УДК 539.3

І. М. Махоркін, М. І. Махоркін, Л. В. Мастикаш

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВИХ ТРАНСТРОПНИХ ТІЛ ПРОСТОЇ ГЕОМЕТРІЇ

З використанням подання координатних залежностей фізико-механічних характеристик багатошарового тіла у вигляді кусково-сталих функцій та елементів алгебри узагальнених функцій запропоновано методику аналітично-числового розв'язування одновимірних квазістатичних задач термопружності багатошарових транстропних тіл простої геометрії. Методика надає змогу будувати у замкнутому аналітичному вигляді вирази, що описують розподіл полів термосилових напружень у багатошарових транстропних тілах одновимірної структури.

Вступ. Елементи конструкцій енергетичного, хімічного та іншого сучасного промислового обладнання, яке працює в умовах інтенсивного термосилового навантаження, – здебільш неоднорідні тіла простої геометрії (тіла сферичної, циліндричної та пластинчатої форми або їх фрагменти). Очевидно, що на достовірність результатів теоретичних досліджень термопружної поведінки таких елементів конструкцій суттєво впливає нехтування неоднорідностю, зокрема, функціональною градієнтністю (шаруватістю елемента) та анізотропією (зокрема, транстропністю) фізико-механічних характеристик (ФМХ) їх матеріалів. Аналіз стану досліджень термомеханічної поведінки таких тіл засвідчує, що комплексне врахування чинників (зокрема, геометрії тіла та неоднорідності його структури, анізотропії матеріалу та термосилової дії), які зазвичай впливають на формування і поведінку теплового та напружено-деформованого станів, призводить до математичної задачі, розв'язання якої навіть числовими методами пов'язане зі значними труднощами і потребує спеціально розроблених алгоритмів [6–8]. Інженерна ж практика віддає перевагу простим аналітично-числовим співвідношенням, які з прогнозованою достовірністю надають можливість досліджувати термомеханічну поведінку об'єкта, зокрема, його напружено-деформований стан.

Метою цієї праці – розробка з використанням узагальнених (імпульсних) функцій методики побудови аналітично-числових розв'язків одновимірних задач термопружності багатошарових транстропних тіл простої геометрії, що перебувають в умовах комбінованого термосилового навантаження. Запропонована методика дає змогу уникнути необхідності розв'язувати систему $2(n+1)$ рівнянь ($n+1-$ кількість шарів), яка виникає під час використання класичного методу спряження, та у замкнутому вигляді побудувати аналітичні вирази, що описують розподіл полів термосилових напружень у багатошарових тілах простої геометрії за комплексної термосилової дії.

Формулювання задачі. Розглянемо пружне транстропне багатошарове тіло, віднесене до однієї з класичних ортогональних систем координат (α,β,γ) (декартової x,y,z; циліндричної r,φ,z; сферичної r,φ,θ). Поверхні ізотропії тіла збігаються з координатними поверхнями α , граничні – з координатними поверхнями $(\alpha,\beta,\gamma)\sim\eta_i=\text{const}$ $(i=0,n+1)$ (тіло простої геометрії), а поверхні спряження матеріалів – з координатними поверхнями $\alpha=\alpha_i=\text{const}$ $(i=\overline{1,n})$. Початкова температура t_p, масові сили відсутні. Вважаємо також, що тепловий стан та переміщення точок тіла під час його деформації, обумовленої термосиловим навантаженням, характеризуються одновимірним температурним полем $t(\alpha,\tau)$ та одновимірним вектором

$\bar{u}(\alpha,\tau)=u(\alpha,\tau)\bar{e}_\alpha$ ($u(\alpha,\tau)$, $v=w=0$ – проекції вектора переміщень на напрями, дотичні до координатних ліній).

Математичною моделлю термопружної поведінки такого тіла згідно з теорією неоднорідного анізотропного тіла [1] є крайова задача термопружності, яка полягає у визначенні чотирьох функцій координати α та часу τ, зокрема, трьох компонент тензора напружень

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=c_{11}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+c_{12}\frac{k_1}{\alpha}u-\beta_1,\ \ \sigma_2=c_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+(c_{22}k_2+c_{23}k_3)\frac{u}{\alpha}-\beta_2,\\ \sigma_3&=c_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+(c_{23}k_2+c_{22}k_3)\frac{u}{\alpha}-\beta_2,\ \ \sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0.\end{aligned}\right\},\tag{1}$$

де для декартової системи координат $k_1=k_2=k_3=0, \alpha=x$; циліндричної – $k_1=k_2=1, k_3=0, \alpha=r$; сферичної – $k_1=2, k_2=k_3=1, \alpha=r$, та переміщення u – за розв'язком рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\begin{aligned}&c_{11}\left\{\frac{\partial^2u}{\partial\alpha^2}+\frac{k_1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\left[c_{22}+k_3(c_{23}-c_{12})\right]\frac{k_1u}{\alpha^2}\right\}+\\ &\qquad+\left[\frac{\partial c_{11}}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial c_{12}}{\partial\alpha}\frac{k_1u}{\alpha}-\frac{\partial(c_{1t}+2c_{2t})}{\partial\alpha}(t-t_p)\right]=\\ &\qquad=(c_{11}\alpha_{t1}+2c_{12}\alpha_{t1})\frac{\partial(t-t_p)}{\partial\alpha}+\frac{k_1}{\alpha}(\beta_1-\beta_2),\end{aligned}\tag{2}$$

за конкретизованих граничних умов, які описують силове навантаження.

Тут $\beta_1=(c_{11}\alpha_{t1}+2c_{12}\alpha_{t2})(t-t_p)$, $\beta_2=[c_{12}\alpha_{t1}+(c_{22}+c_{23})\alpha_{t2}](t-t_p)$, $c_{it}=c_{1i}\alpha_{ti}$, $c_{ij}=c_{ij}(\alpha)$ – пружні сталі (незалежні від напруженого стану); $\{\alpha_{t1},\alpha_{t2}\}\sim f(\alpha)$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення у напрямі $\bar{e}_\alpha$ та перпендикулярному до нього, відповідно; $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ – нормальні напруження, що діють на елементарних площинах, перпендикулярних до координатних ліній α,β,γ відповідно; $\sigma_{12}=\sigma_{21}$, $\sigma_{13}=\sigma_{31}$, $\sigma_{23}=\sigma_{32}$ – дотичні напруження, що діють на вказаних площинах.

Процедура визначення напружено-деформованого стану. В основі способу аналітично-числового розв'язування крайової задачі (1), (2) – подання координатних залежностей ФМХ кусково-сталими функціями [5]:

$$p(\alpha)=p_1+\sum_{i=1}^{n}(p_{i+1}-p_i)S_+(\alpha-\alpha_i),\ \ \alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{n+1},\tag{3}$$

де $p_i=\text{const}$ відповідають значенню відповідної ФМХ i-го шару; α_i – координата поверхні спряження i-го і i+1-го шарів; $S_+(\varsigma-\varsigma_i)=\{1,\varsigma>\varsigma_i;0,\varsigma\le\varsigma_i\}$.

Підставивши так подані ФМХ у рівняння (2), враховуючи при цьому алгебру узагальнених функцій [5], отримуємо:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial\alpha^2}+\frac{k_1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\left[C_1+\sum_{i=1}^{n}(C_{i+1}-C_i)S_+(\alpha-\alpha_i)\right]\frac{k_1u}{\alpha^2}=\\ &\qquad=F(\alpha)-\sum_{i=1}^{n}\left[C_{11}^i\frac{\partial u}{\partial\alpha}+C_{12}^i\frac{k_1u}{\alpha}-\left(C_{1t}^i+2C_{2t}^i\right)(t-t_p)\right]\Bigg|_{\alpha_i}\delta_+(\alpha-\alpha_i),\end{aligned}\tag{4}$$

де

$$F(\alpha)=\left\{(c_{11}\alpha_{t1}+2c_{12}\alpha_{t2})\frac{\partial(t-t_p)}{\partial\alpha}+\frac{k_1\left[(c_{11}-c_{12})\alpha_{t1}+(2c_{12}-c_{22}-c_{23})\alpha_{t2}\right]}{\alpha}(t-t_p)\right\}\frac{1}{c_{11}};$$

$C_i=\dfrac{c_{22}^i+k_3\left(c_{23}^i-c_{12}^i\right)}{c_{11}^i}$; $\left\{C_{11}^i,C_{12}^i,C_{jt}^i\right\}\sim\dfrac{p_{i+1}-p_i}{c_{11}^{i+1}}$; $\left\{c_{lk},\alpha_{tj}\right\}\sim p(\alpha)$; $p(\alpha)$ – функція виду (3).

Розв'язок рівняння (4) згідно з методом варіації сталої має вигляд

$$u(a) = A_1 u_1(\alpha) + A_2 u_2(\alpha) + u_2(\alpha) \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{u_1(x) H(x)}{\Delta(x)} dx - u_1(\alpha) \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{u_2(x) H(x)}{\Delta(x)} dx \,, \quad (5)$$

де u_1, u_2 – фундаментальна система розв'язків рівняння (4); Δ – її вронскіан; $H(\alpha)$ – права частина рівняння (4).

Систему фундаментальних розв'язків рівняння (4) побудували за допомогою методики, запропонованої в праці [3], у вигляді

$$u_l(\alpha) = (\alpha)^{-0,5\tilde{k}} \sum_{j=1}^{n+1} \left(a_j^{(l)} \alpha^{\lambda_j} + b_j^{(l)} \alpha^{-\lambda_j} \right) N_j(\alpha) \,, \quad l = 1,2 \,, \quad (6)$$

де $a_1^{(1)} = b_1^{(2)} = 1$; $b_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 0$;

$$b_{j+1}^{(l)} = \left(2\lambda_{j+1}\right)^{-1} \left[a_j^{(l)} \alpha_j^{\lambda_j} \left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right) + b_j^{(l)} \alpha_j^{-\lambda_j} \left(\lambda_{j+1} + \lambda_j\right) \right] \alpha_j^{\lambda_{j+1}} ;$$

$$a_{j+1}^{(l)} = \left(2\lambda_{j+1}\right)^{-1} \left[a_j^{(l)} \alpha_j^{\lambda_j} \left(\lambda_{j+1} + \lambda_j\right) + b_j^{(l)} \alpha_j^{-\lambda_j} \left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right) \right] \alpha_j^{-\lambda_{j+1}} ;$$

$$\lambda_i = \sqrt{0,25k^2 + k_1 C_j} \,; \; k = k_1 - 1 \,; \; N_1(\alpha) = 1 - S_+\left(\alpha - \alpha_1\right) = S_-\left(\alpha_1 - \alpha\right);$$

$$N_j(\alpha) = S_+\left(\alpha - \alpha_{j-1}\right) - S_+\left(\alpha - \alpha_j\right); \; N_{n+1}(\alpha) = S_+\left(\alpha - \alpha_n\right),$$

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} .$$

Відповідно до цього з (5) отримали:

$$u = u_1 \left\{ A_1 - \tilde{H}_1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_2}{\Delta} \right)_{\alpha_i} \sigma^{(i)} S_+\left(\alpha - \alpha_i\right) \right\} +$$

$$+ u_2 \left\{ A_2 + \tilde{H}_2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_1}{\Delta} \right)_{\tilde{\alpha}_i} \sigma^{(i)} S_+\left(\alpha - \alpha_i\right) \right\} , \quad (7)$$

де $\sigma^{(i)} = \left[C_{11}^i \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{12}^i \frac{k_1 u}{\alpha} - \left(C_{1t}^i + 2C_{2t}^i \right) \right] \Bigg|_{\alpha_i} = A_1 K_1^{(i)} + A_2 K_2^{(i)} + K_3$;

$$\tilde{H}_1(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{u_2 F}{\Delta} d\alpha \,; \quad \tilde{H}_2(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{u_1 F}{\Delta} d\alpha \,;$$

$\Delta(\alpha) = u_1 u_2' - u_1' u_2 = 2(\alpha)^{-(\tilde{k}+1)} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left(b_j^{(1)} a_j^{(2)} - a_j^{(1)} b_j^{(2)} \right) N_j(\alpha)$, A_1, A_2 – сталі інтегрування, а $K_1^{(i)}, K_2^{(i)}, K_3$ визначають рекурентні співвідношення

$$K_1^{(i)} = C_{11}^{(i)} \left[u_1'(\alpha) - \sum_{j=1}^{i-1} K_1^{(i)} \left(u_2'(\alpha) L_2^{(j)} - u_1'(\alpha) L_1^{(j)} \right) \right]_{\alpha_i} +$$

$$+ \frac{C_{12}^{(i)} k_1}{\alpha_i} \left[u_1(\alpha) - \sum_{j=1}^{i-1} K_1^{(i)} \left(u_2(\alpha) L_2^{(j)} - u_1(\alpha) L_1^{(j)} \right) \right]_{\alpha_i} ,$$

$$K_2^{(i)} = C_{11}^{(i)} \left[u_2'(\alpha) - \sum_{j=1}^{i-1} K_2^{(i)} \left(u_2'(\alpha) L_2^{(j)} - u_1'(\alpha) L_1^{(j)} \right) \right]_{\alpha_i} +$$

$$+ \frac{C_{12}^{(i)} k_1}{\alpha_i} \left[u_2(\alpha) - \sum_{j=1}^{i-1} K_2^{(i)} \left(u_2(\alpha) L_2^{(j)} - u_1(\alpha) L_1^{(j)} \right) \right]_{\alpha_i} ,$$

$$K_3^{(i)}=\left(C_{11}^{(i)}u_2'(\alpha)+\frac{C_{12}^{(i)}k_1}{\alpha}u_2(\alpha)\right)_{\alpha_i}\left(\tilde{H}_2(\alpha_i)-\sum_{j=1}^{i-1}L_2^{(j)}K_3^{(j)}\right)-$$

$$-\left(C_{11}^{(i)}u_1'(\alpha)+\frac{C_{12}^{(i)}k_1}{\alpha}u_1(\alpha)\right)_{\alpha_i}\left(\tilde{H}_1(\alpha_i)-\sum_{j=1}^{i-1}L_1^{(j)}K_3^{(j)}\right)-$$

$$-\left(C_{1t}^{(i)}+2C_{2t}^{(i)}\right)(t-t_p)_{\alpha_i},$$

$$u_l'(\alpha)=(\alpha)^{-0,5(\tilde{k}+2)}\sum_{j=1}^{n}\left[a_j^{(l)}\alpha^{\lambda_j}(\lambda_j-0,5\tilde{k})-b_j^{(l)}\alpha^{-\lambda_j}(\lambda_j+0,5\tilde{k})\right]N_j(\alpha),$$

$$L_1^{(i)}=\left(u_2(\alpha)/\Delta(\alpha)\right)_{\alpha_i},\ L_2^{(i)}=\left(u_1(\alpha)/\Delta(\alpha)\right)_{\alpha_i}.$$

У результаті вираз (7) для u набуває вигляду

$$u(\alpha)=\sum_{l=1}^{2}\left[A_l U_l(\alpha)-D_l(\alpha)\right], \tag{8}$$

а співвідношення для визначення термопружних напружень (1), з огляду на (8), запишемо так:

$$\sigma_1=\sum_{l=1}^{2}\left\{A_l\left[c_{11}U_l'(\alpha)+\frac{c_{12}k_1}{\alpha}U_l(\alpha)\right]-\left[c_{11}D_l'(\alpha)+\frac{c_{12}k_1}{\alpha}D_l(\alpha)\right]\right\}-\beta_1, \tag{9}$$

$$\sigma_2=\sum_{l=1}^{2}\left\{A_l\left[c_{12}U_l'(\alpha)+\frac{c_{22}k_2+c_{23}k_3}{\alpha}U_l(\alpha)\right]-\left[c_{12}D_l'(\alpha)+\frac{c_{22}k_2+c_{23}k_3}{\alpha}D_l(\alpha)\right]\right\}-\beta_2, \tag{10}$$

$$\sigma_3=\sum_{l=1}^{2}\left\{A_l\left[c_{12}U_l'(\alpha)+\frac{c_{23}k_2+c_{22}k_3}{\alpha}U_l(\alpha)\right]-\left[c_{12}D_l'(\alpha)+\frac{c_{23}k_2+c_{22}k_3}{\alpha}D_l(\alpha)\right]\right\}-\beta_2. \tag{11}$$

Тут

$$U_l(\alpha)=u_l+\sum_{j=1}^{n}K_l^{(j)}(L_1^{(j)}u_1-L_2^{(j)}u_2)S_+(\alpha-\alpha_j),$$

$$D_l(\alpha)=(-1)^{l-1}u_l\left[\tilde{H}_l-\sum_{j=1}^{n}L_l^{(j)}K_3^{(j)}S_+(\alpha-\alpha_j)\right], \tag{12}$$

$$U_l'(\alpha)=u_l'+\sum_{j=1}^{n}K_l^{(j)}(L_1^{(j)}u_1'-L_2^{(j)}u_2')S_+(\alpha-\alpha_j),$$

$$D_l'(\alpha)=(-1)^{l-1}u_l'\left[\tilde{H}_l-\sum_{j=1}^{n}L_l^{(j)}K_3^{(j)}S_+(\alpha-\alpha_j)\right]. \tag{13}$$

Сталі інтегрування A_1, A_2 визначимо за допомогою граничних умов, що конкретизують зовнішній силовий вплив.

Напружено-деформований стан двошарового тіла простої геометрії. Для прикладу, спираючись на наведені вище результати, з'ясуємо замкнуті аналітичні вирази опису напруженого стану двошарового транстропного тіла простої геометрії, обумовленого одновимірним стаціонарним температурним полем $t(\alpha)$ та гідростатичним тиском.

Одновимірне стаціонарне температурне поле розглядуваних двошарових структур, згідно з [5], описує розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\left(\lambda_t^{(1)}S_-(\alpha_1-\alpha)+\lambda_t^{(2)}S_+(\alpha-\alpha_1)\alpha^{k_1}\frac{dt}{d\alpha}\right)\right]=0,$$

який має вид

$$t(\alpha)=\tilde{C}_1\left[\frac{I(\alpha)}{\lambda_{t1}^{(1)}}-\frac{\left(\lambda_{t1}^{(2)}-\lambda_{t1}^{(1)}\right)\left(I(\alpha)-I(\alpha_1)\right)}{\lambda_{t1}^{(2)}\lambda_{t1}^{(1)}}S_+(\alpha-\alpha_1)\right]+\tilde{C}_2,$$

де

$$I(\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\alpha^{-k_1}d\alpha=\left\{\alpha-\alpha_0 \text{ при } k_1=0;\ln\frac{\alpha}{\alpha_0}\text{ при } k_1=1;\left(\alpha-\alpha_0\right)\left(\alpha\alpha_0\right)^{-1}\text{ при } k_1=2\right\},$$

$\lambda_t^{(i)}$ – коефіцієнти теплопровідності i-го шару, а сталі інтегрування $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2$ конкретизуємо з граничних умов, зокрема, за постійних температур t_0,t_2 на граничних поверхнях α_0,α_2 маємо:

$$\tilde{C}_1=(t_2-t_0)\left[\frac{I(\alpha_2)}{\lambda_{t1}^{(1)}}-\frac{\left(\lambda_{t1}^{(2)}-\lambda_{t1}^{(1)}\right)\left(I(\alpha_2)-I(\alpha_1)\right)}{\lambda_{t1}^{(2)}\lambda_{t1}^{(1)}}\right]^{-1},\quad \tilde{C}_2=t_0.$$

Напружений стан, згідно з викладеною методикою, описують співвідношення (9)–(11), в яких

$$c_{ij}=c_{ij}^{(1)}S_-(\alpha_1-\alpha)+c_{ij}^{(2)}S_+(\alpha-\alpha_1),$$

а U_l,U_l',D_l,D_l' визначають формули (12), (13) при $n=1$, які у цьому випадку мають вигляд

$$U_l(\alpha)=\alpha^{-0,5\tilde{k}}\left\{\tilde{u}_l^{(1)}S_-(\alpha_1-\alpha)+\left[(1+(-1)^{l-1}K_lL_l)\tilde{u}_l^{(2)}+(-1)^lK_lL_{3-l}\tilde{u}_{3-l}^{(2)}\right]S_+(\alpha-\alpha_1)\right\},$$

$$U_l'(\alpha)=\alpha^{-(0,5\tilde{k}+1)}\left\{\tilde{u}_l'^{(1)}S_-(\alpha_1-\alpha)+\left[(1+(-1)^{l-1}K_lL_l)\tilde{u}_l'^{(2)}+(-1)^lK_lL_{3-l}\tilde{u}_{3-l}'^{(2)}\right]S_+(\alpha-\alpha_1)\right\},$$

$$D_l=(-1)^{l-1}\alpha^{-0,5\tilde{k}}\left[\tilde{u}_l^{(1)}S_-(\alpha_1-\alpha)+\tilde{u}_l^{(2)}S_+(\alpha-\alpha_1)\right]\left[\tilde{H}_l(\alpha)-K_3L_lS_+(\alpha-\alpha_1)\right],$$

$$D_l'=(-1)^{l-1}\alpha^{-(0,5\tilde{k}+1)}\left[\tilde{u}_l'^{(1)}S_-(\alpha_1-\alpha)+\tilde{u}_l'^{(2)}S_+(\alpha-\alpha_1)\right]\left[\tilde{H}_l(\alpha)-K_3L_lS_+(\alpha-\alpha_1)\right],$$

де $\tilde{u}_1^{(1)}=\alpha^{\lambda_1}$; $\tilde{u}_2^{(1)}=\alpha^{-\lambda_1}$; $\tilde{u}_1^{(2)}=a_1\alpha^{\lambda_2}+b_1\alpha^{-\lambda_2}$; $\tilde{u}_2^{(2)}=a_2\alpha^{\lambda_2}+b_2\alpha^{-\lambda_2}$;

$\tilde{u}_1'^{(1)}=(\lambda_1-0,5\tilde{k})\alpha^{\lambda_1}$; $\tilde{u}_2'^{(1)}=-(\lambda_1+0,5\tilde{k})\alpha^{-\lambda_1}$;

$\tilde{u}_1'^{(2)}=(\lambda_2-0,5\tilde{k})a_1\alpha^{\lambda_2}-b_1(\lambda_2+0,5\tilde{k})\alpha^{-\lambda_2}$;

$\tilde{u}_2'^{(2)}=(\lambda_2-0,5\tilde{k})a_2\alpha^{\lambda_2}-b_2(\lambda_2+0,5\tilde{k})\alpha^{-\lambda_2}$; $a_1=\dfrac{\lambda_2+\lambda_1}{2\lambda_2}\alpha_1^{\lambda_1-\lambda_2}$;

$b_1=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_2}\alpha_1^{\lambda_1+\lambda_2}$;

$a_2=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_2}\alpha_1^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$; $b_2=\dfrac{\lambda_2+\lambda_1}{2\lambda_2}\alpha_1^{-(\lambda_1-\lambda_2)}$; $K_1=\dfrac{C_{11}(\lambda_1-0,5\tilde{k})+C_{12}k_1}{\alpha_1^{0,5\tilde{k}+1-\lambda_1}}$;

$K_2=\dfrac{C_{12}k_1-C_{11}(\lambda_1+0,5\tilde{k})}{\alpha_1^{0,5\tilde{k}+1+\lambda_1}}$; $K_3=K_2\tilde{H}_2(\alpha_1)-K_1\tilde{H}_1(\alpha_1)-\left[C_{1t}+2C_{2t}\right]\left(t-t_p\right)_{\alpha_1}$;

$L_1=-\dfrac{\alpha_1^{0,5\tilde{k}+1-\lambda_1}}{2\lambda_1}$; $L_2=-\dfrac{\alpha_1^{0,5\tilde{k}+1+\lambda_1}}{2\lambda_1}$; $C_{1j}=\dfrac{c_{1j}^{(2)}-c_{1j}^{(1)}}{c_{11}^{(2)}}$; $C_{it}=\dfrac{c_{1i}^{(2)}\alpha_{ti}^{(2)}-c_{1i}^{(1)}\alpha_{ti}^{(1)}}{c_{11}^{(2)}}$;

$\tilde{H}_l(\alpha)=-\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\alpha^{0,5\tilde{k}+1}}{2\lambda_1}\left[u_{3-l}^{(1)}F_1(\alpha)\mathrm{S}_-(\alpha_1-\alpha)+u_{3-l}^{(2)}F_2(\alpha)\mathrm{S}_+(\alpha-\alpha_1)\right]d\alpha$;

$\lambda_{1,2}=\sqrt{0,25k^2+k_1C_{1,2}}$;

$$F_j(\alpha) = \left\{ (c_{11}^{(j)}\alpha_{t1}^{(j)} + 2c_{12}^{(j)}\alpha_{t2}^{(j)}) \frac{\partial(t-t_p)}{\partial\alpha} + \frac{k_1\left[(c_{11}^{(j)} - c_{12}^{(j)})\alpha_{t1}^{(j)} + \left(2c_{12}^{(j)} - c_{22}^{(j)} - c_{23}^{(j)}\right)\alpha_{t2}^{(j)} \right](t-t_p)}{\alpha} \right\} \frac{1}{c_{11}^{(j)}}.$$

Сталі A_1, A_2, що фігурують у виразах (9)–(11), визначимо з граничних умов

$$\sigma_1\big|_{\tilde\alpha_1} = -P_1,\ \sigma_1\big|_{\tilde\alpha_2} = -P_2,\quad (\tilde\alpha_1 = \alpha_0,\ \tilde\alpha_2 = \alpha_2)$$

згідно з формулами

$$A_1 = \frac{b_{11}a_{22} - b_{22}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},\quad A_2 = \frac{b_{22}a_{11} - b_{11}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

де

$$b_{ii} = \sum_j^2 \left[c_{11}^{(i)} D_j'(\tilde\alpha_i) + \frac{c_{12}^{(i)} k_1}{\tilde\alpha_i} D_j(\tilde\alpha_i) \right] + (c_{11}^{(i)}\alpha_{t1}^{(i)} + 2c_{12}^{(i)}\alpha_{t2}^{(i)})(t-t_p)_{\tilde\alpha_i} - P_i,$$

$$a_{ij} = c_{11}^{(i)} U_j'(\tilde\alpha_i) + \frac{c_{12}^{(i)} k_1}{\tilde\alpha_i} U_j(\tilde\alpha_i).$$

Результати числової апробації. Використовуючи отримані співвідношення розрахуємо стаціонарний тепловий та обумовлений ним термонапружений стани двошарового [4] трансверсально ізотропного циліндра, внутрішня R_0 та зовнішня R_2 поверхні якого знаходяться під дією гідростатичних тисків P_1, P_2 та постійних температур t_0, t_2, відповідно. Вважаємо, що на поверхні спряження шарів r_1 виконується ідеальний термомеханічний контакт, а початкова температура $t_p = 273\,\text{К}$. Числові розрахунки виконували для значень ФМХ, наведених у таблиці [2, 4].

№ шару	$c_{11}^{(i)}$, 10^{10}Па	$c_{22}^{(i)}$, 10^{10}Па	$c_{55}^{(i)}$, 10^{10}Па	$c_{12}^{(i)}$, 10^{10}Па	$c_{23}^{(i)}$, 10^{10}Па	$\lambda_{t1}^{(i)}$, Вт/мК	$\alpha_{t1}^{(i)}$, 10^{-6}К$^{-1}$	$\alpha_{t2}^{(i)}$, 10^{-6}К$^{-1}$
1 – магній	6,17	5,97	1,64	2,62	2,17	144	25,44	25,44
2– кварц	11,04	11,66	3,606	1,67	3,28	10,7	7,1	13,2

Деякі результати розрахунків у графічному вигляді подано на рис. 1; 2 у безрозмірному вигляді $t^* = \dfrac{t}{t_0}$, $\sigma_i^* = \dfrac{\sigma_i}{p^*}$, $(i = 1,2,3)$, $\rho = \dfrac{r}{R_0}$, $p_i^* = 10^8\,\text{Па}$, $t_0 = 273\,\text{К}$.

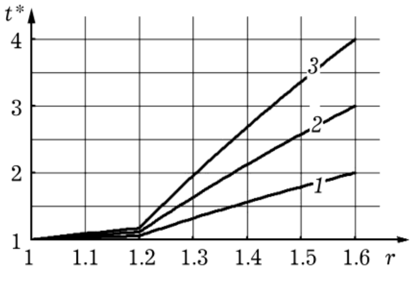

Рис. 1.

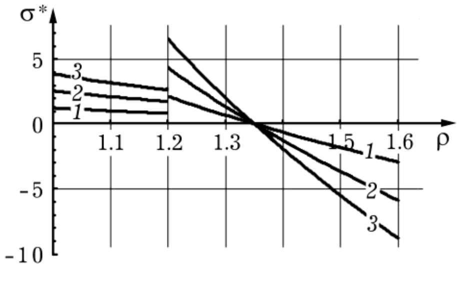

Рис. 2.

На рис. 1 зображено радіальний розподіл температури, а на рис. 2 – колових σ_2^* напружень за відсутності гідростатичних тисків за різних відношень температур граничних поверхонь $t_2 / t_0 = 2$; 3; 4 (відповідно криві *1*–*3*) при $\rho_0 = 1$; $\rho_1 = 1{,}2$; $\rho_2 = 1{,}6$.

Висновок. Запропонована методика аналітично-числового розв'язування одновимірних задач термопружності багатошарових транстропних тіл простої геометрії за умов комбінованого термосилового навантаження дає змогу уникнути необхідності розв'язувати систему $2(n+1)$ рівнянь (n – кількість поверхонь спряження шарів), що виникає під час використання класичного методу спряження, та у замкнутому вигляді побудувати аналітичні вирази для опису розподілу полів термосилових напружень у багатошарових тілах, які при цьому виникають.

1. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1981. – 216 с.
2. *Кларк С.* Справочник физических констант горных пород. – Москва: Наука, 1969. – 544 с.
3. *Кушнір Р. М.* О построении решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами// Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 55–59.
4. *Немиш Ю. Н.* Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. – Киев: Наук. думка, 1989. – 312с.
5. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
6. *Kushnir R., Popovych* V. Application of the Generalized Functions Method for Analysis of Thermal Stresses in Piecewise-Homogeneous Solids // Encyclopedia of Thermal Stresses/ Ed. R. B. Hetnars. – Springer, 2014. – **1**. – P. 224–230.
7. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the Thermal Fields and Stresses in Multiplayer Solids by Means of the Constructed Green Functions // Encyclopedia of Thermal Stresses./ Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – **2**. – P. 924–931.
8. *Popovych V.* Methods for Determination of the Thermo-stressed State of Thermosensitive Solids Under Complex Heat Exchange Conditions // Encyclopedia of Thermal Stresses/ Ed. R. B. Hetnars. – Springer, 2014. – **6**. – P. 2997–3008.

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТРАНСТРОПНЫХ ТЕЛ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИИ

С использованием представления координатных зависимостей физико-механических характеристик многослойного тела в виде кусочно-постоянных функций и элементов алгебры обобщенных функций предложена методика аналитически-численного решения одномерных квазистатических задач термоупругости для многослойных транстропных тел простой геометрии. Методика позволяет строить в замкнутом аналитическом виде выражения, описывающие распределение полей термосиловых напряжений в многослойных транстропных телах одномерной структуры.

ANALYTICAL-NUMERICAL DETERMINATION OF THERMOELASTIC STATE OF MULTILAYER TRANSTROPIC BODIES WITH SIMPLE GEOMETRY

Using the presentation of coordinate dependences of physical-mechanical characteristics of multilayer body in the form of piecewise-constant functions and the elements of algebra of generalized functions, we propose the method for analytical-numerical solution of one-dimensional quasi-static thermoelasticity problems for multilayer transtropic bodies with simple geometry. The method enables one to construct the closed-form analytical expressions that describe thermal-power stress field distribution in multilayer transtropic bodies of one-dimensional structure.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.09.16