УДК 514.132, 514.135, 514.764.2

Д. О. Дзякович

УНІВЕРСАЛЬНІ БАГАТОТОЧКОВІ ІНВАРІАНТИ ТА ГЕОМЕТРІЯ ПРОСТОРІВ СТАЛОЇ КРИВИНИ

Геометричні властивості двовимірного простору сталої кривини подані як наслідок існування в ньому універсального багатоточкового інваріанта ${}^{(\kappa)}\Delta^2_4$, *що має вигляд визначника відповідної матриці. За цим інваріантом знайдено метрику та аналітичні рівняння геодезійних у двополюсній системі радіальних координат. Показано, що основні метричні співвідношення, а також сталу гауссову кривину, характерні для двовимірної сфери та площини Лобачевського, можна отримати в результаті аналізу інваріанта* ${}^{(\kappa)}\Delta^2_4$.

Вступ. Розглянемо систему m довільно обраних точок метричного простору $\{P_1, P_2, \ldots P_m\}$, яка характеризується розташуванням точок у просторі та відповідним (цьому розташуванню) набором відстаней між ними $r = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^m$, де $i \neq j$. Нехай існує така функція $V_m(r)$, визначена для довільної системи m точок даного простору, що її значення C не залежить від вибору точок $\{P_i\}_{i=1}^m$. Тоді співвідношення $V_m(r) = C$ буде інваріантним відносно будь-яких перетворень системи точок $\{P_i \to P_i'\}_{i=1}^m$. Назвемо функцію $V_m(r)$ *універсальним багатоточковим інваріантом* порядку m (скорочено – УБТ інваріантом).

Можливість існування в метричному просторі таких функцій, а також їх загальні властивості розглянуті в праці [3], де встановлено, що порядок УБТ інваріантів обмежений умовою $m \geq n+2$, де n – розмірність простору. Співвідношення типу $V_m(r) = C$ зазвичай використовують у геометрії відстаней [6].

Якщо геометрія простору відома, то можна спробувати знайти відповідні УБТ інваріанти. Цю задачу розв'язано лише для окремих типів геометрії [3, 6], які відповідають просторам сталої кривини [1]. Але не менш цікавою є обернена задача: визначити й описати геометрію метричного простору за явним виглядом інваріанта $V_m(r)$. Тут також необхідно зрозуміти, як побудувати саме дослідження.

Задача стає простішою і зрозумілішою, коли сформульована для конкретної функції $V_m(r)$, а відповідний метричний простір дає можливість послуговуватися добре розробленим геометричним формалізмом. Тому досліджуватимемо УБТ інваріант для двовимірного простору найменшого порядку $m = 4$ (позначимо його ${}^{(\kappa)}\Delta^2_4$), який має вигляд визначника симетричної матриці з елементами $\varphi(r_{ij})$ і дорівнює нулю:

$$ {}^{(\kappa)}\Delta^2_4 \equiv \left|\varphi(r_{ij})\right|_{i,j=1}^4 = 0, \qquad (1)$$

$$\varphi(r_{ij}) = \begin{Bmatrix} \cos(\kappa r_{ij}) \\ \mathrm{ch}(\kappa r_{ij}) \end{Bmatrix}, \qquad \kappa > 0\,,$$

де κ – довільна позитивна константа, що відіграє роль характеристичного параметра. Функція $\varphi(r_{ij})$ допускає два варіанти залежності від відстаней r_{ij}. Інваріант (1) використовують у геометрії відстаней для характеристики неевклідівських просторів [6; §67, 106], які в рімановській геометрії класифікують як простори сталої ненульової кривини. Але той самий інваріант можна розглядати і поза ріманівською геометрією.

Одразу зауважимо, що розгляд інваріанта (1), як і отримані нижче результати, стосуватимуться метричного простору, обмеженого лише вимогою метричної та геодезійної повноти. Ріманівський характер цього простору не вимагається, але він має випливати з виразу (1). При цьому геометрія простору може бути ріманівською лише за відсутності закруту.

Мета дослідження – знайти та проаналізувати наслідки існування у двовимірному просторі УБТ інваріанта (1) і показати, що геометричні властивості просторів сталої кривини можна описати відповідним УБТ інваріантом. Спробуємо визначити деякі характерні співвідношення елементарної геометрії, аналітичні рівняння геодезійних, а також метрику і кривину для двовимірного простору з інваріантом ${}^{(\kappa)}\Delta_4^2$, використовуючи для цього вираз (1).

Метричні співвідношення. Нехай у двовимірному просторі існує УБТ інваріант ${}^{(\kappa)}\Delta_4^2$. Тоді відстані r у системі будь-яких чотирьох точок цього простору пов'язані співвідношенням (1). Розглянемо систему чотирьох довільно обраних точок $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ (рис.1) і запровадимо такі позначення для відстаней між ними:

$$r_{12} = c,\ \ r_{13} = a,\ \ r_{14} = q,\ \ r_{23} = b,\ \ r_{24} = h,\ \ r_{34} = s\,.$$

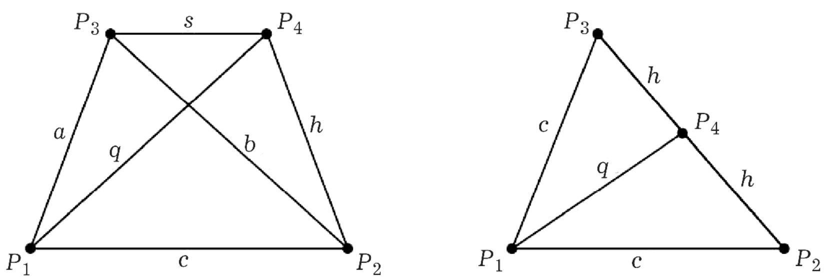

Рис. 1. Метричні співвідношення в системі чотирьох точок.

Перепишемо співвідношення (1) з урахуванням цих позначень:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(c) & \varphi(a) & \varphi(q) \\ \varphi(c) & 1 & \varphi(b) & \varphi(h) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & 1 & \varphi(s) \\ \varphi(q) & \varphi(h) & \varphi(s) & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (2)$$

де також враховано рівності $r_{ij} = r_{ji}$ та $r_{ii} = 0$ для $\forall i, j \in$ ¥ .

Користуючись загальним рівнянням (2), можна легко знайти і простіші метричні співвідношення, наприклад, співвідношення у прямокутному трикутнику або у паралелограмі. Якщо точка P_4 лежить на відрізку геодезійної P_2P_3, тобто $b = h + s$, і виконуються додаткові умови симетрії $s = h$ та $a = c$, то отримаємо з рівняння (2) відомі вирази для теореми Піфагора в неевклідівській планіметрії [1, п. 3.2]:

$${}^{(\kappa)}\Delta_4^2 = \left\{\begin{matrix} 4(\cos^2(\kappa h) - 1)(\cos(\kappa c) - \cos(\kappa q)\cos(\kappa h))^2 \\ 4(\mathrm{ch}^2(\kappa h) - 1)(\mathrm{ch}(\kappa c) - \mathrm{ch}(\kappa q)\,\mathrm{ch}(\kappa h))^2 \end{matrix}\right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \cos(\kappa c) = \cos(\kappa q)\cos(\kappa h) \\ \operatorname{ch}(\kappa c) = \operatorname{ch}(\kappa q)\operatorname{ch}(\kappa h) \end{array}\right\}, \tag{3}$$

де враховано, що для гіперболічного та звичайного косинусів $\varphi(2h) = 2\varphi^2(h) - 1$.

Якщо ж у системі чотирьох точок виконуються умови $h = a$ та $b = q$, то маємо інше співвідношення

$$^{(\kappa)}\Delta_4^2 = \left((\varphi(s)+1)(\varphi(c)+1) - (\varphi(a)+\varphi(q))^2\right)\left((\varphi(s)-1)(\varphi(c)-1) - (\varphi(a)-\varphi(q))^2\right) = 0,$$

яке описує два випадки, коли можлива реалізація вказаних умов – чотирикутники з діагоналями a або q та з діагоналями c та s (неевклідівські аналоги рівнобічної трапеції та паралелограма):

$$\text{I)} \quad \left\{\begin{array}{l} (\cos(\kappa s)-1)(\cos(\kappa c)-1) = (\cos(\kappa a) - \cos(\kappa q))^2 \\ (\operatorname{ch}(\kappa s)-1)(\operatorname{ch}(\kappa c)-1) = (\operatorname{ch}(\kappa a) - \operatorname{ch}(\kappa q))^2 \end{array}\right\}; \tag{4}$$

$$\text{II)} \quad \left\{\begin{array}{l} (\cos(\kappa s)+1)(\cos(\kappa c)+1) = (\cos(\kappa a) + \cos(\kappa q))^2 \\ (\operatorname{ch}(\kappa s)+1)(\operatorname{ch}(\kappa c)+1) = (\operatorname{ch}(\kappa a) + \operatorname{ch}(\kappa q))^2 \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Реалізація того чи іншого варіанта (I або II) залежить від взаємного розташування точок P_i. Якщо в чотирикутнику на рис. 1 обидва кути біля основи c прямі (тобто виконуються умови співвідношення (3)), то його діагональ q задовольняє рівняння $\varphi(q) = \varphi(a)\varphi(c)$. Враховуючи це, а також тотожності $\cos x - 1 = -2\sin^2 x/2$ та $\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x/2$, отримуємо з виразів (4) співвідношення для чотирикутника Саккері в неевклідівській геометрії [7; с. 411]:

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\dfrac{\kappa s}{2} = \cos(\kappa a)\sin\dfrac{\kappa c}{2} \\ \operatorname{sh}\dfrac{\kappa s}{2} = \operatorname{ch}(\kappa a)\operatorname{sh}\dfrac{\kappa c}{2} \end{array}\right\}.$$

Нехай тепер точки $\{P_1, P_2, P_3\}$ лежать на колі з центром у точці P_4. Тоді $q = h = s = R$, де R – радіус кола. Використовуючи знову співвідношення (2), знайдемо формулу для радіуса кола, описаного навколо трикутника зі сторонами a, b, c:

$$^{(\kappa)}\Delta_4^2 = 1 - \varphi^2(a) - \varphi^2(b) - \varphi^2(c) + 2\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) - \varphi^2(R)\big(3 - 2\varphi(a) - 2\varphi(b) - 2\varphi(c) -$$
$$-\varphi^2(a) - \varphi^2(b) - \varphi^2(c) + 2\varphi(a)\varphi(b) + 2\varphi(b)\varphi(c) + 2\varphi(c)\varphi(a)\big) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \varphi^2(R) = \big(1 - \varphi^2(a) - \varphi^2(b) - \varphi^2(c) + 2\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\big)\Big/\big(3 - 2\varphi(a) - 2\varphi(b) - 2\varphi(c) -$$
$$-\varphi^2(a) - \varphi^2(b) - \varphi^2(c) + 2\varphi(a)\varphi(b) + 2\varphi(b)\varphi(c) + 2\varphi(c)\varphi(a)\big).$$

Підставляючи замість $\varphi(x)$ функцію $\cos(\kappa x)$ або $\operatorname{ch}(\kappa x)$ та використовуючи формули $\cos x = 1 - 2\sin^2 x/2$ та $\operatorname{ch} x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x/2$, перетворимо цей результат до звичнішого вигляду:

$$\operatorname{tg}(\kappa R) = \frac{2\sin\left(\kappa\frac{a}{2}\right)\sin\left(\kappa\frac{b}{2}\right)\sin\left(\kappa\frac{c}{2}\right)}{\sqrt{\sin\left(\kappa\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\kappa\frac{b+c-a}{2}\right)\sin\left(\kappa\frac{c+a-b}{2}\right)\sin\left(\kappa\frac{a+b-c}{2}\right)}}, \tag{6}$$

$$\operatorname{th}(\kappa R)=\frac{2\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{a}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{b}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{c}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{a+b+c}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{b+c-a}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{c+a-b}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{a+b-c}{2}\right)}}. \quad (7)$$

Отриманий результат збігається з відповідними формулами сферичної геометрії [2; п. 4.2] (з урахуванням другої формули Каньйолі [2; п. 4.4]) та геометрії Лобачевського [4; с. 36].

У розглянутих випадках формули неевклідівської геометрії (3)–(7) отримані як наслідок існування у просторі УБТ інваріанта ${}^{(\kappa)}\Delta_4^2$. Подібно можна отримати і складніші співвідношення, але для цього можуть знадобитись інваріанти більшого порядку (див. [3] або [6]).

Радіальні координати і геодезійні. Запровадження координат та застосування координатних методів аналізу суттєво розширює можливості для вивчення властивостей різноманітних геометричних фігур та геометрії як такої. Якщо відомо явний вигляд УБТ інваріанта, то можна використовувати як координати відстані від n фіксованих точок простору. У двовимірному просторі вони утворюють двополюсну систему *радіальних координат* ("bipolar coordinates" у [8; гл. 25]). Ці координати задають положення точок неоднозначно, але з їх допомогою можна записати аналітичні рівняння окремих кривих і навіть визначити метрику і кривину, використовуючи для цього лише співвідношення (1).

Для прикладу знайдемо у двовимірному просторі з інваріантом ${}^{(\kappa)}\Delta_4^2$ геометричне місце точок геодезійних ліній, розуміючи їх як лінії найменшої довжини. Оберемо точки $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ так, як показано на рис. 2.

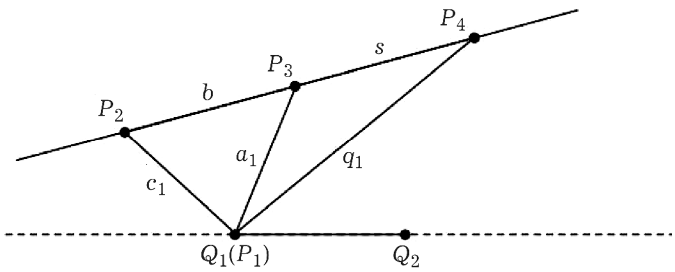

Рис. 2. Геодезійні лінії в радіальних координатах.

Нехай P_4 – довільна точка геодезійної, що проходить через фіксовані точки P_2 та P_3 (обрані довільно). Позначимо точки відліку радіальних координат як Q_1 та Q_2 і оберемо точку P_1 у кожній з цих точок по черзі. В позначеннях для відстаней a, c, q додамо індекси 1 та 2, які відповідатимуть двом різним положенням P_1. Для кожного з положень P_1 співвідношення ${}^{(\kappa)}\Delta_4^2 = 0$ можна записати у вигляді (2) з використанням відповідних індексів. Умову, за якої точка P_4 лежить на геодезійній P_2P_3, можна подати рівністю $h = b + s$ або рівністю $h = \pm(b - s)$ [3] залежно від розташування P_4 відносно точки P_3. З урахуванням цієї умови отримуємо такі рівняння:

$$\left\{\begin{matrix} -\left[(\cos(\kappa q_i)-\cos(\kappa a_i)\cos(\kappa s))\sin(\kappa b)\pm(\cos(\kappa c_i)-\cos(\kappa a_i)\cos(\kappa b))\sin(\kappa s)\right]^2 \\ +\left[(\operatorname{ch}(\kappa q_i)-\operatorname{ch}(\kappa a_i)\operatorname{ch}(\kappa s))\operatorname{sh}(\kappa b)\pm(\operatorname{ch}(\kappa c_i)-\operatorname{ch}(\kappa a_i)\operatorname{ch}(\kappa b))\operatorname{sh}(\kappa s)\right]^2 \end{matrix}\right\}=0,$$

де $i \in \{1,2\}$. Ці рівняння (по два для кожного варіанта залежності $\varphi(r_{ij})$)

пов'язують три змінні величини q_1, q_2 та s, які характеризують положення P_4 на геодезійній P_2P_3. Відстані q_1 та q_2 задають радіальні координати точок геодезійної, а відстань s виконує функції параметра. Введемо новий параметр $t = \pm s$ і перепишемо ці рівняння у зручнішому вигляді ($\forall i = 1,2$):

$$\left\{\begin{matrix} \cos(\kappa q_i) = \cos(\kappa a_i)\cos(\kappa t) + \left(\cos(\kappa a_i)\cos(\kappa b) - \cos(\kappa c_i)\right)\dfrac{\sin(\kappa t)}{\sin(\kappa b)} \\ \mathrm{ch}(\kappa q_i) = \mathrm{ch}(\kappa a_i)\,\mathrm{ch}(\kappa t) + \left(\mathrm{ch}(\kappa a_i)\,\mathrm{ch}(\kappa b) - \mathrm{ch}(\kappa c_i)\right)\dfrac{\mathrm{sh}(\kappa t)}{\mathrm{sh}(\kappa b)} \end{matrix}\right\}. \qquad (8)$$

Знайдені параметричні рівняння є аналітичними рівняннями геодезійних ліній у двополюсній системі радіальних координат. Константи c_i, a_i та b характеризують положення точок P_2 та P_3, через які проходить геодезійна.

Зробимо декілька зауважень щодо використовуваних радіальних координат. Оскільки такі координати задають положення у просторі неоднозначно, то слід враховувати, що рівняння (8) задовольнятимуть точки одразу чотирьох геодезійних ліній, які можуть проходити через дзеркально симетричні двійники точок P_2 та P_3, розташовані по інший бік геодезійної Q_1Q_2 (тобто точки ліній P_2P_3, P_2P_3', $P_2'P_3$ та $P_2'P_3'$). Крім того, у метричному просторі має виконуватись нерівність трикутника, що накладає на координати вузлових точок геодезійної відповідні обмеження:

$$c_1 + c_2 > l, \quad |c_1 - c_2| < l, \quad a_1 + a_2 > l, \quad |a_1 - a_2| < l;$$

де l – відстань між точками Q_1 та Q_2. Відстань b має задовольняти співвідношення (1) для системи точок $\{Q_1, Q_2, P_2, P_3\}$.

Знаходження метрики і кривини. Розглядаючи дві пари відстаней (a,b) та (q,h) на рис.1 як радіальні координати точок P_3 та P_4, можна знайти з рівняння (2) метричну функцію $s = s(a,b,q,h)$ для відстані між двома довільними точками. Щоб визначити відстань ds для пари сусідніх точок, покладемо $s = ds$, $q = a + da$ та $h = b + db$. Використовуючи формули для звичайного та гіперболічного косинусів від суми аргументів та розкладаючи відповідні функції в степеневий ряд, запишемо рівняння (2), зберігаючи лише члени найменшого порядку за ds, da та db:

$$\kappa^2\left(1 - \cos^2(\kappa c) - \cos^2(\kappa a) - \cos^2(\kappa b) + 2\cos(\kappa c)\cos(\kappa a)\cos(\kappa b)\right)ds^2 -$$

$$-\kappa^2\left(1 - \cos^2(\kappa a) - \cos^2(\kappa b) + \cos^2(\kappa a)\cos^2(\kappa b)\right)\left(da^2 + db^2\right) +$$

$$+2\kappa^2\sin(\kappa a)\sin(\kappa b)\left(\cos(\kappa c) - \cos(\kappa a)\cos(\kappa b)\right)da\,db = 0,$$

$$-\kappa^2\left(1 - \mathrm{ch}^2(\kappa c) - \mathrm{ch}^2(\kappa a) - \mathrm{ch}^2(\kappa b) + 2\,\mathrm{ch}(\kappa c)\,\mathrm{ch}(\kappa a)\,\mathrm{ch}(\kappa b)\right)ds^2 +$$

$$+\kappa^2\left(1 - \mathrm{ch}^2(\kappa a) - \mathrm{ch}^2(\kappa b) + \mathrm{ch}^2(\kappa a)\,\mathrm{ch}^2(\kappa b)\right)\left(da^2 + db^2\right) +$$

$$+2\kappa^2\,\mathrm{sh}(\kappa a)\,\mathrm{sh}(\kappa b)\left(\mathrm{ch}(\kappa c) - \mathrm{ch}(\kappa a)\,\mathrm{ch}(\kappa b)\right)da\,db = 0,$$

де c – стала відстань між фіксованими точками P_1 та P_2. Розв'язуючи ці рівняння відносно ds^2, отримуємо такі вирази для метрики:

$$ds^2 = \left\{\begin{matrix} G\,da^2 + 2H\,da\,db + G\,db^2 \\ G'\,da^2 + 2H'\,da\,db + G'\,db^2 \end{matrix}\right\}, \qquad (9)$$

$$G \equiv \frac{1-\cos^2(\kappa a)-\cos^2(\kappa b)+\cos^2(\kappa a)\cos^2(\kappa b)}{1-\cos^2(\kappa c)-\cos^2(\kappa a)-\cos^2(\kappa b)+2\cos(\kappa c)\cos(\kappa a)\cos(\kappa b)},$$

$$H \equiv \frac{-\sin(\kappa a)\sin(\kappa b)\left(\cos(\kappa c)-\cos(\kappa a)\cos(\kappa b)\right)}{1-\cos^2(\kappa c)-\cos^2(\kappa a)-\cos^2(\kappa b)+2\cos(\kappa c)\cos(\kappa a)\cos(\kappa b)},$$

$$G' \equiv \frac{1-\mathrm{ch}^2(\kappa a)-\mathrm{ch}^2(\kappa b)+\mathrm{ch}^2(\kappa a)\mathrm{ch}^2(\kappa b)}{1-\mathrm{ch}^2(\kappa c)-\mathrm{ch}^2(\kappa a)-\mathrm{ch}^2(\kappa b)+2\,\mathrm{ch}(\kappa c)\mathrm{ch}(\kappa a)\mathrm{ch}(\kappa b)},$$

$$H' \equiv \frac{\mathrm{sh}(\kappa a)\mathrm{sh}(\kappa b)\left(\mathrm{ch}(\kappa c)-\mathrm{ch}(\kappa a)\mathrm{ch}(\kappa b)\right)}{1-\mathrm{ch}^2(\kappa c)-\mathrm{ch}^2(\kappa a)-\mathrm{ch}^2(\kappa b)+2\,\mathrm{ch}(\kappa c)\mathrm{ch}(\kappa a)\mathrm{ch}(\kappa b)}.$$

Ці вирази з урахуванням нерівності трикутника треба доповнити додатковими умовами, що встановлюють відповідні обмеження:

$$a+b>c, \qquad |a-b|<c\,.$$

Квадратична форма метрики (9) означає, що відповідний простір, за відсутності закруту, описується в межах ріманівської геометрії [5]. Це дає можливість, вважаючи тензор закруту рівним нулю, одразу знайти за відомими формулами компоненти тензора кривини.

Щоб спростити подальші обчислення, перейдемо до нових координат u та v:

$$u=\begin{Bmatrix}\cos(\kappa a)\\ \mathrm{ch}(\kappa a)\end{Bmatrix},\quad v=\begin{Bmatrix}\cos(\kappa b)\\ \mathrm{ch}(\kappa b)\end{Bmatrix},\quad C=\begin{Bmatrix}\cos(\kappa c)\\ \mathrm{ch}(\kappa c)\end{Bmatrix},$$

де C – нова константа. Метрика (9) в нових координатах матиме вигляд

$$ds^2=\pm\frac{1}{\kappa^2}\frac{\left(1-v^2\right)du^2-2(C-uv)\,du\,dv+\left(1-u^2\right)dv^2}{1-C^2-u^2-v^2+2Cuv}, \tag{10}$$

де знак «+» відповідає першому варіанту метрики (9) та залежності $\varphi(r_{ij})$ в (1), а знак «–» – другому ($\kappa\neq 0$). Випишемо також компоненти метричного тензора:

$$g_{11}=\frac{\pm\kappa^{-2}\left(1-v^2\right)}{1-C^2-u^2-v^2+2Cuv},$$

$$g_{22}=\frac{\pm\kappa^{-2}\left(1-u^2\right)}{1-C^2-u^2-v^2+2Cuv},$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\mp\kappa^{-2}(C-uv)}{1-C^2-u^2-v^2+2Cuv}.$$

Обчисливши для метрики (10) визначник $g\equiv\det(g_{ik})$, переконуємось, що він відмінний від нуля:

$$g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=\frac{\kappa^{-4}}{1-C^2-u^2-v^2+2Cuv}.$$

Тепер можна скористатись формулами ріманівської геометрії для знаходження компонент тензора кривини R_{ijkl} [5; §§ 110–112]. У двовимірному просторі він має лише одну незалежну компоненту, яку можна знайти за формулою

$$R_{1212}=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}\right)+g^{ik}\left(\Gamma_{i,12}\Gamma_{k,12}-\Gamma_{i,11}\Gamma_{k,22}\right),$$

де $$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right); \quad k, i, j \in \{1, 2\}.$$

Підставляючи в ці вирази компоненти метричного тензора для метрики (10) і обчислюючи скалярну $R = R^{kl}_{\cdot\cdot kl}$ та гауссову $K = R / 2$ кривини, приходимо до цілком прогнозованого результату:

$$R_{1212} = \frac{\pm\kappa^{-2}}{1 - C^2 - u^2 - v^2 + 2Cuv}, \tag{11}$$

$$R = \pm 2\kappa^2, \quad K = \pm\kappa^2. \tag{12}$$

Таким чином, за відсутності закруту двовимірний простір з УБТ інваріантом (1) має сталу ненульову кривину – позитивну для першого варіанта залежності $\varphi(r_{ij})$ та негативну для другого. Примітно, що ця найважливіша в ріманівській геометрії властивість сфери або площини Лобачевського випливає з тієї ж умови (2), що і співвідношення елементарної неевклідівської планіметрії.

Висновок. Одержаний результат вказує на придатність задіяних методів для аналізу універсальних багатоточкових інваріантів та дає можливість оцінити коло їх геометричних застосувань. Як переконує приклад інваріанта (1), ці величини досить зручні для аналізу геометричних властивостей простору і дають можливість поглянути на них під іншим кутом. При цьому вони можуть бути однаково дієвими під час розв'язання зовсім різних на перший погляд задач.

За допомогою інваріанта ${}^{(\kappa)}\Delta_4^2$ вдається описати найсуттєвіші властивості не лише елементарної, але і диференціальної геометрії відповідного двовимірного простору (сфери або площини Лобачевського). Такий самий підхід можна застосувати і до просторів сталої кривини розмірності $n > 2$ (якщо $m > 4$).

Діючи за подібною схемою, можна досліджувати геометрію просторів з будь-якими іншими УБТ інваріантами, наприклад, з такими, що є комбінацією вже відомих інваріантів. Але для цього потрібно спершу визначити їх явний вигляд, тобто знайти нові види функції $V_m(r)$.

1. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1988. – 29. – С. 5–146.
2. *Данилевський М. П., Колосов А. І., Якунін А. В.* Основи сферичної геометрії та тригонометрії: навч. посіб. – Харків: ХНАМГ, 2011. – 92 с.
3. *Дзякович Д. О.* Про симетрії універсальних багатоточкових інваріантів, що лежать в основі елементарних геометрій // Прикл. проблеми механіки і математики – 2015. – 13. – С. 195–206.
4. *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. – М.: Изд-во МЦНМО, 2004. – 89 с.
5. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
6. *Blumenthal L. M.* Theory and applications of distance geometry. – New York: Chelsea Publ. Co., 1970. – 347 p.
7. *Greenberg M. J.* Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history. – New York: Freeman and Co., 1993. – 484 p.
8. *Lockwood E. H.* A Book of Curves. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1961. – 200 p.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Геометрические свойства двумерного пространства постоянной кривизны представлены как следствие существования в нём универсального многоточечного инварианта ${}^{(\kappa)}\Delta^2_4$, имеющего вид определителя соответствующей матрицы. По этому инварианту найдены метрика и аналитические уравнения геодезических в двухполюсной системе радиальных координат. Показано, что основные метрические соотношения, а также постоянную гауссову кривизну, характерные для двумерной сферы и плоскости Лобачевского, можно получить в результате анализа инварианта ${}^{(\kappa)}\Delta^2_4$.

UNIVERSAL MULTIPOINT INVARIANTS AND GEOMETRY OF CONSTANT CURVATURE SPACES

The geometric properties of a two-dimensional constant curvature space are presented as a consequence of existence in it of a universal multipoint invariant ${}^{(\kappa)}\Delta^2_4$, which has the form of a determinant of the corresponding matrix. The metrics and analytical equations of geodesics in a bipolar system of radial coordinates are found by this invariant. It is shown that the basic metrical relations, and also the constant Gaussian curvature, which are characteristic for the two-dimensional sphere and the Lobachevsky plane, can be obtained as a result of the invariant ${}^{(\kappa)}\Delta^2_4$ analysis.

Укр. науково-дослід. конструкторсько-технол.
ін-т еластомерних матеріалів і виробів, Дніпро

Одержано
16.07.17