

**ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ РУХУ ДВОЛАНКОВОГО МАНІПУЛЯТОРА
З ВИКОРИСТАННЯМ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ**

Розвинуто методикку параметричної оптимізації в задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором. Маніпулятор під дією керувань (моментів сил у шарнірах) переміщує вантаж у горизонтальній площині. Початкове та кінцеве положення захоплювача маніпулятора, а також тривалість руху вважають заданими. Якість процесу керування оцінено квадратичним функціоналом. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, який ґрунтується на методиці параметризації кутових координат маніпулятора скінченним рядом за заданою системою функцій (ортогональних поліномів) та процедурах нелінійного програмування.

Одним із раціональних способів поліпшення експлуатаційних характеристик маніпуляційних систем є оптимізація їх руху відносно того чи іншого критерію [10]. Вибір критерію залежить від технологічної операції, яку виконує маніпулятор, та умов його функціонування. Серед найпоширеніших критеріїв – час виконання операції, точність позиціонування, витрати енергії на переміщення. Оптимальний рух маніпулятора здійснюється за допомогою приводів, які реалізують відповідний закон керування. Тому вибір оптимального руху маніпулятора можна формалізувати у вигляді відповідної задачі оптимального керування.

Ефективною методикою розв'язання задач оптимального керування маніпуляційними системами є параметрична оптимізація. В її основі – заміна множини допустимих керувань сімейством заданих функцій (з невідомими параметрами), через що вихідну задачу оптимального керування зводять до задачі нелінійного програмування. Для більшості маніпуляційних систем, математичні моделі яких є суттєво нелінійними, застосування класичних методів оптимального керування нашкодується на значні труднощі. Окрім цього, оптимальні режими керування не завжди можна реалізувати приводами маніпулятора. Тому поряд із оптимальними важливе значення мають субоптимальні керування, які дещо простіші у практичній реалізації. Як свідчать числові експерименти, методи параметричної оптимізації дають змогу відносно швидко (упродовж хвилини для дволанкового маніпулятора) розрахувати субоптимальний режим керування.

Задачі параметричної оптимізації режимів керування нелінійних механічних систем досліджували раніше [5–19, 23, 27, 29]. У статті [11] розв'язали задачу оптимального керування рухом семиланкової механічної системи, що моделює ходу двоногого робота. Розв'язок побудовано у два етапи: спочатку у класі кусково-сталих функцій (з параметрами) шукають субоптимальне керування, а далі методами періодичної оптимізації синтезують стабілізуювальний регулятор. Параметричний клас кусково-сталих керувань використали також у задачі енергетично-оптимального керування крокуючим роботом [29], у задачі оптимальної швидкодії дволанкового маніпулятора [23]. Методами параметричної оптимізації розв'язано низку задач оптимального керування механічними системами, які моделюють ходу людини як у “нормі” [5, 15], так і з ортопедичними пристроями [7, 16, 17], та ходу двоногого робота [6, 18]. Розв'язки цих задач побудовано за допомогою параметризації узагальнених координат системи набором згладжувальних кубічних сплайнів. Параметризацію узагальнених координат у вигляді суми кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду використано у задачах сукупної оптимізації конструктивних параметрів та законів руху дволанкового [19] та чотириланкового [12–14] маніпуляторів. У праці [9] для моделювання руху людини у фазі опори на протезовану ногу (як задачі оп-

тимального керування) застосували параметризацію у вигляді суми полінома п'ятого порядку та скінченного тригонометричного ряду. Таку ж параметризацію використали в задачах оптимального керування одностанковим [8] та чотириланковим [27] маніпуляторами. Методику параметричної оптимізації на основі класичних ортогональних поліномів та її застосування у задачах оптимального керування нелінійними динамічними системами описано у працях [25, 26, 28, 30, 31].

Низка статей присвячена дослідженню задач оптимального керування дволанковим маніпулятором. Зокрема, розв'язано [1] задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором з комбінованим функціоналом, де інтегральна частина (квадрати моментів сил у шарнірах) оцінює енерговитрати системи, термінальна частина – тривалість руху. Розв'язок побудовано за умови, коли центр мас другої ланки розміщений на осі шарніра, що спрощує нелінійну математичну модель до лінійних співвідношень. Для подальшої мінімізації функціонала запропоновано методику визначення оптимальної конфігурації маніпулятора у кінцевому положенні та напрямку повороту його ланок. Авторами статті [2] досліджено дві задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором з електромеханічними приводами. Кожний привід складається із електродвигуна постійного струму (із незалежним збудженням) та редуктора. Передавальні числа редукторів вважають великими, що спрощує нелінійні рівняння руху маніпулятора до лінійних. Якість керування оцінено такими функціоналами: енерговитрати та тривалість руху системи (задача 1); енерговитрати та точність позиціонування (задача 2). Оптимальні керування побудовано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.

Нижче досліджено задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором, який під дією керувань (моментів сил у шарнірах) переміщає вантаж за заданий час із початкового положення у кінцеве. Якість процесу керування оцінено квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, що ґрунтується на методиці параметричної оптимізації. Кутів координати маніпулятора параметризовані сумою кубічного полінома та скінченного ряду за системою заданих функцій (ортогональних поліномів) з невідомими коефіцієнтами. Таке подання дає можливість в аналітичному вигляді визначити із початкових та кінцевих умов руху маніпулятора коефіцієнти кубічного полінома. Решту коефіцієнтів знайшли, розв'язуючи відповідну задачу нелінійного програмування.

Мета дослідження – розробка алгоритму параметричної оптимізації законів руху дволанкового маніпулятора з використанням класичних ортогональних поліномів, програмна реалізація алгоритму та числовий аналіз впливу поліномів параметризації на побудований субоптимальний процес.

Модель маніпулятора та формулювання задачі. Дослідимо керований рух дволанкового маніпулятора, механічна модель якого складається із двох твердих тіл OA , AB , з'єднаних між собою циліндричним шарніром A (рис. 1). Ланка OA за допомогою циліндричного шарніра O зв'язана з нерухомою основою, на кінці другої ланки розміщено захоплювач з вантажем. Осі шарнірів O і A ортогональні горизонтальній площині OXY . Шарніри вважаємо ідеальними, захоплювач (з вантажем) моделюємо точковою масою m , зосередженою у точці B . Рівняння руху маніпулятора подамо у вигляді такої системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [23]:

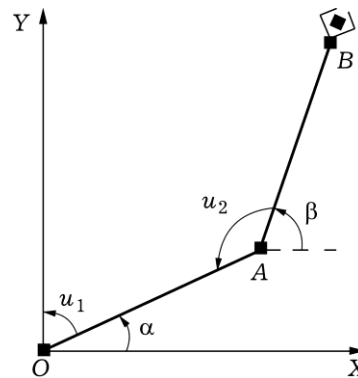


Рис. 1.

$$\begin{aligned} K_a \ddot{\alpha} + K[\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_1 - u_2, \\ K_b \ddot{\beta} + K[\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – кути повороту ланок OA , AB відносно осі OX інерційної системи відліку OXY ; $u_1(t)$, $u_2(t)$ – моменти керувальних сил у шарнірах O і A відповідно; $K_a = J_a + a^2(m_b + m)$, $K_b = J_b + mb^2$, $K = a(mb + m)$; $a = |OA|$, $b = |AB|$ – довжини ланок маніпулятора; J_a , J_b – моменти інерції ланок OA , AB відносно осей шарнірів O , A відповідно; m_b , r – маса ланки AB і відстань від її центра маси до шарніра A . Тут і далі крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t .

Нехай маніпулятор упродовж заданого часу T переносить вантаж із початкового положення

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad (2)$$

у кінцеве

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0. \quad (3)$$

Тут x , y – координати точки B у системі відліку OXY ; x_T , y_T – задані сталі параметри, які задовольняють умови досяжності захоплювача маніпулятора $x_T^2 + y_T^2 \leq (a + b)^2$, $\tau = 0, T$. Швидкості захоплювача в початковий $t = 0$ та кінцевий $t = T$ моменти часу задаємо нульовими.

Сформулюємо задачу оптимального керування. **Задача 1.** Знайти такі керування $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [0, T]$, за яких маніпулятор перемістить вантаж із положення (2) у положення (3) з мінімальним значенням функціоналу

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (4)$$

Квадратичний функціонал (4) часто використовують у задачах оптимального керування механічними системами [1, 12–14, 18, 20, 27, 29]. За певних припущень цей функціонал характеризує енерговитрати системи.

Досліджуваний маніпулятор характеризується суттєвою нелінійністю рівнянь руху та взаємною залежністю рухів для різних ступенів вільності. Також йому притаманна кінематична надлишковість: заданому положенню захоплювача (x_T, y_T) відповідають два набори значень $\{\alpha_T^+, \beta_T^-\}$, $\{\alpha_T^-, \beta_T^+\}$ кутових координат ланок (всередині області досяжності маніпулятора). Усе це ускладнює безпосереднє застосування класичних методів теорії оптимального керування для розв'язання задачі 1.

Параметрична оптимізація руху маніпулятора. Ефективною в розв'язанні цієї задачі є методика параметричної оптимізації. Згідно з нею подамо кутові координати маніпулятора $\alpha(t)$, $\beta(t)$ у вигляді лінійної комбінації заданих функцій з невідомими коефіцієнтами:

$$f = \sum_{i=0}^3 c_i^f t^i + G_n^f(t), \quad G_n^f = \sum_{i=0}^n a_i^f p_i^f(t), \quad f \in \{\alpha, \beta\}, \quad n \geq 4, \quad (5)$$

де $\{p_i^f(t)\}_{i=0}^n$ – задані на проміжку $[0, T]$ функції, $p_i^f \in C^2[0, T]$; $\{a_i^f\}_{i=0}^n$ – коефіцієнти параметризації, які знаходимо, розв'язуючи відповідну задачу нелінійного програмування; $\{c_i^f\}_{i=0}^3$ – коефіцієнти полінома, за допомогою яких забезпечуємо виконання граничних умов (2), (3):

$$c_0^f = f_0 - G_n^f(0), \quad c_1^f = -\dot{G}_n^f(0),$$

$$c_2^f = \frac{1}{T^2} \left\{ 3[f_T - f_0 + G_n^f(0) - G_n^f(T)] + T[2\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)] \right\}, \quad (6)$$

$$c_3^f = \frac{1}{T^3} \left\{ 2[f_0 - f_T + G_n^f(T) - G_n^f(0)] - T[\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)] \right\}.$$

Тут граничні значення $f_\tau \in \{\alpha_\tau, \beta_\tau\}$, $\tau = 0, T$, обчислюємо зі системи тригонометричних рівнянь $a \cos \alpha_\tau + b \cos \beta_\tau = x_\tau$, $a \sin \alpha_\tau + b \sin \beta_\tau = y_\tau$ за умов $-\pi \leq \alpha_\tau \leq \pi$, $-\pi \leq \beta_\tau \leq \pi$ [23]:

$$\alpha(\tau) = \alpha_\tau^\pm, \quad \beta(\tau) = \beta_\tau^\mp, \quad \dot{\alpha}(\tau) = \dot{\beta}(\tau) = 0, \quad \tau = 0, T, \quad (7)$$

де позначено

$$\alpha_\tau^\pm = \tilde{\alpha}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\alpha}_\tau^\pm), \quad \beta_\tau^\pm = \tilde{\beta}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\beta}_\tau^\pm),$$

$$\tilde{\alpha}_\tau^\pm = \psi_\tau \pm \arccos \frac{r_\tau^2 + c^2}{2ar_\tau}, \quad \tilde{\beta}_\tau^\mp = \psi_\tau \mp \arccos \frac{r_\tau^2 - c^2}{2br_\tau},$$

$$\psi_\tau = \operatorname{sgn}(y_\tau) \arccos \frac{x_\tau}{r_\tau}, \quad \Lambda(\xi) \equiv \pi(1 + \operatorname{sgn}(|\xi| - \pi)) \operatorname{sgn}(\xi - \pi),$$

$$r_\tau = \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Введена допоміжна функція $\Lambda(\xi)$ нормалізує значення кутів $\tilde{\alpha}_\tau^\pm$, $\tilde{\beta}_\tau^\mp$ на проміжках $[-\pi, \pi]$. Всередині області досяжності маніпулятора набори $\{\alpha_\tau^+, \beta_\tau^-\}$, $\{\alpha_\tau^-, \beta_\tau^+\}$ відповідають двом конфігураціям кінематичного ланцюга *OAB*, розташованим симетрично відносно прямої *OB*. Нижче обмежимося початковою $\{\alpha_0^+, \beta_0^-\}$ та кінцевою $\{\alpha_T^-, \beta_T^+\}$ конфігураціями ланок маніпулятора. Зазначимо також, що рівність нулю кутових швидкостей у (7) задаємо з огляду на нульові лінійні швидкості захоплювача в умовах (2), (3).

У поданні (5) використаємо класичні ортогональні поліноми [22]:

1) $\{T_i\}$ – поліноми Чебишева (першого роду), $p_i^\alpha = p_i^\beta \equiv T_i(t')$, $t' = 2t/T - 1$,

$$T_0 = 1, \quad T_1 = t', \quad T_{i+1} = 2t'T_i(t') - T_{i-1}(t'), \quad i = \overline{1, n};$$

2) $\{P_i\}$ – поліноми Лежандра, $p_i^\alpha = p_i^\beta \equiv P_i(t')$,

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t', \quad P_{i+1} = [(2i+1)t'P_i(t') - iP_{i-1}(t')]/(i+1), \quad i = \overline{1, n};$$

3) $\{L_i\}$ – поліноми Лагерра, $p_i^\alpha = p_i^\beta \equiv L_i(t)$,

$$L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - t, \quad P_{i+1} = [(2i+1-t)P_i(t) - iP_{i-1}(t)]/(i+1), \quad i = \overline{1, n}.$$

Поліноми Чебишева та Лежандра визначені на проміжку $[-1, 1]$, поліноми Лагерра – на проміжку $[0, +\infty)$. Тому у виразах для поліномів $\{T_i\}$ і $\{P_i\}$ зробили перетворення $t' = 2t/T - 1$ часового проміжку $[0, T] \rightarrow [-1, 1]$.

Відзначимо, що параметризація у вигляді (5) дає можливість порівняно легко отримати вирази для коефіцієнтів кубічного полінома (6), також таке подання є уніфікованим для використання інших функцій параметризації. При цьому, сума ряду для функції $f(t)$ у (5) не залежить від коефіцієнтів a_0^f , a_1^f , a_2^f , a_3^f , що перевіряють безпосереднім підставленням співвідношень (6) та виразів для поліномів $\{T_i\}$, $\{P_i\}$, $\{L_i\}$ у ряд (5). Для всіх трьох наборів поліномів маємо

$$f = \sum_{i=0}^3 (c_i^f t^i + a_i^f p_i^f) = f_0 + \frac{t^2}{T^3} (3T - 2t)(f_T - f_0).$$

Куткові швидкості $\dot{\alpha}(t)$, $\dot{\beta}(t)$ та прискорення $\ddot{\alpha}(t)$, $\ddot{\beta}(t)$, $t \in [0, T]$, обчислюємо диференціюванням виразу (5) за часом t . Далі, після підставлення параметризованих функцій $\alpha(t)$, $\beta(t)$ та їх похідних $\dot{\alpha}(t)$, $\ddot{\alpha}(t)$, $\dot{\beta}(t)$, $\ddot{\beta}(t)$ у рівняння руху (1) знаходимо параметричне сімейство керувань $u_1(t, \mathbf{z})$, $u_2(t, \mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (a_4^\alpha, b_4^\alpha, a_5^\beta, b_5^\beta, \dots, a_n^\alpha, b_n^\alpha, a_n^\beta, b_n^\beta)$ – вектор коефіцієнтів параметризації. В результаті функціонал (4) перетворюємо у функцію багатьох змінних $E(\mathbf{z})$, а отже вихідну задачу оптимального керування зводимо до задачі нелінійного програмування: $E(\mathbf{z}) \rightarrow \min_{\mathbf{z}}$ [4, 24].

Числове моделювання субоптимального руху маніпулятора. Опишемо числові результати розв'язання задачі 1 для маніпулятора, ланки якого мають: кільцевий поперечний переріз зі сталими зовнішнім 0.1 м і внутрішнім 0.094 м діаметрами, сталу густину матеріалу 7850 кг/м³, $a = 0.8$ м, $b = 0.6$ м, $r = 0.3$ м. Умови руху маніпулятора визначають такі параметри: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ м, $x_T = 0.7$ м, $y_T = 0.6$ м, $T = 6$ с, $m = 8$ кг.

Обчислювали в середовищі MATLAB [3] на комп'ютері з процесором AMD Athlon II Dual-Core M230 (2.10 ГГц) та оперативною пам'яттю 2 Гб. У параметричному ряду G_n^f задавали $n = 15$, відповідно загальна кількість параметрів оптимізації становила 24. Для розв'язання задачі нелінійного програмування використовували процедуру мінімізації `fminunc` із пакета MATLAB, у якій за початкове значення вектора параметрів оптимізації приймали $\mathbf{z} = 0$. Точність за параметрами оптимізації та значенням цільової функції задавали відповідно 10^{-6} і 10^{-3} .

У табл. 1 наведено коефіцієнти параметризації для побудованих (відповідно наборам поліномів $\{T_i\}$, $\{P_i\}$, $\{L_i\}$) субоптимальних законів руху маніпулятора. Як бачимо, зі зростанням порядкового номера члена параметричного ряду в (5) відповідний коефіцієнт a_i^f за абсолютним значенням переважно спадає. Для всіх трьох наборів поліномів параметризації мінімальне значення функціонала (4) $E^* = 4.332$, що менше приблизно на 30 % від початкового $E(\mathbf{z})_{\mathbf{z}=0} = 6.14$.

Таблиця 1

i	$\{T_i\}$		$\{P_i\}$		$\{L_i\}$	
	a_i^α	a_i^β	a_i^α	a_i^β	a_i^α	a_i^β
4	0.0160351	-0.0363148	0.0291601	-0.0662648	0.0076455	-0.0123582
5	-0.0081075	-0.0097644	-0.0177951	-0.0232801	0.0119742	-0.0192892
6	0.0003541	0.0005970	0.0008057	0.0008429	0.0082572	-0.0120454
7	0.0013362	0.0021175	0.0035081	0.0058317	0.0015304	0.0016502
8	-0.0000384	-0.0000512	-0.0000389	0.0000599	-0.0018579	0.0101357
9	-0.0002026	-0.0003944	-0.0006377	-0.0012960	-0.0004595	0.0086529
10	-0.0000368	0.0000393	-0.0001269	0.0000103	0.0024571	0.0009281
11	0.0000439	0.0000621	0.0001114	0.0004256	0.0028548	-0.0057119
12	0.0000053	-0.0000001	0.0000354	0.0000336	-0.0004260	-0.0062851
13	0.0000096	-0.0000043	-0.0000078	-0.0001656	-0.0045815	-0.0013172
14	0.0000001	-0.0000010	-0.0000074	-0.0000087	-0.0043572	0.0035785
15	0.0000001	-0.0000004	-0.0000002	0.0000349	-0.0048351	0.0006322

Графічні залежності кінематичних і динамічних характеристик субоптимального процесу, що відповідає поліномам $\{T_i\}$, зображено на рис. 2–7. Тут час t виражено в секундах, лінійні переміщення захоплювача (точки В) x , y – в метрах, швидкості \dot{x} , \dot{y} – в м/с, кути α , β – в радіанах, мо-

менти u_1, u_2 – в Н·м. На рис. 2 зображено траєкторію руху захоплювача (тут і нижче стрілкою вказано напрямок руху), на рис. 3 і 4 наведено графіки закону руху та швидкості захоплювача. Як бачимо, побудований субоптимальний закон руху захоплювача задовольняє граничні умови (2), (3). Графіки кутових координат α, β та швидкостей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ ланок маніпулятора наведено на рис. 5 і 6. Кутові швидкості ланок у початковий і кінцевий моменти руху системи рівні нулю, що відповідає умовам (7). Графіки відповідних субоптимальних керувань u_1, u_2 подано на рис. 7.

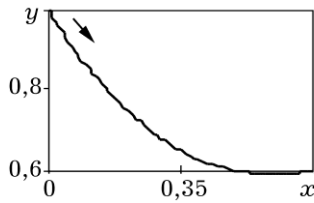


Рис. 2.

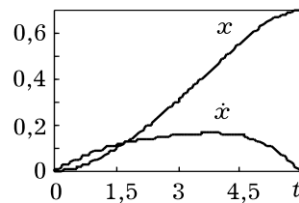


Рис. 3.

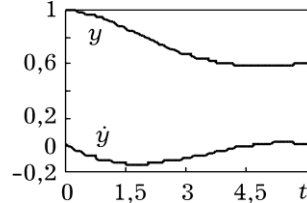


Рис. 4.

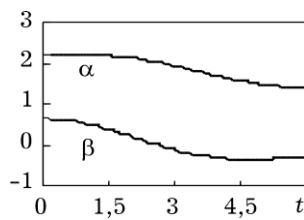


Рис. 5.

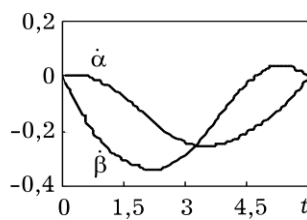


Рис. 6.

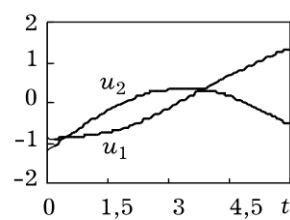


Рис. 7.

У табл. 2 для використовуваних поліномів параметризації подано окремі екстремальні характеристики відповідних субоптимальних режимів керування: $E^* = \min_z E(\mathbf{z})$, $u_i^\vee = \min_t u_i(t)$, $u_i^\wedge = \max_t u_i(t)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$; Δt (с) – тривалість розв’язання задачі параметричної оптимізації (на вказаному вище комп’ютері).

Таблиця 2

$\{p_i\}$	E^*	u_1^\vee	u_1^\wedge	u_2^\vee	u_2^\wedge	Δt
$\{T_i\}$	4.332	-0.895	1.338	-1.153	0.344	15.0
$\{P_i\}$	4.333	-0.895	1.337	-1.147	0.344	16.3
$\{L_i\}$	4.346	-1.076	1.371	-1.282	0.336	6.4

Отже, для всіх трьох наборів поліномів параметризації кінематичні та динамічні характеристики маніпулятора близькі. За аналогією до числових характеристик розсіяння значень вибірки (у математичній статистиці [21]) величину цієї близькості виразимо у вигляді “інтегрального” коефіцієнта варіації (у відсотках): $V[\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, u_1, u_2] = [0.023, 0.301, 1.330, 0.266, 0.700, 1.992, 1.389, 2.041]$, де функцію $V[\omega]$, що оцінює близькість характеристик $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$, отриманих для $\omega(t)$ параметризаціями $\{T_i\}, \{P_i\}, \{L_i\}$ відповідно, задамо у вигляді

$$V[\omega] \equiv \frac{\sigma}{s} 100, \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \int_0^T \sum_{k=1}^3 [\bar{\omega}(t) - \omega_k(t)]^2 dt, \quad s^2 = \int_0^T \bar{\omega}^2(t) dt, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \omega_k(t)$$

Висновки. Для дволанкового маніпулятора розроблено алгоритм розрахунку субоптимального програмного режиму керування, коли захоплювач за заданий час переміститься із початкового положення у кінцеве з міні-

мальним значенням заданого функціонала. Алгоритм ґрунтується на параметризації кутових координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного ряду за системою заданих функцій (класичних ортогональних поліномів), через що вихідну задачу оптимального керування зведено до задачі нелінійного програмування. Алгоритм реалізовано у вигляді комп'ютерної програми (у середовищі MATLAB), за допомогою якої виконано низку числових експериментів. Виявлено, що для всіх трьох наборів поліномів параметризації кінематичні та динамічні характеристики маніпулятора практично ідентичні.

1. Аветисян В. В. Оптимизация конфигураций и направлений поворотов звеньев двузвеного манипулятора по комбинированным критериям качества // Изв. НАН Армении. Механика. – 1998. – 51, № 4. – С. 65–71.
2. Аветисян В. В., Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 100–107.
3. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
4. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. – Москва: Мир, 1982. – 583 с.
5. Бербюк В. Є., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини на підставі експериментальних даних // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 3. – С. 88–93.
6. Бербюк В. Є., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двонного крокуючого робота // Вісн. Київ. ун-ту. Кибернетика. – 2002. – № 3. – С. 7–9.
7. Бербюк В. Є., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128–144.
8. Бербюк В. Є., Кудин М. І. Математичне моделювання субоптимального руху напівпасивно керованих механічних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 3. – С.117–125.
9. Бербюк В. Є., Нищенко Н. И. Энергетически-оптимальное управление движением человека в фазе опоры на протезированную ногу // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 2. – С. 75–86.
10. Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л. Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1990. – № 1. – С. 189–238.
11. Бордюг Б. А., Ларин В. Б. Моделирование движения электромеханического шагающего аппарата // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 4. – С. 115–119.
12. Демидюк М. В. Параметрична оптимізація чотириланкового замкнутого маніпулятора з активними й пасивними приводами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 193–202.
13. Демидюк М. В. Оптимізація параметрів та режимів керування чотириланкового замкнутого маніпулятора // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 51–62.
14. Демидюк М. В. Оптимізація транспортних операцій чотириланкового замкнутого маніпулятора // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – № 20. – С. 61–70.
15. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Задачі математичного моделювання ходи людини з врахуванням біомеханічних експериментальних даних // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 51–62.
16. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини з екзоскелетом // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 120–129.
17. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование ходьбы человека с голеностопным шарнирным ортезом // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 2. – С. 46–57.
18. Демидюк М. В., Литвин Б. А., Голуб Б. М. Параметрична оптимізація ходи двонного робота // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 162–171.
19. Демидюк М. В., Ширко М. І. Оптимізація режимів руху та параметрів дво-

- ланкового маніпулятора з активними і пасивними приводами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 2. – С. 41–48.
20. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
 21. *Сеньо П. С.* Теория ймовірностей та математична статистика: Підручник. – 2-ге вид. – Київ: Знання, 2007. – 556 с.
 22. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1979. – 416 с.
 23. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – Москва: Наука, 1989. – 386 с.
 24. *Betts J. T.* Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming. – Society for Industrial and Applied Mathematic, University City Science Center, Philadelphia. – 2001. – 190 p.
 25. *El-Gindy W. M., El-Hawary H. M., Salim M. S., El-Kady M.* A Chebyshev Approximation for Solving Optimal Control Problems // *Comput. Math. Appl.* – 1995. – **29**, № 6. – P. 35–45.
 26. *El-Kady M., Elbarbary E. M. E.* A Chebyshev expansion method for solving nonlinear optimal control problems // *J. Appl. Math. Comput.* – 2002. – **129**, Nos. 2–3. – P. 171–182.
 27. *Lidberg M., Berbyuk V.* Optimization of Controlled Motion of Closed-Loop Chain Manipulator Robots with Different Degree and Type of Actuation // *Stability and Control: Theory and Application (SACTA)*. – 2002. – **4**, № 2. – P. 56–73.
 28. *Mezzadri F., Galligani E. A.* Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2016. – **121**. – P. 95–108.
 29. *Roussel L., Canudas-de-Wit D., Goswami A.* Generation of energy optimal complete gait cycles for biped robots // *Proc. of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. – 2001. – P. 2036–2041.
 30. *Ross M., Fahroo F.* Legendre Pseudospectral Approximations of Optimal Control Problems // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. – 2003. – **295**, № 1. – P. 327–342.
 31. *Tohidi E., Samadi O. R. N., Farahi M. H.* Legendre Approximation for Solving a Class of Nonlinear Optimal Control Problems // *J. Math. Finance*. – 2011. – № 1. – P. 8–13.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Развита методика параметрической оптимизации в задаче оптимального управления двузвенным манипулятором. Манипулятор под действием управлений (моментов сил в шарнирах) перемещает груз в горизонтальной плоскости. Начальное и конечное положения захвата манипулятора, а также время движения считаются заданными. Качество процесса управления оценено квадратичным функционалом. Предложен алгоритм построения субоптимального решения задачи, основанный на методике параметризации угловых координат манипулятора конечным рядом по системе заданных функций (ортогональных полиномов) и процедурах нелинейного программирования.

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF THE TWO-LINK MANIPULATOR MOTIONS WITH USING ORTHOGONAL POLYNOMIALS

The methodology of parametric optimization of the two-link manipulator control problem is developed. Manipulator transfers a cargo under control stimuli (torques in the joints) within a horizontal plane. The initial and final positions of the manipulator grip, as well as the duration of the motion are given. The quality of the control process is estimated by the quadratic functional. The algorithm of constructing suboptimal solution of the problem, which is based on methodology of the parameterization of the manipulator's angular coordinates by finite set of given functions (orthogonal polynomials) and the methods of nonlinear programming is proposed.