

ФУНКЦІЯ КОРЕЛЯЦІЇ ТА ДИСПЕРСІЯ ЙМОВІРІСНОГО БЕТА-РОЗПОДІЛУ

Отримано формули для кореляційної функції та дисперсії бета-розподілу в загальному випадку. Проаналізовано стохастичні структури, змодельовані окремими випадками бета-розподілу, та знайдено вирази для функції кореляції та дисперсії з використанням густини спільного розподілу за Джоунсом. Виконано низку числових експериментів та визначено вплив ступенів вільності розподілу на функцію кореляції та дисперсії.

Вступ. Характеристики багатофазних тіл з невідомою точною геометричною конфігурацією фаз зазвичай розглядають як певні реалізації хаотичних полів у просторі та часі [3]. Якщо параметри середовища вважати випадковими величинами (процесами або полями), то досліджувані фізичні поля, набувають стохастичного характеру. Як правило, для визначення основних особливостей розглядуваних явищ використовують методи стохастичного усереднення [9, 15], тобто знаходження середнього типу середнього значення $\langle g(\vec{r}, t) \rangle$ ($\vec{r} = r(x, y, z)$ – радіус-вектор біжучої точки, t – час) просторово-часової кореляційної функції $\langle g(\vec{r}, t)g(\vec{r}, t) \rangle$, де через $\langle \dots \rangle$ позначено усереднення за ансамблем реалізацій випадкових параметрів. При цьому внаслідок згладжування окремих реалізацій отримані статистичні характеристики можуть суттєво різнитись від реалізації структури середовища, водночас повна статистика містить всю інформацію про динамічну систему.

У праці [1] запропоновано підхід до математичного опису дисперсії та функції кореляції (автокореляції) поля концентрації у випадково неоднорідних шаруватих структурах зі заданим розподілом фаз. Під час отримання відповідних формул використано подання випадкового поля у вигляді ряду Неймана [1, 10], що дало можливість визначити другі моменти поля через функцію кореляції фаз за довільного розподілу. Також потрібно знайти функції кореляції фаз у багатофазних випадково неоднорідних структурах під час оцінювання парного взаємовпливу включень на усереднене поле, яке описує відповідне фізичне явище [2]. Зокрема, для дифузійного потоку домішкових частинок у структурах з областю ймовірного розташування включень біля верхньої межі тіла, що моделюється бета-розподілом включень, відповідні формули для дисперсії та функції кореляції бета-розподілу у літературі відсутні. Бета-розподіл неоднорідностей у випадкових структурах описує практично важливі випадки найімовірніших розташувань включень біля меж або всередині тіла. Тому нижче отримані кореляційні функції бета-розподілу у загальному та практично важливих часткових випадках, досліджено закономірності їх поведінки.

Двофазні неоднорідні структури за бета-розподілу включень. Неоднорідності довільних форм та розмірів можуть по-різному розташовуватись у тілі. Наприклад, в одновимірному випадку у смугі чи кулі включення у вигляді прошарків можуть зосереджуватись біля однієї з поверхонь тіла або ж може виникати область найімовірнішого розташування включень посередині тіла (рис. 1). Розташування неоднорідностей у таких структурах можна описати різними варіантами бета-розподілу, функція густини якого загалом має вигляд [4]

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta-1}, & z \in [0; z_0]; \\ 0, & z \notin [0; z_0], \end{cases} \quad (1)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція [8]; α, β – ступені вільності розподілу; z_0 – розмір тіла: товщина для смуги або радіус для кулі.

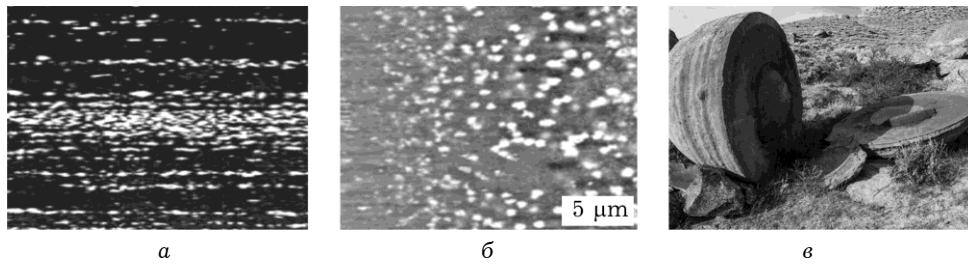


Рис. 1. Неоднорідні структури булату зі сорбітною матрицею та скупченням вторинного цементиту (а) [6], кремнію із кульовими нікелевими включеннями (б) [11] та гірської породи (в) [16].

У практиці випадкове розташування неоднорідностей зазвичай підпорядковується одному з таких часткових варіантів бета-розподілу (1).

I. При $\alpha = 1, \beta > 1$ ймовірнісний розподіл (1) набуває вигляду

$$f_1(z) = \begin{cases} \beta \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta-1}, & z \in [0; z_0]; \\ 0, & z \notin [0; z_0]. \end{cases} \quad (2)$$

Функція густини розподілу $f_1(z)$ (2) описує випадково неоднорідну структуру із областю найімовірнішого розташування неоднорідностей біля межі тіла (в околі точки) $z = 0$. На рис. 2а побудовано залежність функції густини $f_1(z)$ від різних значень ступеня вільності $\beta = 1, 1, 1, 5; 2; 2,5$ (криві 1–4). Зростання ступеня вільності β призводить до ущільнення включень до межі (точки) $z = 0$, у той же час ймовірність розташування включення в околі іншої межі зменшується, а на межі $z = z_0$ рівна нулю.

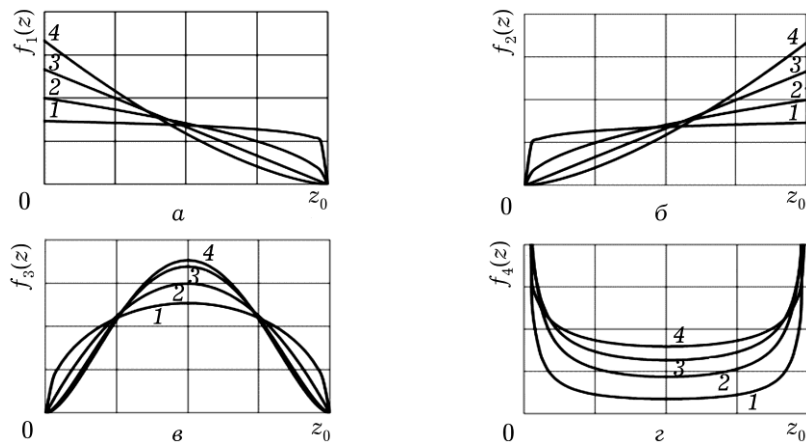


Рис. 2. Густина розподілів $f_1(z)$ (а); $f_2(z)$ (б); $f_3(z)$ (в) і $f_4(z)$ (г).

II. Якщо $\alpha > 1, \beta = 1$, густина розподілу (1)

$$f_2(z) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-1}, & z \in [0; z_0]; \\ 0, & z \notin [0; z_0]. \end{cases}$$

Розподіл $f_2(z)$ є протилежним до розподілу $f_1(z)$ – включення зосереджені біля межі $z = z_0$ (в околі точки $z = z_0$), а на межі $z = 0$ (в околі точки $z = 0$) апріорі розташована матриця. Графіки густини розподілу $f_2(z)$ для різних ступенів вільності $\alpha = 1.1; 1.5; 2; 2.5$ (криві 1–4) подано на рис. 2б. Зазначимо, що у цьому випадку зростання ступеня вільності α призводить до ущільнення включень до межі (точки) $z = z_0$, у той же час ймовірність розташування включення в околі іншої межі зменшується.

III. Якщо $\alpha = \beta > 1$, тоді з формули (1) отримаємо розподіл

$$f_3(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-1}, & z \in [0; z_0]; \\ 0, & z \notin [0; z_0], \end{cases}$$

який описує випадкову структуру з областю ймовірного розташування включень посередині тіла, при цьому з ймовірністю 1 на межі (у точці) $z = 0$ і на межі (у точці) $z = z_0$ знаходиться матриця.

На рис. 2в зображені графіки густин розподілу $f_3(z)$ за таких значень ступенів вільності: $\alpha = \beta = 1.5; 2; 2.5; 2.7$ (криві 1–4). Зауважимо, що зі збільшенням параметра α включення ущільнюються до середини тіла, при цьому область найімовірнішого їх розташування звужується.

IV. При $0 < \alpha = \beta < 1$ з густини розподілу (1) отримаємо такий, що відомий також як розподіл арксинуса:

$$f_4(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{z_0}{z_0 - z}\right)^{1-\alpha}, & z \in [0; z_0]; \\ 0, & z \notin [0; z_0]. \end{cases} \quad (3)$$

Розподіл (3) описує структуру неоднорідного тіла, де включення зосереджені біля поверхонь (в околі точок) $z = 0$ і $z = z_0$. На рис. 2г проілюстровано залежність густини розподілу $f_4(z)$ для різних ступенів вільності $\alpha = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7$ (криві 1–4).

Зі зростанням ступеня вільності α збільшується ймовірність розташування включень посередині тіла, тоді як області найімовірнішого їх знаходження надалі зосереджені біля поверхонь (в околі точок) $z = 0$ і $z = z_0$. Зазначимо, що з наближенням α до 1 структура неоднорідного тіла уподібнюється до структури тіла з рівномірним розподілом включень.

Кореляційна функція та дисперсія бета-розподілу. Двоточкову функцію кореляції фаз для бета-розподілу випадкових величин на відрізку $[0; z_0]$ можна визначити через функцію двовимірного спільного розподілу випадкових величин $w_2(x, y, z', z'')$ [4] так [5, 7]:

$$\psi(x, y) = \iint_{(V)^2} z' z'' w_2(x, y, z', z'') dz' dz'', \quad x, y \in [0; z_0], \quad (4)$$

де $\psi(x, y)$ – функція кореляції; V – об'єм усього тіла; z', z'' – просторові координати.

Отримані [12–14] різні варіанти густини двовимірного спільного бета-розподілу. У праці [12] функція w_2 має вигляд

$$w_2(x, y) = C x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} (1 - x - y)^{\beta_3-1}, \quad (5)$$

де $C = \frac{\Gamma(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3)}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ – ступені вільності ймовірнісного розподілу, $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

У праці [14] одержано формулу для двовимірного спільного бета-розподілу із деяким параметром δ :

$$w_2(x, y) = \frac{\Gamma^2(\beta_3) {}_2F_1(\beta_1, \beta_2; \beta_3; \delta)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3 - \beta_1)\Gamma(\beta_3 - \beta_2)} \left(\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1-1} \left(\frac{y}{z_0}\right)^{\beta_2-1} \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^{\beta_3-\beta_1-1} \times \\ \times \left(1 - \frac{y}{z_0}\right)^{\beta_3-\beta_2-1} \left(1 - \frac{xy\delta}{z_0^2}\right)^{-\beta_3}, \quad (6)$$

де $0 < x, y < z_0$, $0 < \beta_1 < \beta_3$, $0 < \beta_2 < \beta_3$, $0 \leq \delta < 1$, ${}_2F_1$ – гіпергеометрична функція Гауса.

Відома також функція двовимірного спільного бета-розподілу [13]:

$$w_2(x, y) = C \left(\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1-1} \left(\frac{y}{z_0}\right)^{\beta_2-1} \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^{\beta_2+\beta_3-1} \left(1 - \frac{y}{z_0}\right)^{\beta_1+\beta_3-1} \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}, \quad (7)$$

де $0 \leq x, y \leq z_0$.

Зазначимо, що різні подання спільного бета-розподілу спричинені, зокрема, різними областями визначення. Розподіл (5) отриманий для трикутника, а розподіли (6), (7) – для квадрата.

Для знаходження кореляції включень, розташованих за бета-розподілом у двофазній смузі товщиною z_0 , враховуючи область визначення та відсутність параметризації, використовуємо двовимірний спільний бета-розподіл Джоунса (7). Підставивши співвідношення (7) у рівність (4), отримуємо функцію кореляції бета-розподілу в загальному випадку:

$$\psi(x, y) = C \Im \left(\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1-1} \left(\frac{y}{z_0}\right)^{\beta_2-1} \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^{\beta_2+\beta_3-1} \left(1 - \frac{y}{z_0}\right)^{\beta_1+\beta_3-1} \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}, \quad (8)$$

де $\Im = \iint_{(V)^2} z'z'' dz' dz''$.

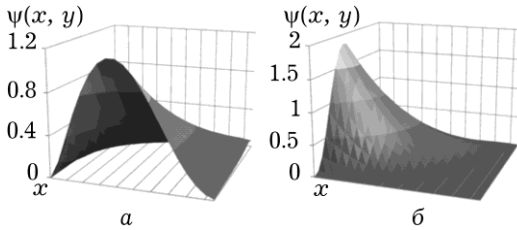


Рис. 3. Функція кореляції $\psi(x, y)$.

Якщо область розташування включень (область усереднення) збігається з областю тіла, випадкові неоднорідності розглядаємо як прошарки незмінної відомої товщини h , а випадковою змінною, що визначає розташування включень, є координата верхньої межі прошарку z' ($z' \in [0; z_0 - h]$), тоді $\Im = (z_0 - h)^4 / 4$.

Дисперсія випадкової величини σ^2 , що за означенням є одноточковою функцією кореляції [4], для бета-розподілу

$$\sigma^2(x) = \psi(x, x) = C \Im \left(\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1+\beta_2-1} \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1+\beta_2+2\beta_3-2} \left(1 - \frac{x^2}{z_0^2}\right)^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}, \quad (9)$$

і є центральним моментом другого порядку.

На рис. 3 зображено 3D-розподіли функції кореляції $\psi(x, y)$ для ступенів вільності $\beta_1=1, \beta_2=\beta_3=2,5$ (рис. 3а) та $\beta_1=\beta_3=3,5, \beta_2=1$ (рис. 3б).

На рис. 4 подано залежність дисперсії $\sigma^2(x)$ від ступенів вільності, де криві 1-4 на рис. 4а відповідають значенням $\beta_1=1, \beta_2=\beta_3=2; 2,5; 3; 3,5$, а на рис 4б - $\beta_2=1, \beta_1=\beta_3=2; 2,5; 3; 3,5$, відповідно. Зазначимо, що зі збільшенням ступенів вільності β_2

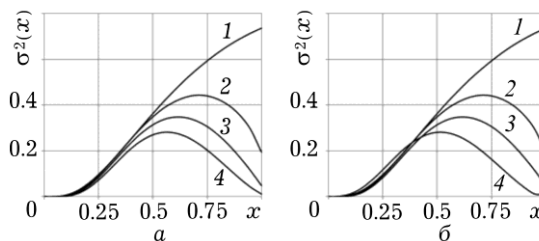


Рис. 4. Дисперсія $\sigma^2(x)$.

і β_3 чи β_1 і β_3 функція кореляції в околі відповідних меж зменшується (рис. 3). Зниження одночасно обидвох ступенів вільності за сталого значення третього параметра викликає падіння $\sigma^2(x)$ в околі межі $x = 1$ (рис. 4).

Аналіз поведінки функції кореляції та дисперсії для часткових випадків бета-розподілу. Розглянемо часткові випадки бета-розподілу з використанням функції густини спільного розподілу за Джоунсом (7) під час знаходження $\psi(x, y)$ та σ^2 :

I. Якщо покласти $\beta_1 = \beta_2 = 1, \beta_3 = \beta > 1$, то функція густини (7) набуде вигляду

$$w_2(x, y) = \beta(\beta + 1) \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^\beta \left(1 - \frac{y}{z_0}\right)^\beta \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(\beta+2)}.$$

Функція кореляції (8) тоді

$$\psi_1(x, y) = \mathfrak{I} \beta(\beta + 1) \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^\beta \left(1 - \frac{y}{z_0}\right)^\beta \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(\beta+2)},$$

а дисперсія

$$\sigma_1^2(x) = \mathfrak{I} \beta(\beta + 1) \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^{2\beta} \left(1 - \frac{x^2}{z_0^2}\right)^{-(\beta+2)}.$$

На рис. 5 подано 3D- і 2D-графіки функції $\psi_1(x, y)$ для ступеня вільності $\beta=2,5$, а на рис. 6 - розподіли дисперсії $\sigma_1^2(x)$ для $\beta=2; 2,5; 3; 3,5$ (криві 1-4). Тут і надалі $z_0=1$.

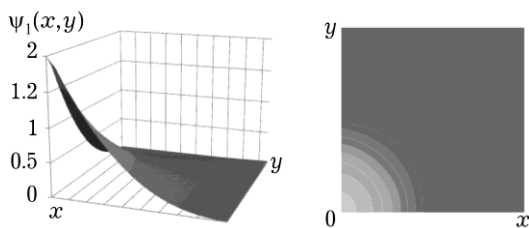


Рис. 5. Функція кореляції $\psi_1(x, y)$.

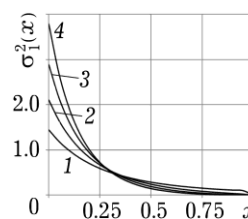


Рис. 6. Дисперсія $\sigma_1^2(x)$.

Збільшення ступеня вільності β імовірного розподілу (ущільнення включень до верхньої межі) призводить до зростання функції кореляції $\psi_1(x, y)$, найбільше - в околі точки $(0;0)$ (рис. 5). Дисперсія є монотонно спадною функцією, з ростом параметра β $\sigma_1^2(x)$ зростає біля межі $x = 0$ (рис. 6), стрімкіше спадає і наявна точка $x = 0,3$ перетину кривих для різ-

них значень β .

II. Якщо $\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta > 1$, функція густини двовимірного спільного бета-розподілу за Джоунсом (7) має вигляд

$$w_2(x, y) = \frac{2\beta\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \left(\frac{xy}{z_0^2}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{x+y}{z_0} + \frac{xy}{z_0^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(2\beta+1)}.$$

Тоді зі співвідношення (8) для функції кореляції та дисперсії отримаємо:

$$\psi_2(x, y) = \Im \frac{2\beta\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \left(\frac{xy}{z_0^2}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{x+y}{z_0} + \frac{xy}{z_0^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(2\beta+1)},$$

$$\sigma_2^2(x) = \Im \frac{2\beta\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \left(\frac{x}{z_0}\right)^{2\beta-2} \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^{2\beta} \left(1 - \frac{x^2}{z_0^2}\right)^{-(2\beta+1)}.$$

Функцію кореляції $\psi_2(x, y)$ для ступеня вільності $\beta = 2,5$ проілюстровано на рис. 7, а на рис. 8 зображено дисперсію $\sigma_2^2(x)$ для різних його значень 2; 2,5; 3; 3,5 (криві 1-4).

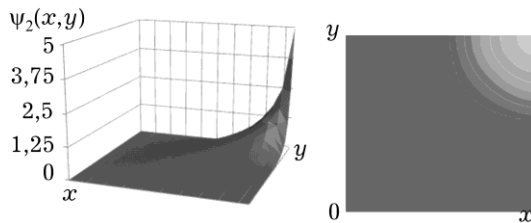


Рис. 7. Функція кореляції $\psi_2(x, y)$

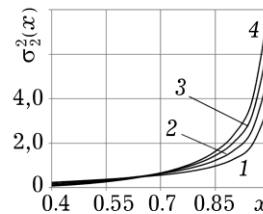


Рис. 8. Дисперсія $\sigma_2^2(x)$

Збільшення ступеня вільності β , що відповідає ущільненню включень до нижньої поверхні тіла, викликає зростання функції $\psi_2(x, y)$ в околі точки (1;1) (рис. 7). Дисперсія $\sigma_2^2(x)$ є монотонно зростальною функцією, яка досягає максимуму на межі $x = 1$ (рис. 8). Тут також існує точка перетину кривих $\sigma_2^2(x)$ для різних значень β , тобто точка $x = 0,65$.

III. При $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \equiv \beta > 2,5$ функція густини спільного розподілу за Джоунсом така:

$$w_3(x, y) = \frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma^3(\beta)} \left(\frac{xy}{z_0^2}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{x+y}{z_0} + \frac{xy}{z_0^2}\right)^{2\beta-1} \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-3\beta}.$$

З формул для функції кореляції (8) та дисперсії (9) отримуємо співвідношення

$$\psi_3(x, y) = \Im \frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma^3(\beta)} \left(\frac{xy}{z_0^2}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{x+y}{z_0} + \frac{xy}{z_0^2}\right)^{2\beta-1} \left(1 - \frac{xy}{z_0^2}\right)^{-3\beta},$$

$$\sigma_3^2(x) = \Im \frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma^3(\beta)} \left(\frac{x}{z_0}\right)^{2\beta-2} \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^{4\beta-2} \left(1 - \frac{x^2}{z_0^2}\right)^{-3\beta}.$$

На рис. 9 проілюстровано функцію кореляції $\psi_3(x, y)$ для значення ступеня вільності $\beta = 3$. Залежність дисперсії $\sigma_3^2(x)$ від параметра β наведено на рис. 10, де криві 1-4 відповідають значенням $\beta = 2; 2,5; 3; 3,5$. Зі збіль-

шенням вільності (ущільненням включень до середини тіла) кореляційна функція також зростає, при цьому, що більших значень набуває параметр β , то симетричнішою стає функція $\psi_3(x, y)$ (рис. 9), а функція $\sigma_3^2(x)$ набуває більших значень посередині проміжку $[0; z_0]$ (рис. 10).

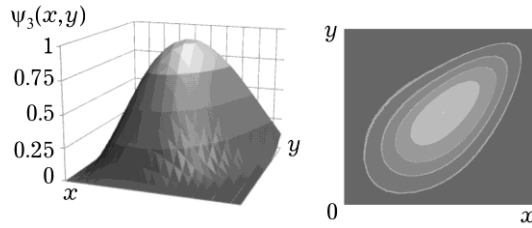


Рис. 9 Функція кореляції $\psi_3(x, y)$.

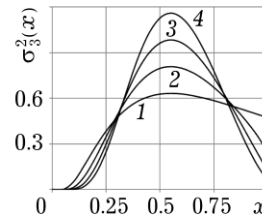


Рис. 10. Дисперсія $\sigma_3^2(x)$.

IV. Для ступенів вільності $0 < \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \equiv \beta < 1$ розподіл арксинуса (7)

$$w_2(x, y) = \frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma^3(\beta)} \left(\frac{z_0^2}{xy} \right)^{1-\beta} \left(\frac{z_0^2}{z_0^2 - z_0(x+y) + xy} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{z_0^2}{z_0^2 - xy} \right)^{3\beta}.$$

Тоді для кореляційної функції та дисперсії такого ймовірнісного розподілу одержимо:

$$\psi_4(x, y) = \Im \frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma^3(\beta)} \left(\frac{z_0^2}{xy} \right)^{1-\beta} \left(\frac{z_0^2}{z_0^2 - z_0(x+y) + xy} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{z_0^2}{z_0^2 - xy} \right)^{3\beta},$$

$$\sigma_4^2(x) = \Im \frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma^3(\beta)} \left(\frac{z_0}{x} \right)^{2-2\beta} \left(\frac{z_0}{z_0 - x} \right)^{2-4\beta} \left(\frac{z_0^2}{z_0^2 - x^2} \right)^{3\beta}.$$

На рис. 11 наведено розподіл функції кореляції $\psi_4(x, y)$ для ступеня вільності $\beta = 0,5$, а на рис. 12 проілюстровано розподіли функції $\sigma_4^2(x)$ для $\beta = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ (криві 1-4).

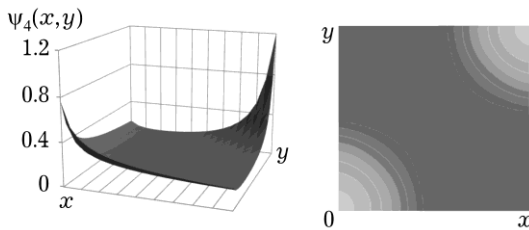


Рис. 11 Функція кореляції $\psi_4(x, y)$.

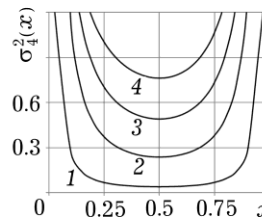


Рис. 12. Дисперсія $\sigma_4^2(x)$.

Поверхні функції кореляції утворюють два максимуми – локальний у точці $(0;0)$ і глобальний у точці $(1;1)$. Збільшення параметра β , тобто зсув включень від меж $x = 0$ та $x = 1$ до центра, призводить до зростання кореляційної функції $\psi_4(x, y)$, найбільше – біля вказаних меж (рис. 11), при цьому розподіли $\sigma_4^2(x)$ набувають вигляду параболічної функції (рис. 12).

Висновки. Досліджено ймовірнісний бета-розподіл та проаналізовано двофазні стохастично неоднорідні структури, випадкове розташування включень в яких описують часткові випадки бета-розподілу. Отримано формули для визначення функції кореляції та дисперсії бета-розподілу із використанням співвідношення для густини двовимірного спільного бета-розподілу за Джоунсом. Встановлено вплив параметрів розподілу на поведінку других

моментів бета-розподілу. Виявлено, що зі зростанням ступеня вільності збільшується значення функції кореляції в області відповідного найбільш ймовірного знаходження включень.

1. Білуцзяк Ю., Чапля Є., Чернуха О. Двоточкова функція кореляції та дисперсія випадкового дифузійного поля концентрації в смузі з рівномірним розподілом шаруватих включень // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 7–22.
2. Давидок А. Є. Моделювання і дослідження парного взаємовпливу шаруватих включень на потік маси у випадково неоднорідній смузі за бета-розподілу фаз // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 146–153.
3. Кляцкин В. Статистика и реальность в стохастических динамических системах // Нелинейные волны – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2004. – С. 256–286.
4. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятности и математической статистике. – Москва: Наука, 1985. – 640 с.
5. Малахов А. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразования. – Москва: Советское радио, 1978. – 376 с.
6. Прутки и полосы из быстрорежущей стали. Технические условия: ГОСТ 19265-73. – Москва: Стандарты, 1973. – 22 с.
7. Рытов С., Крайнов Ю., Татарский В. Введение в статистическую радиофизику: в 2-х ч. – Москва: Наука, 1981. – Ч. I. Случайные процессы. – 494 с.; Ч. II. Случайные поля. – 1978. – 436 с.
8. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Мир, 1979. – 830 с.
9. Хорошун Л. Математические модели и методы механики стохастических композитных материалов // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 10. – С. 30–62.
10. Chaplya Y., Chernukha O., Davydok A. Simulation of diffusion flows in two-phase multilayered stochastically nonhomogeneous bodies with non-uniform distribution of inclusions // Task Quarterly. – 2015. – **19**, № 3. – P. 321–351.
11. Granitzer P., Rumpf K. Porous Silicon – A Versatile Host Material // Materials. – 2010. – **3** (2). – P. 943–998.
12. Hafidz M. O., Joarder A. H. Some Mathematical Characteristics of the Beta Density Function of Two Variables // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – **34** (4). – 2012. – P. 923–933.
13. Jacobs R., Bekker A., Human S. Bivariate Beta Distributions and Beyond // Int. Statistical Inst.: Proc. 58th World Statistical Congress (Session CPS009). – Dublin, 2011. – P. 3984–3990.
14. Nadarajah S. A New Bivariate Beta Distribution with application to drought data // Int. J. Stat. – 2007. – **LXV**, № 2. – P. 153–174.
15. Ngan A. Canonical ensemble for static elastic structures with random microstructures // J. Mech. and Phys. of Solids. – 2009. – **57**. – P. 803–811.
16. <http://www.voxpopuli.kz/>

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ И ДИСПЕРСИЯ ВЕРОЯТНОСТНОГО БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Получены формулы для корреляционной функции и дисперсии бета-распределения в общем случае. Проанализированы стохастические структуры, которые моделируются частными случаями бета-распределения, и найдены выражения для функции корреляции и дисперсии с использованием плотности совместного распределения за Джоунсом. Выполнен ряд численных экспериментов и установлено влияние степеней свободы распределения на функцию корреляции и дисперсии.

CORRELATION FUNCTION AND DISPERSION OF THE PROBABLE BETA-DISTRIBUTION

The formulae of correlation function and dispersion of the beta-distribution in the general case are obtained. Stochastic structures modeled by particular cases of the beta-distribution are analyzed and expressions for the correlation function and dispersion using density of Jones' joint distribution are found. A series of numerical experiments is carried out and the influence of degrees of freedom on the correlation function and dispersion is established.