

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПЛОСКОЇ НЕОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ В ПЕРЕМІЩЕННЯХ ДЛЯ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Розроблено аналітично-числову методику побудови розв'язків плоских неосесиметричних задач теплопровідності та термопружності для довгого порожнистого циліндра, пружні та теплофізичні властивості якого є довільними функціями радіальної координати. Вихідні рівняння вказаних задач зведено до інтегральних рівнянь другого роду, які розв'язано з використанням квадратурних формул.

Вступ. Для широкого запровадження елементів конструкцій, виготовлених з композитних матеріалів, у тому числі функційно-градієнтних [8], необхідні ефективні моделі та методи дослідження теплового та напружено-деформованого станів, які дадуть можливість враховувати макроскопічну варіацію пружних та теплофізичних характеристик матеріалу в об'ємі досліджуваного тіла. Одними із найпоширеніших в інженерній практиці об'єктів такого типу є порожнисті радіально-неоднорідні циліндри, які перебувають під дією силових та теплових навантажень.

Детально висвітлені розв'язки плоских неосесиметричних задач для однорідних порожнистих циліндрів. Для їх побудови застосовували бігармонічний потенціал Мітчелла [3, 5], а також підхід, що ґрунтується на теорії комплексної змінної [4]. Для розв'язання неосесиметричної задачі термопружності для однорідного порожнистого циліндра вжито метод безпосереднього інтегрування [6].

Більшість з відомих на сьогодні розв'язків задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл побудовано для конкретних залежностей характеристик матеріалу від радіальної координати. Розв'язано [11] осесиметричні задачі теплопровідності та термопружності для випадку, коли пружні та теплофізичні характеристики матеріалу, крім коефіцієнта Пуассона, мають вигляд степеневих функцій радіуса. Знайдено точні розв'язки рівнянь теплопровідності та рівнянь Нав'є у переміщеннях з допомогою методу відокремлення змінних. Неосесиметричне теплове навантаження досліджено [13] для аналогічних властивостей матеріалу. В праці [12] цей метод поширено на пружно-пористий матеріал. Одновимірну динамічну задачу про визначення термонапружень у порожнистому циліндрі зі степеневою залежністю модуля пружності від радіальної координати розв'язано [9] методом скінченних різниць. Відомий розв'язок одновимірної задачі термопружності для порожнистого циліндра з лінійною залежністю пружних модулів від радіальної координати. Плоску неосесиметричну задачу теорії пружності для експоненційно-неоднорідного циліндра знайдено [18] методом розбиття вихідного циліндра на однорідні концентричні шари з подальшим використанням потенціалу Мітчелла для побудови розв'язку у кожному шарі. У праці [14] цю методику поширено на задачі теплопровідності та термопружності. Для анізотропного матеріалу неосесиметричну задачу для порожнистих неоднорідних та шаруватих циліндрів розв'язано числово [17].

Вважаючи властивості матеріалу довільними функціями радіальної координати, плоскі неосесиметричні задачі теорії пружності та термопружності розв'язували у працях [15, 16], застосовуючи метод безпосереднього інтегрування. Вихідні рівняння цих задач у термінах напружень зводили до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду для визначальних напружень з відповідними локальними та інтегральними умовами, розв'язки яких знайдено числово за допомогою методу послідовних наближень

та у явному вигляді – методом резольвентного ядра. Тут поширимо метод зведення до інтегральних рівнянь для задачі такого класу у переміщеннях. Вихідні рівняння Ляме зі змінними коефіцієнтами зведемо до системи взаємозв'язаних інтегральних рівнянь другого роду для коефіцієнтів розвинень компонент вектора переміщень у ряди Фур'є за коловою змінною. Отримані інтегральні рівняння розв'яжемо, використовуючи числову методику, яка ґрунтується на методі квадратурних формул [1].

Формулювання задачі. Розглянемо неосесиметричну задачу термопружності для порожнистого циліндра $r_0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$, пружні та теплофізичні властивості якого є довільними функціями радіальної координати. Тут $\{r, z, r_0, h\} = \{\bar{r}, \bar{z}, R_0, H\} / R$; \bar{r}, \bar{z} – розмірні радіальна та осьова координати; R_0, R – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси циліндра; $2H$ – довжина циліндра, причому $H \gg R$. В умовах плоскої деформації радіальну $u(r, \varphi)$ та колову $v(r, \varphi)$ компоненти вектора переміщень визначаємо з рівнянь Ляме, які в праці [2] подано у вигляді

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} \left(u + 2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + 2 \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial u}{\partial r} + \\ + \theta d\lambda/dr - \partial((3\lambda + 2\mu)\alpha T)/\partial r = 0, \\ \mu \nabla^2 v + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{r^2} \left(v - 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + 2 \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - \\ - r^{-1} (3\lambda + 2\mu) \alpha \partial T / \partial \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\theta = \partial u / \partial r + (\partial v / \partial \varphi + u) / r$; $\nabla^2 = \partial / \partial r (r \partial / \partial r) / r + (\partial^2 / \partial \varphi^2) / r^2$; λ, μ – коефіцієнти Ляме; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення. Розв'язок рівнянь (1) шукаємо за умов

$$u(r_0, \varphi) = 0, \quad v(r_0, \varphi) = 0, \quad u(1, \varphi) = 0, \quad \partial v(1, \varphi) / \partial r = v(1, \varphi), \quad (2)$$

які відповідають жорсткому та ковзному закріпленню відповідно внутрішньої та зовнішньої циліндричних поверхонь, а також за дії температурного поля T , яке визначимо з рівняння теплопровідності [10]:

$$\nabla^2 T + \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dr} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

де $\lambda = \lambda(r)$ – залежний від радіальної координати коефіцієнт теплопровідності ($\lambda(r) \neq 0$, $r_0 \leq r \leq 1$). Вважаємо, що на внутрішній і зовнішній поверхнях задано залежні від кутової координати розподіли температури:

$$T(r_0, \varphi) = p(\varphi), \quad T(1, \varphi) = q(\varphi). \quad (4)$$

Побудова розв'язку температурної задачі. Для побудови розв'язку задачі (3), (4) скористаємось розвиненням шуканого та заданих розподілів температури у ряди Фур'є за коловою координатою:

$$\{T(r, \varphi), p(\varphi), q(\varphi)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\{T_k^1(r), p_k^1, q_k^1\} \cos k\varphi + \{T_k^2(r), p_k^2, q_k^2\} \sin k\varphi \right). \quad (5)$$

$$\text{Тут} \quad \{T_0^1(r), p_0^1, q_0^1\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{T(r, \varphi), p(\varphi), q(\varphi)\} d\varphi;$$

$$\{T_k^i(r), p_k^i, q_k^i\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{T(r, \varphi), p(\varphi), q(\varphi)\} (\delta_{i1} \cos k\varphi + \delta_{i2} \sin k\varphi) d\varphi;$$

$k \geq 1$; $i = 1, 2$; δ_{ij} – символ Кронекера. Після відокремлення змінних з вико-

ристанням (5), задача (3), (4) набуде вигляду

$$\frac{d^2 T_k^i}{dr^2} + \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{dT_k^i}{dr} - \frac{k^2}{r^2} T_k^i = 0, \quad (6)$$

$$T_k^i(r_0) = p_k^i, \quad T_k^i(1) = q_k^i, \quad (7)$$

де $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Подамо рівняння (6) так:

$$\frac{d^2 T_k^i}{dr^2} - T_k^i = \left(\frac{k^2}{r^2} - 1 \right) T_k^i - \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{dT_k^i}{dr},$$

та розв'яжемо відносно лівої частини. У результаті отримаємо:

$$T_k^i = A_k^i \operatorname{chr} + B_k^i \operatorname{shr} + \int_{r_0}^r \left(\frac{k^2 - \rho^2}{\rho^2} T_k^i(\rho) - \left(\frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{dT_k^i(\rho)}{d\rho} \right) \operatorname{sh}(r - \rho) d\rho, \quad (8)$$

де A_k^i, B_k^i – сталі інтегрування, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Після інтегрування частинами другого доданку інтегранду з урахуванням (7) рівняння (8) набуде вигляду

$$T_k^i(r) = \bar{A}_k^i \operatorname{chr} + \bar{B}_k^i \operatorname{shr} + \int_{r_0}^r T_k^i(\rho) \xi_k^i(r, \rho) d\rho, \quad (9)$$

$$\text{де } \begin{cases} \bar{A}_k^i \\ \bar{B}_k^i \end{cases} = \begin{cases} A_k^i \\ B_k^i \end{cases} \mp \left(\frac{1}{\lambda(r_0)} \frac{d\lambda(r_0)}{dr} + \frac{1}{r_0} \right) p_k^i \begin{cases} \operatorname{sh} r_0 \\ \operatorname{ch} r_0 \end{cases},$$

$$\xi_k^i(r, \rho) = \left(\frac{k^2 - \rho^2 - 1}{\rho^2} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \left(\frac{d^2 \lambda(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\lambda(\rho)} \left(\frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \right)^2 \right) \right) \operatorname{sh}(r - \rho) - \left(\frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \operatorname{ch}(r - \rho).$$

Невідомі сталі \bar{A}_k^i та \bar{B}_k^i легко знайти через температурне поле підставленням (9) в умови (7). Тоді отримаємо вираз

$$\begin{cases} \bar{A}_k^i \\ \bar{B}_k^i \end{cases} = \frac{1}{\operatorname{sh}(1 - r_0)} \left(p_k^i \begin{cases} \operatorname{sh} 1 \\ -\operatorname{ch} 1 \end{cases} + \begin{cases} -\operatorname{sh} r_0 \\ \operatorname{ch} r_0 \end{cases} \left(q_k^i - \int_{r_0}^1 T_k^i(\rho) \xi_k^i(1, \rho) d\rho \right) \right),$$

підставивши який в (9), зможемо подати це інтегральне рівняння так:

$$T_k^i = \frac{p_k^i \operatorname{sh}(1 - r)}{\operatorname{sh}(1 - r_0)} + \left(q_k^i - \int_{r_0}^1 T_k^i(\rho) \xi_k^i(1, \rho) d\rho \right) \frac{\operatorname{sh}(r - r_0)}{\operatorname{sh}(1 - r_0)} + \int_{r_0}^r T_k^i(\rho) \xi_k^i(r, \rho) d\rho. \quad (10)$$

Для розв'язання інтегрального рівняння (10) можна застосовувати відомі аналітичні або ж числові методи [1]. У праці [15] аналогічне рівняння розв'язано методом послідовних наближень, а в [16] – методом резольвенти. Для ефективного числового аналізу придатні відносно швидкі методи квадратурних формул [1, 7]. Для прикладу розв'яжемо рівняння (10), використовуючи формулу трапеції. Розіб'ємо інтервал зміни радіальної координати $r_0, r_1, \dots, r_N = 1$, де $r_j = r_0 + hj$, $h = (1 - r_0)/N$, $j = 1, 2, \dots, N$. Замінивши інтеграли їх квадратурними аналогами за цим розбиттям, отримаємо систему $N - 1$ рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N-1} T_k^i(r_j) \alpha_k^i[n, j] = \beta_k^i[n], \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (11)$$

для знаходження значень $T_k^i(r_n)$ у вузлах r_n , $n = 1, \dots, N - 1$. Тут

$$\alpha_k^i[n, j] = \frac{\delta_{nj}}{h} \left(1 - \frac{h}{2} \xi_k^i(r_j, r_j) \right) + \xi_k^i(r_N, r_j) \frac{\text{sh}(r_n - r_0)}{\text{sh}(1 - r_0)} - \xi_k^i(r_n, r_j) H_{nj};$$

$$\beta_k^i[n] = \frac{p_k^i}{h} \left(\frac{\text{sh}(1 - r_n)}{\text{sh}(1 - r_0)} + \frac{h}{2} \xi_k^i(r_n, r_0) - \frac{\text{sh}(r_n - r_0)}{\text{sh}(1 - r_0)} \frac{h}{2} \xi_k^i(r_N, r_0) \right) +$$

$$+ \frac{q_k^i}{h} \frac{\text{sh}(r_n - r_0)}{\text{sh}(1 - r_0)} \left(1 - \frac{h}{2} \xi_k^i(r_N, r_N) \right);$$

$$H_{nj} = \begin{cases} 1, & j \leq n-1, \\ 0, & j > n-1; \end{cases} \quad n, j = 1, 2, \dots, N-1. \text{ При цьому } T_k^i(r_0) = p_k^i, \quad T_k^i(r_N) = q_k^i.$$

Визначення пружних переміщень. Для відокремлення змінних у рівняннях (1) подамо шукані переміщення розвиненнями в ряди Фур'є:

$$\{u(r, \varphi), v(r, \varphi)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\{u_k^1(r), v_k^2(r)\} \cos k\varphi + \{u_k^2(r), v_k^1(r)\} \sin k\varphi \right). \quad (12)$$

$$\text{Тут} \quad \{u_0^1(r), v_0^2(r)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(r, \varphi), v(r, \varphi)\} d\varphi,$$

$$\{u_k^i(r), v_k^{i+\delta_{i1}-\delta_{i2}}(r)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{u(r, \varphi), v(r, \varphi)\} (\delta_{i1} \cos k\varphi + \delta_{i2} \sin k\varphi) d\varphi.$$

Після підставлення виразів (12) рівняння (1) та умови (2) набудуть вигляду

$$d^2 u_k^i / dr^2 + (\pi_1 + r^{-1}) du_k^i / dr + (\pi_2 - k^2 \pi_3 - r^{-2}) u_k^i +$$

$$+ (-1)^{i-1} km_1 dv_k^i / dr + (-1)^{i-1} km_2 v_k^i - n_1 dT_k^i / dr - n_2 T_k^i = 0,$$

$$d^2 v_k^i / dr^2 + (d_1 + r^{-1}) dv_k^i / dr + (d_2 - k^2 d_3 - r^{-2}) v_k^i +$$

$$+ (-1)^i ke_1 du_k^i / dr + (-1)^i ke_2 u_k^i - (-1)^i kn_3 T_k^i = 0, \quad (13)$$

$$u_k^i(r_0) = 0, \quad v_k^i(r_0) = 0, \quad u_k^i(1) = 0, \quad dv_k^i(1) / dr = v_k^i(1). \quad (14)$$

$$\text{Тут} \quad i = 1, 2, \quad \pi_1 = \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} - 2 \frac{2\nu - \nu^2}{(1 - \nu^2)(1 - 2\nu)} \frac{d\nu}{dr}, \quad \pi_3 = \frac{1 - 2\nu}{2r^2(1 - \nu)}, \quad n_1 = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

$$\pi_2 = \frac{1}{r(1 - \nu)} \left(\frac{\nu}{E} \frac{dE}{dr} + \frac{1 + 2\nu^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{d\nu}{dr} \right), \quad m_1 = \frac{1}{2r(1 - \nu)}, \quad m_2 = \frac{4\nu - 3}{2r^2(1 - \nu)} + \frac{\pi_2}{r},$$

$$n_2 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \left(\frac{1}{E} \frac{dE}{dr} + 2 \frac{d\nu}{dr} \frac{1}{1 - 2\nu} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} \right), \quad n_3 = \frac{2\alpha(1 + \nu)}{r(1 - 2\nu)}, \quad d_1 = \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} + \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{d\nu}{dr},$$

$$d_2 = -\frac{d_1}{r}, \quad d_3 = \frac{2(1 - \nu)}{r^2(1 - 2\nu)}, \quad e_1 = \frac{1}{r(1 - 2\nu)}, \quad e_2 = \frac{3 - 4\nu}{r^2(1 - 2\nu)} + \frac{d_1}{r^2},$$

$E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ – модуль Юнга, $\nu(r) = \lambda/(2\lambda + 2\mu)$ – коефіцієнт Пуассона.

Наведемо методику числово-аналітичного розв'язання системи рівнянь (13), опустивши для простоти запису верхній індекс « i » та нижній « k ». Подамо систему (13) так:

$$d^2 u / dr^2 + r^{-1} du / dr - u / r^2 = -p_{11} du / dr - p_{12} u - q_{11} dv / dr - q_{12} v - \tau_1, \quad (15)$$

$$d^2 v / dr^2 + r^{-1} dv / dr - v / r^2 = -p_{21} dv / dr - p_{22} v - q_{21} du / dr - q_{22} u - \tau_2,$$

$$\text{де} \quad p_{11} = \pi_1, \quad p_{12} = \pi_2 - k^2 \pi_3, \quad p_{21} = d_1, \quad p_{22} = d_2 - k^2 d_3,$$

$$q_{11} = (-1)^{i-1} km_1, \quad q_{12} = (-1)^{i-1} km_2, \quad q_{21} = (-1)^i ke_1, \quad q_{22} = (-1)^i km_2,$$

$$\tau_1 = n_1 dT_k^i / dr - n_2 T_k^i, \quad \tau_2 = (-1)^{i+1} kn_3 T_k^i.$$

Розв'язок першого рівняння (15) з урахуванням (14) запишемо у вигляді

$$u = C\varphi(r) - \int_{r_0}^r \left(p_{11}(\rho) \frac{du(\rho)}{d\rho} + p_{12}(\rho)u(\rho) + q_{11}(\rho) \frac{dv(\rho)}{d\rho} + q_{12}(\rho)v(\rho) + \tau_1(\rho) \right) \psi(r, \rho) d\rho, \quad (16)$$

де $\varphi(r) = r - r_0^2/r$, $\psi(r, \rho) = r/2 - \rho^2/2r$. Після інтегрування частинами виразів під інтегралами, які містять похідні від переміщень, з використанням умов (14) подамо рівняння (16) так:

$$u = C\varphi(r) - \int_{r_0}^r (A_1(r, \rho)u(\rho) + B_1(r, \rho)v(\rho)) d\rho - L_1(r). \quad (17)$$

Тут C – стала інтегрування,

$$\begin{cases} A_1(r, \rho) \\ B_1(r, \rho) \end{cases} = \begin{cases} p_{12}(\rho) \\ q_{12}(\rho) \end{cases} \psi(r, \rho) - \frac{d}{d\rho} \left(\begin{cases} p_{11}(\rho) \\ q_{11}(\rho) \end{cases} \psi(r, \rho) \right), \quad L_1(r) = \int_{r_0}^r \tau_1(\rho) \psi(r, \rho) d\rho.$$

Після задоволення умов (14), якщо $r = 1$, вираз (17) набуде вигляду

$$u(r) = \frac{\varphi(r)}{\varphi(1)} L_1(1) + \frac{\varphi(r)}{\varphi(1)} \int_{r_0}^1 (A_1(r, \rho)u(\rho) + B_1(r, \rho)v(\rho)) d\rho - L_1(r) - \int_{r_0}^r (A_1(r, \rho)u(\rho) + B_1(r, \rho)v(\rho)) d\rho. \quad (18)$$

Аналогічно розв'язавши друге рівняння (15), отримаємо інтегральне рівняння

$$v = \frac{\mu_2}{\mu_1} \varphi(r) + \frac{\varphi(r)}{\mu_1} \int_{r_0}^1 (C_2(\rho)u(\rho) + D_2(\rho)v(\rho)) d\rho - L_2(r) - \int_{r_0}^r (A_2(r, \rho)u(\rho) + B_2(r, \rho)v(\rho)) d\rho. \quad (19)$$

Тут $\mu_1 = d\varphi(1)/dr - \varphi(1) - B_2(1, 1)\varphi(1)$, $\mu_2 = dL_2(1)/dr - L_2(1) - B_2(1, 1)L_2(1)$,

$$\{C_2(\rho), D_2(\rho)\} = d\{A_2(1, \rho), B_2(1, \rho)\}/dr - (1 + B_2(1, 1))\{A_2(1, \rho), B_2(1, \rho)\},$$

$$\begin{cases} A_2(r, \rho) \\ B_2(r, \rho) \end{cases} = \begin{cases} q_{22}(\rho) \\ p_{22}(\rho) \end{cases} \psi(r, \rho) - \frac{d}{d\rho} \left(\begin{cases} q_{21}(\rho) \\ p_{21}(\rho) \end{cases} \psi(r, \rho) \right), \quad L_2(r) = \int_{r_0}^r \tau_2(\rho) \psi(r, \rho) d\rho.$$

Розв'язки інтегральних рівнянь (18), (19) знайдемо аналогічно, як і рівняння (10), для якого побудували квадратурний аналог (11).

Числовий приклад та обговорення. За запропонованою аналітично-числовою методикою розраховували стаціонарну температуру та переміщення у циліндрі з внутрішнім радіусом $r_0 = 0.3$, що нагрівається на діаметрально-протилежних ділянках зовнішньої поверхні за сталої температури на внутрішній. Для цього функції у крайових умовах (4) задали у вигляді

$$p(\varphi) = T_0, \quad q(\varphi) = 2T_0(1 + \cos 2\varphi), \quad T_0 = \text{const}. \quad (20)$$

Пружні та теплофізичні характеристики матеріалу такі:

$$E(r) = E_0 r^l, \quad \alpha(r) = \alpha_0 r^s, \quad \nu(r) = \exp(\kappa(r-1))/3, \quad \lambda(r) = \lambda_0 r^t. \quad (21)$$

Тут E_0, α_0, λ_0 – сталі значення коефіцієнтів відповідної розмірності, $0 \leq \nu(r) \leq 1/2$, l, s, t, κ – дійсні числа.

На рис. 1 наведено розподіли температури, розраховані за формулами (5), (11) за навантаження (20), якщо $t = 0; 2; -2$ у виразі для коефіцієнта теплопро-

відності (21). У перерізі $\varphi = 0$ температурне поле для $t = 0$ має близький до лінійного розподіл за товщиною стінки циліндра. Якщо коефіцієнт теплопровідності зростає за радіальною координатою ($t = 2$), температура у циліндрі підвищується зі збільшенням r швидше, ніж за спадної залежності ($t = -2$).

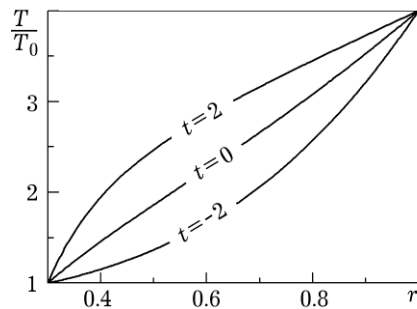


Рис. 1. Розподіли температури у перерізі $\varphi = 0$ за умов (20) та різних значень параметра t у виразі для коефіцієнта теплопровідності (21).

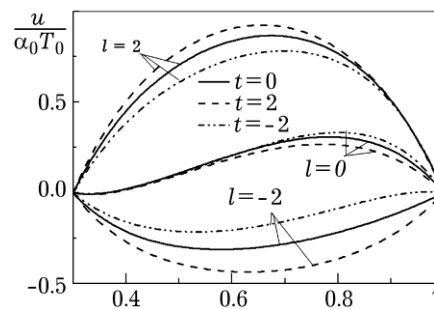


Рис. 2. Безрозмірні радіальні переміщення у перерізі $\varphi = 0$ циліндра за умов (20) та різних значень t і l , $s = 2$, $\kappa = 1$.

На рис. 2 наведено розподіли радіальних переміщень, обчислених у перерізі $\varphi = 0$ для розглянутих вище розподілів температурного поля за різних значень параметрів неоднорідності у виразах для коефіцієнта теплопровідності та модуля Юнга. Якщо модуль Юнга – спадна функція ($l = -2$), переміщення негативні майже за всією товщиною стінки циліндра, задовольняючи на бічних поверхнях однорідні крайові умови. За сталого модуля Юнга ($l = 0$) радіальні переміщення позитивні з наближенням до зовнішньої поверхні і негативні поблизу внутрішньої. Нарешті, за зростаючого модуля Юнга ($l = 2$) вони відповідають розширенню стінки циліндра за всією товщиною, абсолютне значення якого спадає з наближенням до поверхонь внаслідок задоволення крайових умов. Крім того, на розподіл переміщень суттєво впливає спосіб задавання залежності коефіцієнта теплопровідності від радіальної координати.

Висновки. Запропоновано методику побудови аналітично-числових розв'язків плоских неосесиметричних задач теплопровідності та термопружності для довгого порожнистого циліндра, властивості якого є довільними функціями радіальної координати. Методом зведення до інтегральних рівнянь та з допомогою квадратурних формул задачі зведено до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь для визначення скінченної кількості значень шуканої температури та компонентів вектора переміщень у вузлах розбиття діапазону зміни радіальної координати. Проаналізовано тепловий та деформований стани циліндра за певного теплового навантаження за змінних теплофізичних і пружних властивостей матеріалу.

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – 648 с.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
6. Токовий Ю. В., Теслюк А. Б. Розв'язування двовимірних неосесиметричних задач теорії пружності й термопружності для порожнистого циліндра методом безпосереднього інтегрування // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 123–132.

7. Халко Б. С., Чиж А. І. Про вплив змінних коефіцієнтів тепловіддачі на термонапруження у скінченній циліндричній оболонці // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 2. – С. 195–203.
8. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**, № 5. – P. 195–216.
9. El-Naggar A. M., Abd-Alla A. M., Fahmy M. A., Ahmed S. M. Thermal stresses in a rotating non-homogeneous orthotropic hollow cylinder // *Heat and Mass Transfer.* – 2002. – **39**. – P. 41–46.
10. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses – advanced theory and applications. – Amsterdam: Springer, 2009. – 562 с.
11. Jabbari M., Bahtui A., Eslami M. R. Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick long FGM cylinders // *J. Thermal Stresses.* – 2006. – **29**, № 7. – P. 643–663.
12. Jabbari M., Meshkini M., Eslami M. R. Mechanical and thermal stresses in FGPPM hollow cylinder due to radially symmetric loads // *ISRN Mech. Eng.* – 2011. – Article ID 291409. – 10 p.
13. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads // *Trans ASME. J. Appl. Mech.* – 2003. – **70**. – P. 111–118.
14. Liew K. M., Kitipornchai S., Zhang X. Z., Lim C. W. Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**. – P. 2355–2380.
15. Tokovyy Y. V., Ma C.-C. Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders // *J. Eng. Math.* – 2008. – **61**, № 2–4. – P. 171–184.
16. Tokovyy Y. V., Ma C.-C. Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // *J. Thermal Stresses.* – 2008. – **31**, № 9. – P. 892–913.
17. Vasilenko A. T. Nonaxisymmetric thermal stressed state of nonhomogeneous anisotropic cylinders // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, № 11. – P. 895–899.
18. Zhang X., Hasebe N. Elasticity solution for a radially nonhomogeneous hollow circular cylinder // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1999. – **66**. – P. 598–606.
19. Zimmerman R. W., Lutz M. P. Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder // *J. Thermal Stresses.* – 1999. – **22**. – P. 177–188.

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛОВОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ НЕОСЕССИМЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В СМЕЩЕНИЯХ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Разработана аналитически-числовая методика построения решений плоских неосесимметричных задач теплопроводности и термоупругости для протяжного полого цилиндра, упругие и теплофизические свойства которого являются произвольными функциями радиальной координаты. Исходные уравнения указанных задач сведены к интегральным уравнениям второго рода, которые решены с использованием квадратурных формул.

ANALYTICAL-NUMERICAL SOLUTION OF A PLANE NON-AXISYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEM IN TERMS OF DISPLACEMENTS FOR A RADIAALLY INHOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDER

An analytical-numerical technique is developed for the solution of plane non-axisymmetric heat-conduction and thermoelasticity problems for a long hollow cylinder whose elastic and thermo-physical properties are presented by arbitrary functions of the radial coordinate. The original equations of these problems have been reduced to the integral equations of the second kind, which then were solved by making use of the quadrature formulae.