

В. А. Шевчук

## ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ З ТОНКИМ ДВОСТОРОННІМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИВОМ ЗА УМОВ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕПЛООБМІНУ

*На основі отриманого аналітичного розв'язку одновимірної задачі термонапруженості для пластини з двостороннім тонким багат шаровим покритвом за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем зі змінною температурою досліджено термонапружений стан системи.*

**Вступ.** Для зміцнення конструкційних елементів і захисту від агресивного впливу середовища (корозивного, абразивного, теплового, механічного тощо) на їх поверхню наносять спеціальні покриття з відмінними від основного матеріалу фізико-механічними характеристиками. Під час експлуатації у таких елементах виникає нерівномірний розподіл температури і з'являються напруження та деформації, які можуть спричинити відшарування покриття та руйнування елементів конструкцій. Суттєвим є те, що такі покриття можуть бути багат шаровими (що пов'язано з умовами їх виготовлення або функціональними вимогами), експлуатувати такі системи можна за нестационарного теплового навантаження [3, 7, 17–19]. Однак дослідження термонапруженого стану пластинчатих елементів конструкцій з урахуванням нестационарності зовнішньої теплової дії в основному обмежуються однорідними тілами [10, 11, 15, 17–19]. Лише в деяких працях проаналізовано окремі випадки неоднорідності: зокрема, розглянуто [10] задачі для пластин з підкріпленням краєм і спряжених у стик, розв'язано [12] задачу для двоскладової смуги-пластини та враховано [5] неоднорідність тільки коефіцієнта лінійного температурного розширення. Дослідження термонапруженого стану пластин з покриттями здебільш обмежуються незмінною за часом температурою довкілля [1, 2, 4, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 26, 27]. Лише в праці [6] для загальнішого випадку багат шарових пластин з урахуванням часової залежності температури зовнішнього середовища розроблено аналітико-числову наближену процедуру розрахунку температурних напружень.

Нижче на основі отриманого раніше [21] розв'язку задачі теплопровідності для системи пластина–двосторонній багат шаровий покрив за нестационарного конвективного теплообміну з довкіллям знайдено розв'язок відповідної задачі термонапруженості та досліджено термонапружений стан пластини з ідентичними тришаровими покриттями для експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища.

**Формулювання задачі теплопровідності.** Розглянемо одновимірну крайову задачу теплопровідності для пластини товщиною  $h$  з двостороннім багат шаровим покритвом (рис. 1) за умов нестационарного конвективного теплообміну.

Рівняння теплопровідності та початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t^{(T)}}{\partial \tau} = a^{(T)} \frac{\partial^2 t^{(T)}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial \tau} = a_i^{(1)} \frac{\partial^2 t_i^{(1)}}{\partial x^2}, \quad x_i^{(1)} < x < x_{i-1}^{(1)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(1)}\}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial t_i^{(2)}}{\partial \tau} = a_i^{(2)} \frac{\partial^2 t_i^{(2)}}{\partial x^2}, \quad x_{i-1}^{(2)} < x < x_i^{(2)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(2)}\}, \quad (2.2)$$

$$t^{(T)} \Big|_{\tau=0} = t_i^{(k)} \Big|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(k)}\}. \quad (3)$$

Приймаємо, що на межі покрив-середовище відбувається теплообмін згідно з законом Ньютона

$$-\lambda_{n^{(2)}}^{(2)} \frac{\partial t_{n^{(2)}}^{(2)}}{\partial x} = \mu^{(2)} (t_{n^{(2)}}^{(2)} - t^{(C2)}) \quad \text{при} \quad x = x_{n^{(2)}}^{(2)} = h + \delta^{(2)}, \quad (4)$$

$$\lambda_{n^{(1)}}^{(1)} \frac{\partial t_{n^{(1)}}^{(1)}}{\partial x} = \mu^{(1)} (t_{n^{(1)}}^{(1)} - t^{(C1)}) \quad \text{при} \quad x = x_{n^{(1)}}^{(1)} = -\delta^{(1)}, \quad (5)$$

а на поверхнях поділу шарів покриву і покриву з тілом виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$t_i^{(1)} = t_{i-1}^{(1)}, \quad \lambda_i^{(1)} \frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial x} = \lambda_{i-1}^{(1)} \frac{\partial t_{i-1}^{(1)}}{\partial x}, \quad \text{якщо} \quad x = x_{i-1}^{(1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^{(1)}, \quad i \in \{2, \dots, n^{(1)}\}, \quad (6)$$

$$t_1^{(1)} = t^{(T)}, \quad \lambda_1^{(1)} \frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial x} = \lambda^{(T)} \frac{\partial t^{(T)}}{\partial x}, \quad \text{якщо} \quad x = x_0^{(1)} = 0.$$

$$t_i^{(2)} = t_{i-1}^{(2)}, \quad \lambda_i^{(2)} \frac{\partial t_i^{(2)}}{\partial x} = \lambda_{i-1}^{(2)} \frac{\partial t_{i-1}^{(2)}}{\partial x}, \quad \text{якщо} \quad x = x_{i-1}^{(2)} = h + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^{(2)}, \quad i \in \{2, \dots, n^{(2)}\}, \quad (7)$$

$$t_1^{(2)} = t^{(T)}, \quad \lambda_1^{(2)} \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial x} = \lambda^{(T)} \frac{\partial t^{(T)}}{\partial x}, \quad \text{якщо} \quad x = x_0^{(2)} = h.$$

Тут  $t_i^{(k)}$ ,  $t^{(T)}$ ,  $t^{(C1)}$ ,  $t^{(C2)}$  – температури  $i$ -го шару  $k$ -го покриву, тіла (пластини) і середовищ відповідно;  $\delta^{(k)} = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \delta_j^{(k)}$  – товщина  $k$ -го покриву;  $\delta_i^{(k)}$  –

товщина  $i$ -го шару  $k$ -го покриву;  $a^{(T)} = \lambda^{(T)}/\omega^{(T)}$ ,  $a_i^{(k)} = \lambda_i^{(k)}/\omega_i^{(k)}$ ,  $\lambda^{(T)}$ ,  $\lambda_i^{(k)}$ ,  $\omega^{(T)}$ ,  $\omega_i^{(k)}$  – коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності і теплоємності;  $\mu^{(1)}$ ,  $\mu^{(2)}$  – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь покриву;  $n^{(k)}$  – кількість шарів  $k$ -го покриву. Індеси  $i$ ,  $T$  стосуються  $i$ -го шару  $k$ -го покриву та тіла, індекс  $k=1$  – покриву, нанесеного на поверхню  $x=0$ , а  $k=2$  – покриву, нанесеного на поверхню  $x=h$  пластини.



Рис. 1.

**Розв'язок задачі теплопровідності.** Для її розв'язування використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покривів на теплоперенос у системі узагальненими граничними умовами [13, 20, 24]. Тоді температуру в тілі визначають як розв'язок рівняння (1) для пластини за початкової умови (3) та узагальнених граничних умов, які тут матимуть вигляд [23–25]

$$-\lambda^{(T)} \left( 1 + \frac{\mu^{(2)}}{H^{(2)}} \right) \frac{\partial t^{(T)}}{\partial x} + \mu^{(2)} (t^{(C2)} - t^{(T)}) = \Omega^{(2)} \frac{\partial t^{(T)}}{\partial \tau}, \quad t^{(T)}|_{\tau=0} = t_0, \quad \text{якщо} \quad x = h, \quad (8)$$

$$\lambda^{(T)} \left( 1 + \frac{\mu^{(1)}}{H^{(1)}} \right) \frac{\partial t^{(T)}}{\partial x} + \mu^{(1)} \left( t^{(C1)} - t^{(T)} \right) = \Omega^{(1)} \frac{\partial t^{(T)}}{\partial \tau}, \quad t^{(T)}|_{\tau=0} = t_0, \quad \text{якщо } x = 0, \quad (9)$$

де  $\Omega^{(k)} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \omega_i^{(k)} \delta_i^{(k)}$ ,  $(H^{(k)})^{-1} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \delta_i^{(k)} / \lambda_i^{(k)}$  – зведені теплоємності та термо-

опори покриттів ( $k=1,2$ ). Температуру в покритві визначатимуть формули відновлення [23–25]. Розв’язок сформульованої задачі для довільних функцій часу  $t^{(C1)}(\tau)$ ,  $t^{(C2)}(\tau)$  отримано раніше [21].

**Розв’язок задачі термопружності.** За вільних від зовнішнього навантаження поверхонь покритву зі зміною температури за товщиною напруження в системі описують співвідношення [9, 6]

$$\sigma_{xx}^{(T)} = \sigma_{yy}^{(T)} = \sigma^{(T)}(\rho, Fo) = \frac{E^{(T)}}{1 - \nu^{(T)}} \left[ A_1(Fo) + A_2(Fo)\rho - \alpha^{(T)}(\rho) \left( t^{(T)}(\rho, Fo) - t_0 \right) \right],$$

$$\sigma_{zz}^{(T)} = \sigma_{xz}^{(T)} = \sigma_{yz}^{(T)} = \sigma_{xy}^{(T)} = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\sigma_{i,xx}^{(k)} = \sigma_{i,yy}^{(k)} = \sigma_i^{(k)}(\rho, Fo) = \frac{E_i^{(k)}}{1 - \nu_i^{(k)}} \left[ A_1(Fo) + A_2(Fo)\rho - \alpha_i^{(k)}(\rho) \left( t_i^{(k)}(\rho, Fo) - t_0 \right) \right], \quad (10)$$

$$\sigma_{i,zz}^{(k)} = \sigma_{i,xz}^{(k)} = \sigma_{i,yz}^{(k)} = \sigma_{i,xy}^{(k)} = 0, \quad \rho_{i-k+1}^{(k)} \leq \rho \leq \rho_{i+k-2}^{(k)}, \quad k \in \{1,2\}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(k)}\},$$

де  $\rho = x/h$  – безрозмірна координата;  $\rho_j^{(k)} = x_j^{(k)}/h$ ,  $j \in \{0,1, \dots, n^{(k)}\}$ ,  $k \in \{1,2\}$ ;  $Fo = a^{(T)}\tau/h^2$  – число Фур’є;  $A_1(Fo)$ ,  $A_2(Fo)$  – невідомі функції;  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР);  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Невідомі  $A_1$ ,  $A_2$  визначають з умов рівноваги поперечного перерізу пластини з покритвом:

$$\int_{\rho_n^{(1)}}^{\rho_n^{(2)}} \sigma d\rho = 0, \quad \int_{\rho_n^{(1)}}^{\rho_n^{(2)}} \sigma \rho d\rho = 0. \quad (11)$$

Після підставлення (10) в умови рівноваги (11) одержимо такі вирази для невідомих величин:

$$A_1 = \frac{N_t G_3 - M_t G_2}{G_1 G_3 - G_2^2}, \quad A_2 = \frac{M_t G_1 - N_t G_2}{G_1 G_3 - G_2^2}, \quad (12)$$

де

$$N_t = \int_{\rho_n^{(1)}}^{\rho_n^{(2)}} \frac{\alpha E (t - t_0)}{1 - \nu} d\rho =$$

$$= \frac{\alpha^{(T)} E^{(T)}}{1 - \nu^{(T)}} \int_0^1 (t^{(T)} - t_0) d\rho + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{\alpha_i^{(k)} E_i^{(k)}}{1 - \nu_i^{(k)}} \int_{\rho_{i-1}^{(k)}}^{\rho_i^{(k)}} (t_i^{(k)} - t_0) d\rho, \quad (13)$$

$$M_t = \int_{\rho_n^{(1)}}^{\rho_n^{(2)}} \frac{\alpha E (t - t_0)}{1 - \nu} \rho d\rho =$$

$$= \frac{\alpha^{(T)} E^{(T)}}{1 - \nu^{(T)}} \int_0^1 (t^{(T)} - t_0) \rho d\rho + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{\alpha_i^{(k)} E_i^{(k)}}{1 - \nu_i^{(k)}} \int_{\rho_{i-1}^{(k)}}^{\rho_i^{(k)}} (t_i^{(k)} - t_0) \rho d\rho, \quad (14)$$

$$G_m = \frac{1}{m} \int_{\rho_{n^{(1)}}^{(1)}}^{\rho_{n^{(2)}}^{(2)}} \frac{E\rho^{m-1}}{1-\nu} d\rho = \frac{E^{(T)}}{m(1-\nu^{(T)})} + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{E_i^{(k)} \left( (\rho_i^{(k)})^m - (\rho_{i-1}^{(k)})^m \right)}{m(1-\nu_i^{(k)})}, \quad (15)$$

$$m \in \{1, 2, 3\}.$$

**Симетричний нагрів пластини з ідентичними покритвами за експоненціальним законом.** Тоді  $t^{(C1)}(Fo) = t^{(C2)}(Fo) = t^{(C)}(Fo)$ ,  $n^{(1)} = n^{(2)} = n$ ,  $\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(2)} = \delta_i$ ,  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(2)} = \lambda_i$ ,  $\omega_i^{(1)} = \omega_i^{(2)} = \omega_i$ ,  $E_i^{(1)} = E_i^{(2)} = E_i$ ,  $\nu_i^{(1)} = \nu_i^{(2)} = \nu_i$ ,  $\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(2)} = \alpha_i$  для  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = \delta$ ,  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$ . Для цього випадку залежності від часу функції температури середовища

$$t^{(C)}(Fo) = t^{(C)m} - (t^{(C)m} - t_0) e^{-PdFo} \quad (16)$$

аналітичний розв'язок задачі теплопровідності має вигляд [21]

$$\theta(\rho, Fo) = 1 - e^{-PdFo} - \sum_{j=1}^{\infty} B(Fo, \kappa_j) X(\rho, \kappa_j), \quad -\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \quad (17)$$

$$B(Fo, \kappa_j) = 2Bi_* \frac{e^{-\kappa_j^2 Fo} - e^{-PdFo}}{(1 - \kappa_j^2 / Pd) Z(\kappa_j)},$$

$$X(\rho, \kappa_j) = \begin{cases} Y_1(\kappa_j) \cos(\kappa_j \rho) + Y_2(\kappa_j) \sin(\kappa_j \rho), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ Y_1(\kappa_j) - r(\rho) \kappa_j Y_2(\kappa_j), & 1 \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \\ X(1 - \rho, \kappa_j), & -\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 0, \end{cases}$$

$$Y_1(\kappa_j) = \kappa_j (\cos \kappa_j + 1) + (Bi_* - \varepsilon \kappa_j^2) \sin \kappa_j,$$

$$Y_2(\kappa_j) = \kappa_j \sin \kappa_j + (Bi_* - \varepsilon \kappa_j^2) (1 - \cos \kappa_j),$$

$$Z(\kappa_j) = \left[ (1 + 4\varepsilon) \kappa_j^2 - (Bi_* - \varepsilon \kappa_j^2)^2 \right] \kappa_j \cos \kappa_j +$$

$$+ \left[ \kappa_j^2 (1 + 2Bi_* (1 + \varepsilon) - \varepsilon (2 + 3\varepsilon) \kappa_j^2) + (Bi_*)^2 \right] \sin \kappa_j,$$

$$\kappa_j - \text{корені трансцендентного рівняння } \operatorname{ctg} \kappa = \frac{\kappa^2 - (Bi_* - \varepsilon \kappa^2)^2}{2\kappa (Bi_* - \varepsilon \kappa^2)},$$

$$r(\rho) = \lambda^{(T)} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{l=1}^{i-1} \frac{\delta_l}{h \lambda_l} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(2)}}{\lambda_i} \right) \left( S_+ (\rho - \rho_{i-1}^{(2)}) - S_+ (\rho - \rho_i^{(2)}) \right),$$

$$\text{де } Bi_* = \frac{Bi}{1 + \xi Bi}, \quad Bi = \frac{\mu h}{\lambda^{(T)}} - \text{критерій Біо}, \quad \varepsilon = \frac{\eta}{1 + \xi Bi}; \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega^{(T)} h}, \quad \xi = \frac{H^{-1}}{h / \lambda^{(T)}}$$

$$- \text{ефективні теплоємності та термоопори покриттів}; \quad \Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta_i, \quad H^{-1} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$$

$$- \text{зведені теплоємності та термоопори покриттів}; \quad \theta(\rho, Fo) = \frac{t(\rho, Fo) - t_0}{t^{(C)m} - t_0},$$

$$\theta^{(C)}(Fo) = \frac{t^{(C)}(Fo) - t_0}{t^{(C)m} - t_0} - \text{безрозмірні температури системи та середовища}$$

$$\text{відповідно}; \quad Pd = \left( d\theta^{(C)} / dFo \right)_{\max} - \text{критерій Предводителя}; \quad t^{(C)m} - \text{максимальна температура середовища}, \quad S_+(\zeta) - \text{функція Хевісайда } (S_+(\zeta) = 1,$$

$\zeta > 0$  і  $S_+(\zeta) = 0$ ,  $\zeta \leq 0$ ).

Враховуючи симетричність задачі ( $\theta(\rho, F_0) = \theta(1 - \rho, F_0)$ ), запишемо для цього випадку ненульові напруження у вигляді

$$\tilde{\sigma}(\rho, F_0) = \chi(\rho) \left[ \frac{\tilde{\theta}^{(T)}(F_0) + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha^{(T)}} \chi_j \tilde{\theta}_j(F_0)}{1 + 2 \sum_{j=1}^n \chi_j \frac{\delta_j}{h}} - \frac{\alpha(\rho)}{\alpha^{(T)}} \theta(\rho, F_0) \right], \quad (18)$$

де  $\tilde{\sigma}(\rho, F_0) = \sigma(\rho, F_0) / \frac{E^{(T)} \alpha^{(T)} (t^{(C)m} - t_0)}{1 - \nu^{(T)}}$  – безрозмірні напруження,

$$\chi(\rho) = \frac{E(\rho)}{1 - \nu(\rho)} / \frac{E^{(T)}}{1 - \nu^{(T)}},$$

$$\tilde{\theta}^{(T)}(F_0) = \int_0^1 \theta(\rho, F_0) d\rho = 1 - e^{-PdF_0} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B(F_0, \kappa_j) (Y_1(\kappa_j) \sin \kappa_j + Y_2(\kappa_j) (1 - \cos \kappa_j))}{\kappa_j},$$

$$\tilde{\theta}_i(F_0) \int_{\rho_{i-1}^{(2)}}^{\rho_i^{(2)}} \theta(\rho, F_0) d\rho = \frac{\delta_i}{h} \left[ 1 - e^{-PdF_0} - \sum_{j=1}^{\infty} B(F_0, \kappa_j) \left( Y_1(\kappa_j) - r \left( \rho_{i-1}^{(2)} + \frac{\delta_i}{2h} \right) \kappa_j Y_2(\kappa_j) \right) \right].$$

В усталеному режимі, коли пластини з ідентичними покритвами рівномірно прогрівається до температури середовища  $t^{(C)m}$ , формула (18) матиме вигляд

$$\tilde{\sigma}^{(T)} = \frac{2 \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - \alpha^{(T)}}{\alpha^{(T)}} \chi_j \frac{\delta_j}{h}}{1 + 2 \sum_{j=1}^n \chi_j \frac{\delta_j}{h}}, \quad (19.1)$$

$$\tilde{\sigma}_i^{(k)} = \chi_i \frac{1 - \frac{\alpha_i}{\alpha^{(T)}} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha^{(T)}} \chi_j \frac{\delta_j}{h}}{1 + 2 \sum_{j=1}^n \chi_j \frac{\delta_j}{h}}, \quad k \in \{1, 2\}; \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (19.2)$$

Тоді для покритву з малою жорсткістю порівняно з жорсткістю тіла (зокрема, для тонких покриттів з модулями Юнга, що не перевищують суттєво модуль Юнга підкладки) зі співвідношення (19.1) отримуємо наближену формулу для усталених напружень у тілі:

$$\tilde{\sigma}^{(T)} = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - \alpha^{(T)}}{\alpha^{(T)}} \chi_j \frac{\delta_j}{h}. \quad (20.1)$$

Окрім того, для усталених напружень в  $i$ -му шарі покритву з малою жорсткістю, коли КЛТР інших шарів несуттєво перевищує КЛТР пластини, з (19.2) слідує наближена формула

$$\tilde{\sigma}_i^{(k)} = \chi_i \left( 1 - \frac{\alpha_i}{\alpha^{(T)}} \right), \quad k \in \{1, 2\}; \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (20.2)$$

**Числові результати та їх аналіз.** Таким чином, формули (17), (18) дають розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та термопружності для пластини з ідентичними багат шаровими покритвами за симетричного нагріву згідно з експоненціальним законом у часі (16). На основі цього розв'язку досліджено термонапружений стан системи тіло-двосторонній тришаровий покритв.

Рис. 2 ілюструє зміну з часом безрозмірного напруження  $\tilde{\sigma}^{(T)}(\rho, Fo)$  в підкладці на поверхні поділу з покривом ( $\rho = 0$ ), на поверхні  $\rho = 0.25$  та серединній поверхні ( $\rho = 0.5$ ), коли 1) всі КЛТР шарів покриву рівні КЛТР підкладки (суцільні криві); 2) всі КЛТР шарів покриву більші, ніж підкладки (штрихові криві) та 3) всі КЛТР шарів покриву менші, ніж підкладки (пунктирні криві).

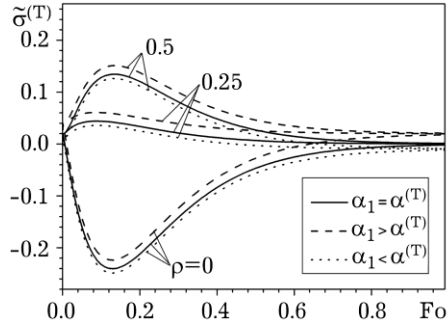


Рис. 2.

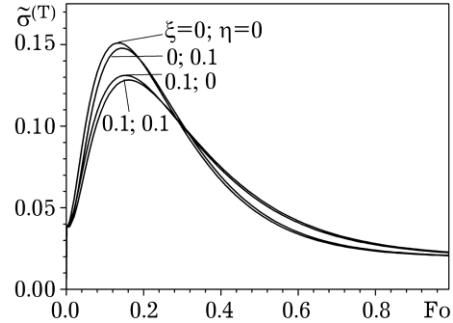


Рис. 3.

Розрахунки виконано при  $Bi = 10$ ,  $Pd = 10$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  та  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ;  $\alpha_1 = \alpha^{(T)}$ ,  $\alpha_1 = 2\alpha^{(T)}$ ,  $\alpha_1 = 0.5\alpha^{(T)}$  за таких геометричних і механічних співвідношень між параметрами шарів покриву та тіла:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1, \quad \delta / h = 0.01, \quad (21)$$

$$\frac{E_1}{1 - \nu_1} : \frac{E_2}{1 - \nu_2} : \frac{E_3}{1 - \nu_3} = 5 : 2 : 8, \quad (22)$$

$$\frac{E_1}{1 - \nu_1} : \frac{E^{(T)}}{1 - \nu^{(T)}} = 1. \quad (23)$$

Як бачимо, знак усталених напружень визначає різниця КЛТР підкладки і шарів покриву у всіх розглянутих точках пластини, хоча під час самого нагрівання в різних точках підкладки знак напружень може бути відмінним. З іншого боку, за будь-яких співвідношень КЛТР у початковий період нагрівання на межі пластини-покрив розвиваються стискальні напруження, а на серединній поверхні пластини – розтягальні, найбільші з яких досягаються, якщо  $\alpha_i > \alpha^{(T)}$ . Оскільки розтягальні напруження в підкладці найнебезпечніші, то досліджуємо їх зміну з часом залежно від теплофізичних параметрів – ефективних термоопору  $\xi$  і теплоємності  $\eta$  (рис. 3), критеріїв Біо  $Bi$  і Предводителя  $Pd$  (рис. 4) та величини  $\frac{E_1}{1 - \nu_1} / \frac{E^{(T)}}{1 - \nu^{(T)}}$  (рис. 5) саме на серединній поверхні пластини ( $\rho = 0.5$ ), якщо  $\alpha_i > \alpha^{(T)}$ .

Під час розрахунків для рис. 3–5 приймали  $\alpha_i = 2\alpha^{(T)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  і умови (21), (22); окрім, для рис. 3 і 5 –  $Bi = 10$ ,  $Pd = 10$ , для рис. 3 і 4 – ще умова (23), а для рис. 4 і 5 – такі співвідношення теплофізичних параметрів шарів покриву та підкладки:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda^{(T)} = 3 : 10 : 2 : 30, \quad \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega^{(T)} = 3 : 6 : 1 : 3. \quad (24)$$

Рис. 3–5 ілюструють вплив теплофізичних і механічних характеристик покриву та умов теплообміну зі середовищем на характер зміни максимальних розтягальних напружень на серединній поверхні пластини.

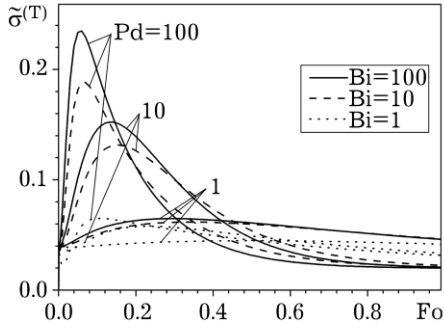


Рис. 4.

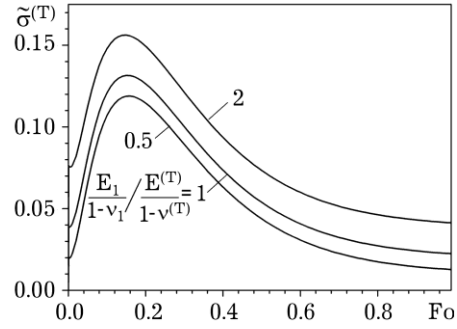


Рис. 5.

За термоізолювальних властивостей покриву розтягувальні напруження зменшуються (крива  $\xi = 0, \eta = 0$  на рис. 3 – термоопір та теплоємність покриву відсутні). Зі збільшенням інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає росту критерію Біо ) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає зростанню критерію Предводителя) збільшується максимальне значення розтягальних напружень на серединній поверхні пластини (рис. 4), причому, як і очікували, найбільше значення досягається за відповідних максимальних значень  $Bi$  та  $Pd$ . Якщо рівень усталених напружень в пластині (рис. 5 при  $Fo = 1$ ) пропорційний величині  $\frac{E_i}{1-\nu_i}(\alpha_i - \alpha^{(T)})$ , що відповідає в даному випадку формулі (20.1), то у перехідному інтервалі часу, коли досягаються максимальні розтягальні напруження (рис. 5 при  $Fo \approx 0.15$ ), вплив модуля Юнга покриву значно менший.

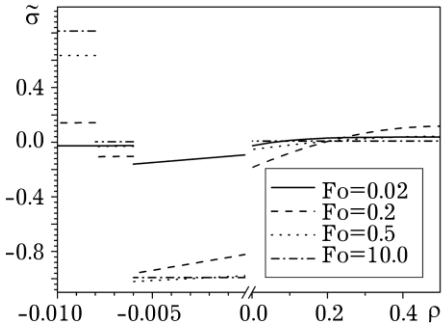


Рис. 6.

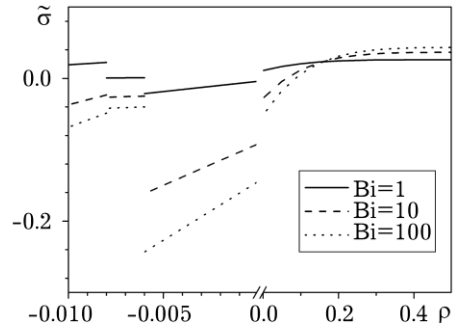


Рис. 7.

Досліджено розподіл напружень за товщиною у системі пластини–тришаровий покрив для деяких моментів часу при  $Bi = 10, Pd = 10$  (рис. 6), різних значень  $Bi$  при  $Fo = 0.02, Pd = 10$  (рис. 7), різних значень  $Pd$  при  $Fo = 0.02, Bi = 10$  (рис. 8), різних значень  $\chi_1 = \frac{E_1}{1-\nu_1} / \frac{E^{(T)}}{1-\nu^{(T)}}$  при  $Fo = 0.02, Bi = 10, Pd = 10$  (рис. 9) за співвідношень (21)–(24) для рис. 6–8, співвідношень (21), (22), (24) для рис. 9 при  $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha^{(T)} = 4 : 2 : 1 : 2$ .

Рис. 6–9 описують вплив термомеханічних характеристик покриву та умов теплообміну зі середовищем на характер зміни напружень у шарах покриву і пластині.

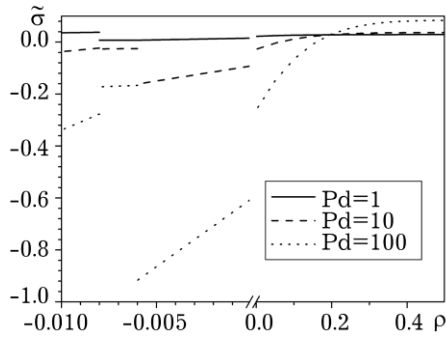


Рис. 8.

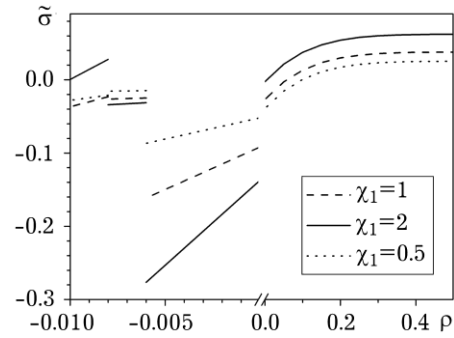


Рис. 9.

Напруження в покриві мають розривний характер, зростаючи з часом за абсолютним значенням у шарах покриву, КЛТР яких відмінний від КЛТР підкладки. Знак усталених напружень у шарі покриву (штрихпунктирні криві при  $Fo = 10$  на рис. 6) визначає різниця КЛТР цього шару і підкладки, а їх рівень пропорційний величині  $\frac{E_i}{1 - \nu_i}(\alpha_i - \alpha^{(T)})$ , що узгоджується з фор-

мулою (20.2). Для тонких ( $\delta/h \leq 0.01$ ) покривів з малою жорсткістю проти жорсткості тіла, усталені напруження в покриві суттєво більші за абсолютним значенням, ніж у пластині в тих шарах, КЛТР яких відмінні від КЛТР тіла, що відповідає формулам (20). На початковому етапі нагрівання знак температурних напружень також залежить від інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (рис. 7), швидкості підвищення температури середовища (рис. 8), відносної жорсткості покриву (рис. 9). Хоча, якщо першому та другому шару покриву напруження є недодатними для всіх розглядуваних значень  $Bi$ ,  $Pd$  та  $\chi_1$ , то у третьому зовнішньому шарі для менших значень  $Bi$  та  $Pd$  і більших значень  $\chi_1$  є розтягальні (суцільні криві для  $-0.01 \leq \rho < -0.008$  на рис. 7–9). Зростання інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителя) призводить до суттєвого зростання значень і перепаду стискальних напружень у шарах покриву та значень і перепаду напружень у пластині (штрихові та пунктирні криві на рис. 7, 8).

**Висновки.** У результаті дослідження аналітичного розв'язку нестационарної задачі термопружності для пластини з двостороннім тонким багатшаровим покривом, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов теплообміну, проаналізовано вплив геометричних і термомеханічних характеристик покриву та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на термопружний стан системи тіло–багатшаровий покрив за симетричного нагріву пластини з ідентичними тришаровими покривами для експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища. Виявлено, що напружений стан пластини визначають ефективні теплофізичні характеристики покриву – зведені термоопір і теплоємність та інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриву, швидкість підвищення температури зовнішнього середовища, а також термомеханічні параметри – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт лінійного температурного розширення тіла. Одержані формули враховують перепад температури за товщиною покриву, що дає можливість точніше розраховувати термонапруження, які є однією з можливих причин утворення тріщин у захисних шарах покриву, за різних режимів нагрівання за довільної функції температури довкілля.

*Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного гранту НАН України та Фонду фундаментальних досліджень (номер держреєстрації проекту 0114U005082).*



1. Гаврись А. П., Иващук Д. В., Шевчук П. Р. Определение остаточных напряжений в системе слой-покрытие при двустороннем высокотемпературном напылении // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1989. – Вып. 29. – С. 8–12.  
Te same: Gavris' A. P., Ivashchuk D. V., Shevchuk P. R. Determination of residual stresses in a layered system during two-sided high-temperature spray-coating // *J. Soviet Math.* – 1993. – **65**, № 4. – P. 1715–1719).
2. Гембара Н. О. Вплив протикорозійного багатощарового покритву на термопружність круглих пластин // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2013. – **49**, № 6. – С. 50–54.  
Te same: Hembara N. O. Effect of a multilayer anticorrosion coating on the thermoelasticity of round plates // *Materials Science.* – 2014. – **49**, № 6. – P. 761–767).
3. Зарубин В. С. Расчет и оптимизация термоизоляции. – Москва: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
4. Коляно Ю. М., Кушнір Р. М. Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1980. – Вып. 11. – С. 72–75.
5. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл* / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5-ти т. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
6. Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Температурні напруження та переміщення в багатощаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.  
Te same: Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M. Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, № 6. – P. 798–808).
7. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
8. Люшкин П. А., Люшкин Б. А., Матолыгина Н. Ю. Панин С. В. Расчет температуры и температурных напряжений в многослойном покрытии // *Механика комп. материалов и конструкций.* – 2010. – **16**, № 4. – С. 563–574.
9. Мартыненко А. А. К исследованию остаточных напряжений в многослойных покрытиях // *Проблемы прочности.* – 1980. – № 11. – С. 109–110.  
Te same: Martynenko A. A. Residual stresses in multilayer coatings // *Strength of Mater.* – 1980. – **12**, № 11. – P. 1448–1450).
10. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
11. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык П. Р., Лозбень В. Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.
12. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
13. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
14. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Иващук Д. В. Влияние тонких покрытий на напряженно-деформированное состояние слоя с двусторонним покрытием при диффузионном насыщении // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1974. – **10**, № 1. – С. 74–80.  
Te same: Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R., Ivashchuk D. V. Effect of thin coatings on the stress-strain state of a layer with a two-sided coating in diffusion impregnation // *Mater. Sci.* – 1974. – **10**, № 1. – P. 69–74).
15. Попович В., Янішевський В. Термопружний стан термочутливого шару за конвективного теплообміну з середовищем змінної з часом температури // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2011. – Вип. 14. – С. 105–114.
16. Третьяченко Г. Н., Барило В. Г. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий // *Проблемы прочности.* – 1993. – № 1. – С. 41–49.  
Te same: Tretyachenko G. N., Barilo V. G. Thermal and stressed states of multilayered coatings // *Strength of Mater.* – 1993. – **25**, № 1. – P. 34–41).
17. Третьяченко Г. Н., Карпинос Б. С. Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.

18. Третьяченко Г. Н., Кравчук Л. В., Курият Р. И., Карпинос Б. С., Семенов Г. Р. Термическая усталость материалов в условиях неоднородного термонапряженного состояния. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
19. Шевелев А. А. Температурные напряжения в пластине и цилиндре при их нагреве в условиях изменяющейся температуры среды // Прикл. механика. – 1965. – **11**, № 1. – С. 119–126.
20. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
21. Шевчук В. А. Теплопровідність пластини з тонким двостороннім багатослойним покритвом за умов нестационарного нагріву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 2. – С. 148–157.
22. Elperin T., Rudin G. Thermoelasticity problem for a multilayer coating-substrate assembly irradiated by a laser beam // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 1996. – **23**, № 1. – P. 133–142.
23. Shevchuk V. A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // Lect. Notes in Computer Sci. – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – **2330**. – P. 500–509.
24. Shevchuk V. A. Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // Ed. R. B. Hetnarski. Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht Heidelberg New York, London: Springer, 2014. – **4**. – P. 1942–1953.
25. Shevchuk V. A. Modeling and computation of heat transfer in a system "body-multilayer coating" // Heat Transfer Research. – 2006. – **37**, № 5. – P. 421–433.
26. Zhao J., Li Y., Ai X. Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings // Thin Solid Films. – 2008. – **516**, № 21. – P. 7581–7587.
27. Zhao J., Li Y., Ai X. Transient thermal stress analysis of a plate with double-sided FGM coatings // Key Eng. Mater. – 2008. – **368–372**, P. 1807–1810.

#### **ТЕРМОНАПРЯЖЕННЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ТОНКИМ ДВУСТОРОННИМ МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА**

*На основе полученного аналитического решения одномерной задачи термоупругости для пластины с двусторонним тонким многослойным покрытием при конвективном теплообмене с внешней средой при переменной температуре исследовано термостресовое состояние системы.*

#### **THERMOSTRESSED STATE OF PLATE WITH THIN DOUBLE-SIDED MULTILAYER COATING UNDER CONDITIONS OF NONSTATIONARY TRANSFER**

*Based on the obtained analytical solution of a one-dimensional thermoelastic problem for a plate with a double-sided thin multilayer coating under convective heat exchange with ambient media at variable temperature, the thermoelastic state of the system has been investigated.*