні властивості матриць над кільцями скінченно породжених головних ідеалів // Там же. – 2003. – **46**, № 2. – С. 7–21.

21.*Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители // Науч. записки Львов. политех. Ин-та. Сер. физ.-мат. – 1956. – **38**, № 2. – С. 3–7.

22.*Петричкович В. М.* Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №9. – С. 1228–1233.

23.*Петричкович В. М.* Критерій діагоналізовності пари матриць над кільцем головних ідеалів спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями// Там же. – 1997. – **49**, № 6. – С. 860–862.

24.*Петричкович В. М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, №4. – С. 96–100.

25.*Петричкович В. М.* Про діагоналізованість наборів матриць та єдиність їх факторизацій // Вісник держ. ун-у "Львівська політехніка". – 1999. – № 364. – С. 177–180.

26.*Петричкович В. М.* Звідність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних та діагональних форм і їх застосування // Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 2000. – **43,** № 2. – С. 15–22.

27.*Петричкович В. М.* Про подільність та факторизацію матриць // Мат. студії. – 2004. – **22,** № 2. – С. 115–120.

28.*Петричкович В. М.* Про кратності характеристичних коренів, степені елементарних дільників та факторизацію многочленних матриць // Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 2005. – **48**, `№ 2. – С. 7–17.

29.*Петричкович В. М.* Абсолютная разложимость матричных многочленов // Там же. – 1979. – Вып. 9. – С. 37–41.

30.*Петричкович В. М.* Вопросы разложимости матричных многочленов на множители // Там же. – 1981. – Вып. **14**. – С. 19–26.

31.*Петричкович В. М.* О линейных делителях и приводимости многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 195–200.

32.*Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – **26**. –С. 13–16.

33.*Петричкович В. М., Прокип В. М.* О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 478–483.

34.*Шаваровский Б. З.* О разложимых многочленных матрицах // Матем заметки. – 2000. – **68**, вып. 4. – С. 593–607.

35. *Gustafson W. H.* Roth's theorem over commutative rings // Linear Algebra and its Applications. – 1979. – **23.** – P. 245–251.

36. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49.** – P. 225–236.

37. *Ingraham M. N.* Rational methods in matrix equations // Ibid – 1941. – **47**. – P. 61–70.

38. *Lancaster P.* Lambda-matrices and vibrating systems. – Reprint of the 1966 original / New York: Pergamon Press. – New York: Dover Publications, 2002. – 193 p.

39. *Newmam M.* Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 224 c.

40. *Petrychkovych V.* Generalized eguivalence of pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, № 2. – P. 179–188.

41. *Petrychkovych V.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Visnyk Lviv. Univ. – 2003. – **61.** – P. 153–160.

42. *Roth W. E.* The equations AX-YB=C and AX-XB=C in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – № 3. – P. 392–396.

43. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – № 2. – P. 79–98.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ И ИХ СВЯЗИ

Приведён краткий обзор результатов, полученных П. С. Казимирским и его учениками, о факторизациях матриц A над различными кольцами, паралелльных факторизациям $\Delta = \varphi\psi$ их определителей $\det A = \Delta$ (Δ-параллельных факторизаций) и параллельных факторизациям $D^A = \Phi\Psi$ их канонических диагональных форм D^A (D-параллельных факторизаций). Введены понятия Δ_i- и D_i-параллельных клеточно-треугольных факторизаций клеточно-треугольных матриц T, т.е. факторизаций матриц T, параллельных факторизациям $\Delta_i = \varphi_i\psi_i$ и $D_i^T = \Phi_i\Psi_i$ соответственно определителей Δ_i и канонических диагональных форм D_i^T их диагональных клеток T_{ii}. Указаны критерии однозначности с точностью до ассоциированости таких факторизаций матриц над адекватными кольцами.

PARALLEL FACTORIZATIONS OF MATRICES OVER RINGS AND THEIR CONNECTIONS

The short review of the results obtained by P. S. Kazimirs'ky and his disciples on factorizations of matrices A over different rings, which are parallel to factorizations $\Delta = \varphi\psi$ of their determinants $\det A = \Delta$ (Δ-parallel factorizations) and parallel to factorizations $D^A = \Phi\Psi$ of their canonical diagonal forms D^A (D-parallel factorizations) is established. The conceptions of Δ_i-parallel and D_i-parallel block-triangular factorizations of block-triangular matrices T are introduced, namely the factorizations of matrices T, which are parallel respectively to factorizations $\Delta_i = \varphi_i\psi_i$ and $D_i^T = \Phi_i\Psi_i$ of determinants Δ_i and canonical diagonal forms D_i^T of their diagonal blocks T_{ii}. The criterions of uniqueness up to the association of such factorizations of the matrices over adequate rings are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.09.10