УДК 539.3

В. М. Харченко[1], М. В. Марчук[2, 3], В. С. Пакош[2],

ВАРІАНТ УТОЧНЕНОЇ ТЕОРІЇ МІНІМАЛЬНОГО ПОРЯДКУ ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ ПЛАСТИН

Застосовано розвинення за поліномами Лежандра від нормальної координати характеристик напружено-деформованого стану тонкого плоского пружного шару. Точно задоволено граничні умови для зусиль на лицевих площинах. Методом Бубнова–Гальоркіна отримано двовимірні рівняння рівноваги та деформаційні співвідношення. Для виведення співвідношень пружності використано метод мінімізації квадратичних функціоналів. Побудовану теорію застосовано до задачі про згини пластини-смуги за дії розподіленого нормального навантаження. Результати порівняно з отриманими за класичною теорією та зсувною моделлю С. П. Тимошенка.

Вступ. Сучасна обчислювальна техніка дає можливість отримати числові розв'язки досить складних задач теорії пружності в тривимірному формулюванні. Однак увагу дослідників у галузі міцності привертає теорія тонкостінних елементів, що зумовлено не завжди стійким числовим розв'язком і навіть його достовірністю через суттєво менший розмір таких об'єктів у нормальному напрямі проти тангенціальних. Також це пов'язано з можливістю виключення третьої координати та зведення задачі до двовимірної, що спрощує побудову розрахункових схем.

Поява нових матеріалів, зокрема композитних, спричинила потребу в уточненні як класичної теорії [4, 13], так і низки узагальнених [2, 5, 8, 11, 12, 14] для врахування специфічних особливостей їх деформування [6]. Зокрема, окрім анізотропії пружних характеристик і низької зсувної жорсткості, податливості до трансверсального стиснення. В цьому напрямі слід відмітити праці [1, 3, 9, 10, 15].

Нижче отримано співвідношення уточненої теорії пластин з мінімальним порядком системи розв'язувальних диференціальних рівнянь, що дають можливість явно врахувати податливість до трансверсального стиснення.

Формулювання задачі. Розглянемо плоский лінійно пружний ортотропний шар об'ємом V і товщиною $2h$. Віднесемо його до мішаної криволінійної системи координат x_i, $i = 1,2,3$, напрямки якої збігаються з напрямками ортотропії. Якщо найменший розмір шару в серединній площині $x_3 = 0$ суттєво перевищує його товщину, то таке тіло називають пружною пластиною. Вважаємо, що серединна площина Ω пластини обмежена кривою $\partial\Omega$. Частини нормальної до серединної площини поверхні ∂V, напрямною якої є крива $\partial\Omega$, прийнято називати торцями. Якщо на пластину діють об'ємні сили f_i, $i = 1,2,3$ та/або поверхневі на лицевих площинах $x_3 = \pm h$ і торцях зусилля, то її тривимірний напружено-деформований стан характеризують вектор пружного зміщення $\bar{u}$ точок пластини, симетричні тензори деформацій T_e та напружень T_σ. Для визначення компонент вказаних об'єктів маємо [7]:

а) рівняння рівноваги

$$\nabla_1\sigma_{i1} + \nabla_2\sigma_{i2} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3} + f_i = 0\,; \qquad (1)$$

б) деформаційні співвідношення

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \qquad i, j = 1, 2, 3\,; \qquad (2)$$

в) співвідношення пружності для ортотропного лінійно пружного тіла [9]

$$\sigma_{ii} = \bar{E}_i(e_{ii} + \nu_{i,\,3-i}e_{i,\,3-i}) + \lambda_i\sigma_{33}\,; \ \ i = 1,\,2\,;$$

$$\sigma_{33} = \bar{E}_0(e_{33} + \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22})\,;$$

$$\sigma_{ij} = 2G_{ij}e_{ij}, \quad (i,\,j) \in \{(1,\,2);\,(1,\,3);\,(2,\,3)\}\,. \tag{3}$$

Крайові умови в загальному випадку на бокових частинах межі $\partial V = \partial V_u \bigcup \partial V_\sigma$ мають вигляд

$$u_i(x_1,\,x_2)\big|_{\partial V_u} = \bar{u}_i, \quad i = 1,\,2,\,3\,, \tag{4}$$

$$\sigma_{nn}(x_1,\,x_2)\big|_{\partial V_\sigma} = \bar{\sigma}_{nn}\,, \quad \sigma_{n3}(x_1,\,x_2)\big|_{\partial V_\sigma} = \bar{\sigma}_{n3}\,, \quad \sigma_{\tau 3}(x_1,\,x_2)\big|_{\partial V_\sigma} = \bar{\sigma}_{\tau 3}\,, \tag{5}$$

де ∂V_u, ∂V_σ – частини поверхні ∂V, де задані умови на переміщення та напруження; n і τ – напрямки зовнішньої нормалі та дотичної до ∂V. Можливі також мішані крайові умови на деяких частинах поверхні ∂V та лицевих площинах.

На лицевих площинах задаємо крайові умови в зусиллях:

$$\sigma_{3i}(x_1,\,x_1 \pm h\,) = \sigma_{3i}^{\pm}\,, \quad i = 1,\,2,\,3. \tag{6}$$

Зведення просторової задачі до двовимірної. Для фізичних компонент векторів пружного переміщення $\vec{u}$ та об'ємних сил $\vec{f}$, тензорів напружень T_σ і деформацій T_e приймаємо такі апроксимаційні вирази за координатою $\alpha = x_3\,/\,h$:

$$u_i = u_i^0 P_0(\alpha) + u_i^1 P_1(\alpha), \quad f^i = f_0^i P_0(\alpha) + f_1^i P_1(\alpha), \quad i = 1,2,3;$$

$$e_{ij} = e_{ij}^0 P_0(\alpha) + e_{ij}^1 P_1(\alpha), \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3;$$

$$e_{33} = e_{33}^0 P_0(\alpha_3)\,; \tag{7}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 P_0(\alpha) + \sigma_{ij}^1 P_1(\alpha), \ \ i,\,j = 1,2\,, \tag{8}$$

$$\sigma_{i3} = \sigma_{i3}^0 P_0(\alpha) + \sigma_{i3}^1 P_3(\alpha) + \sigma_{i3}^2 P_2(\alpha) + \sigma_{i3}^3 P_3(\alpha) + \sigma_{i3}^4 P_4(\alpha), \quad i = 1,2,$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^0 P_0(\alpha) + \sigma_{33}^1 P_3(\alpha) + \sigma_{33}^2 P_2(\alpha) + \sigma_{33}^3 P_3(\alpha), \tag{9}$$

де $P_k(\alpha)$, $k = 0,1,2,\ldots,$ – поліном Лежандра k-го порядку від змінної α.

Із граничних умов (6) на лицевих площинах $\alpha = \pm 1$ маємо:

$$\sigma_{i3}^3 = \sigma_i^- - \sigma_{i3}^1, \quad \sigma_{i3}^4 = \sigma_i^+ - \sigma_{i3}^0 - \sigma_{i3}^2, \quad i = 1,2;$$

$$\sigma_{33}^2 = \sigma_3^+ - \sigma_{33}^0, \quad \sigma_{33}^3 = \sigma_3^- - \sigma_{33}^1. \tag{10}$$

У виразі (8) $\sigma_i^{\pm} = (\sigma_{3i}^+ \pm \sigma_{3i}^-)\,/\,2$.

Підставивши у (7) визначені з граничних умов коефіцієнти σ_{i3}^3, σ_{i3}^4, σ_{33}^2, σ_{33}^3, отримаємо апроксимаційні вирази для трансверсальних напружень за нормальною до серединної площини шару координатою:

$$\sigma_{i3} = \sigma_{i3}^0(P_0(\alpha) - P_4(\alpha)) + \sigma_{i3}^1(P_1(\alpha) - P_3(\alpha)) +$$

$$+\sigma_{i3}^2(P_2(\alpha) - P_4(\alpha)) + \sigma_i^- P_3(\alpha) + \sigma_i^+ P_4(\alpha), \quad i = 1,2, \tag{11}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^0(P_0(\alpha) - P_2(\alpha)) + \sigma_{33}^1(P_1(\alpha) - P_3(\alpha)) + \sigma_3^+ P_2(\alpha) + \sigma_3^- P_3(\alpha)\,. \tag{12}$$

Підставимо апроксимаційні вирази для напружень (8) та (11), (12) у рівняння рівноваги (1) та застосуємо процедуру методу Бубнова–Гальоркіна [7] по координаті α за системи з двох базисних функцій P_0 і P_1. У результаті отримаємо двовимірні рівняння рівноваги:

$$\nabla_1 N_1 + \nabla_2 S + 2\sigma_1^- + 2hf_1^0 = 0\,;$$

$$\nabla_1 S + \nabla_2 N_2 + 2\sigma_2^- + 2hf_2^0 = 0\,;$$

$$\nabla_1 M_1 + \nabla_2 H - Q_1^0 + 2h\sigma_1^+ + \frac{2}{3}h^2 f_1^1 = 0\,;$$

$$\nabla_1 H + \nabla_2 M_2 - Q_2^0 + 2h\sigma_2^+ + \frac{2}{3}h^2 f_2^1 = 0\,;$$

$$\nabla_1 Q_1^0 + \nabla_2 Q_2^0 + 2\sigma_3^- + 2hf_3^0 = 0\,;$$

$$\nabla_1 Q_1^1 + \nabla_2 Q_2^1 + 6(\sigma_3^+ - \sigma_{33}^0) + 2hf_3^1 = 0\,. \qquad (13)$$

Тут використано загальноприйняті позначення для узагальнених зусиль, котрі в цьому випадку визначаються за формулами

$$N_i = 2h\sigma_{ii}^0\,, \quad M_i = \frac{2}{3}h^2\sigma_{ii}^1\,, \quad Q_i^0 = 2h\sigma_{i3}^0\,, \quad Q_i^1 = 2h\sigma_{i3}^1\,, \quad i = 1, 2\,,$$

$$S = 2h\sigma_{12}^0\,, \quad H = \frac{2}{3}h^2\sigma_{12}^1\,. \qquad (14)$$

Аналогічно отримуємо двовимірні деформаційні співвідношення:

$$e_{ij}^0 = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j^0 + \nabla_j u_i^0)\,, \quad e_{ij}^1 = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j^1 + \nabla_j u_i^1)\,, \quad i, j = 1, 2\,;$$

$$e_{i3}^0 = \frac{1}{2}(\nabla_i u_3^0 + u_i^1 / h)\,, \quad i = 1, 2\,;$$

$$e_{33}^0 = u_3^1 / h\,. \qquad (15)$$

Щоб одержати двовимірні співвідношення пружності, розглянемо квадратичні функціонали

$$J_{ij} = \int_{-1}^{1} (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})^2 d\alpha, \quad i, j = 1, 2, 3. \qquad (16)$$

Тут σ_{ij} – апроксимаційні вирази (8), за яких $i, j = 1, 2$, та (11), якщо $i = 1, 2, 3;\ j = 3$; $\bar{\sigma}_{ij}$ – праві частини рівностей (3), в яких під e_{ij} слід розуміти їхні апроксимаційні вирази (7), а під σ_{33} – вираз (12).

З умов мінімуму функціоналів (16) за аргументами σ_{ij}^k, $k = 0, 1;$ $i, j = 1, 2, 3$, якщо $i, j \neq 3$, одночасно маємо:

$$\sigma_{ij}^k = \bar{E}_i\ (e_{ii}^k + \nu_{i,3-i} e_{i,3-i}^k) + \lambda_i \sigma_{33}^k\ ,$$

$$\sigma_{33}^0 = \frac{5}{6}\bar{E}_0\ (e_{33}^0 + \lambda_1 e_{11}^0 + \lambda_2 e_{22}^0) + \sigma_3^+ / 6\,,$$

$$\sigma_{33}^1 = \frac{7}{10}\bar{E}_0\ (\lambda_1 e_{11}^1 + \lambda_2 e_{22}^1) + 3\sigma_3^- / 10\,. \qquad (17)$$

Після підставлення (17) в (14) отримуємо уточнені вирази для узагальнених зусиль:

$$N_i = B_i(1 + \alpha_i)\,(\varepsilon_i^0 + \nu_{i,3-i}\varepsilon_{3-i}^0) + h\sigma_i^+ / 3\ ,$$

$$M_i = D_i(1 + k'\alpha_i)\,(\varepsilon_i^1 + \nu_{i,3-i}\varepsilon_{3-i}^1) + h^2\sigma_i^- / 5\ ,$$

$$Q_i^0 = \Lambda_i 2\varepsilon_{i3}^0 + 2h\sigma_i^+ / 15, \quad Q_i^1 = \frac{3}{4}\Lambda_i 2\varepsilon_{i3}^1 + 3h\sigma_i^- / 5, \quad i = 1, 2;$$

$$S = B_{12} 2\varepsilon_{12}^0, \quad H = D_{12} 2\varepsilon_{12}^1, \tag{18}$$

де

$$\varepsilon_1^0 = \nabla_1 u, \quad \varepsilon_2^0 = \nabla_2 v, \quad \varepsilon_1^1 = \nabla_1\gamma_1, \quad \varepsilon_2^1 = \nabla_2\gamma_2,$$

$$2\varepsilon_{12}^0 = \nabla_1 v + \nabla_2 u, \quad 2\varepsilon_{12}^1 = \nabla_1\gamma_2 + \nabla_2\gamma_1,$$

$$2\varepsilon_{13}^0 = \gamma_1 + \nabla_1 w_1, \quad 2\varepsilon_{23}^0 = \gamma_2 + \nabla_2 w_0,$$

$$\alpha_1 = \frac{(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{D}\frac{E_1}{E_3}, \quad \alpha_2 = \frac{(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{D}\frac{E_2}{E_3},$$

$$\lambda_1 = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\delta^2}\frac{E_1}{E_3}; \quad \lambda_2 = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\delta^2}\frac{E_2}{E_3};$$

$$B_i = 2\bar{E}_i h; \quad D_i = h^2 B_i / 3; \quad \Lambda_i = 2k' h G_{i3}, \ i = 1,2;$$

$$B_{12} = 2G_{12} h; \quad D_{12} = 2G_{12} h^3 / 3; \quad k' = 14/15,$$

$$\bar{E}_i = E_i / \delta^2, \ i = 1,2; \quad \bar{E}_0 = E_3\delta^2 / D,$$

$$D = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{13}\nu_{32}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{31}\nu_{12},$$

$$\nu = (\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}); \ \delta^2 = 1 - \nu_{12}\nu_{21}. \tag{19}$$

У (19) використані загальноприйняті позначення для узагальнених переміщень:

$$u_1 = u; \quad u_2 = v; \quad u_i = h\gamma_i, \ i = 1, 2; \quad u_3^0 = w_0; \quad u_3^1 = w_1.$$

Співвідношення (13)–(15), (17)–(19) складають повну систему рівнянь варіанта уточненої теорії мінімального порядку за явного врахування податливості до трансверсальних зсуву та стиснення (компонента вертикального переміщення $u_3^1 = w_1$).

Аналогічно з (4), (5) отримуємо двовимірні крайові умови на $\partial\Omega$.

Приклад застосування. Розглянемо шарнірно закріплену на нижній лицевій площині вздовж видовжених країв пластину-смугу шириною $2l$ за дії рівномірно розподіленого нормального навантаження $\sigma_{33}^+ = -P$. Рівняння рівноваги в цьому випадку мають вигляд

$$N' = 0; \quad M' - Q_0 = 0; \quad Q_0' + P = 0; \quad Q_1' - 6(P + \sigma_{33}^0) = 0, \tag{20}$$

а умови на краях $x \pm l$

$$N(\pm l) = 0; \quad M(\pm l) = 0; \quad w_0(\pm l) - w_1(\pm l) = 0; \quad Q_1(\pm l). \tag{21}$$

Після використання співвідношень пружності та деформаційних отримуємо систему вирішальних рівнянь в узагальнених переміщеннях, розв'язок якої для вертикальних переміщень такий:

$$w_1 = h\frac{\lambda(1+\nu)(5+4\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{P}{E};$$

$$w = -\frac{Px^4}{24D} + c_1 x + \frac{c_2 x^2}{2} + \frac{c_3 x^3}{6} + \frac{Ph}{E}\frac{l^4}{h^4}\left[\alpha\varepsilon^4 - \frac{5}{16}(1-\nu^2)\right], \tag{22}$$

де $\varepsilon = h / l$.

Максимальні прогини серединної площини $w_{\max}^k$ за класичною теорією та зсувною моделлю С. П. Тимошенка $w_{\max}^T$ однакові:

$$w^k_{\max} = w^T_{\max} = -\frac{5Pl^4}{24D}. \tag{23}$$

Знайдений максимальний прогин серединної площини $w^y_{\max}$ за формулою (22):

$$w^y_{\max} = \frac{Ph}{E}\frac{l^4}{h^4}\left[\alpha\varepsilon^4 - \frac{5}{16}(1-\nu^2)\right]. \tag{24}$$

З формул (23) і (24) отримуємо:

$$w^y_{\max} = w^k_{\max} + \alpha\frac{Ph}{E}. \tag{25}$$

Висновки. Запропоновано варіант уточненої теорії мінімального порядку пластин, що явно враховує їхню податливість до трансверсальних і зсуву, і стиснення, дає можливість уточнити деформативність розглядуваних об'єктів. Формула (25) свідчить, що в розглянутому випадку деформативність зростає, що важливо під час розрахунку різноманітних контактуючих пластин.

У подальшому подібні дослідження доцільно виконати для інших умов на краях пластин-смуг, а також для пластин різної конфігурації.

1. *Альтенбах Х., Львов Г. И., Лысенко С. В.* Теория оболочек, учитывающая деформации поперечного сдвига и обжатия // Механика композит. материалов. – 1997. – **33**, № 6. – С. 768–780.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
3. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Наука, 1976. – 512 с.
5. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – Москва: Наука, 1992. – 336 с.
6. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – Москва: Мир, 1982. – 334 с.
7. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 182 с.
8. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
9. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
10. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 214 с.
11. *Рассказов А. О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 22–56.
12. *Рейсснер Е.* Непротиворечивое определение деформации сдвига в слоистых анизотропных пластинах // Ракетная техника и космонавтика. – 1972. – № 5. – С. 193–195.
13. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Физматгиз, 1963. – 635 с.
14. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – Москва: Наука, 1971. – 807 с.
15. *Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. Vol. 3: Theory of shells. – North Holland, 2000. – 666 p.

ВАРИАНТ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА ПОДАТЛИВЫХ К СДВИГУ И СЖАТИЮ ПЛАСТИН

Применены разложения по полиномам Лежандра от нормальной координаты характеристик напряженно-деформированного состояния тонкого плоского упругого слоя. Точно удовлетворены граничные условия для усилий на лицевых плоскостях. Методом Бубнова–Галеркина получены двумерные уравнения равно-

весия и деформационные соотношения. Для вывода соотношений упругости использован метод минимизации квадратичных функционалов. Построенная теория применена к задаче об изгибе пластины-полосы при действии распределённой нормальной нагрузки. Результаты сравнены с полученными по классической теории и на основе сдвиговой модели С. П. Тимошенко.

VARIANT OF REFINED THEORY OF MINIMUM ORDER FOR PLIABLE TO SHEAR AND COMPRESSION PLATES

The expansions in terms of Legendre polynomials in a normal coordinate of characteristics of the stress-strain state of thin flat elastic layer are applied. The boundary conditions are exactly satisfied for the forces on the front planes. Two-dimensional equilibrium equations and the deformation relations are obtained by Bubnov–Galerkin method. The method of minimization of quadratic functional is used to derive the elasticity relations. The developed theory is applied to the problem of bending for a plate-strip under the action of distributed normal loading. The results are compared with those obtained from the classical theory and based on the Tymoshenko shear model.

[1]Держ. підпр. «Констр. бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ;
[2]Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;
[3]Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
03.11.16